Časopis pro pěstování matematiky

Čestmír Vitner

Geometrický význam křivostí křivek v E_n

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 433--437

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117479`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

GEOMETRICKÝ VÝZNAM KŘIVOSTÍ KŘIVEK V E_n

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Došlo dne 3. května 1962)

Obsahem článku je věta o geometrickém významu křivostí křivek v E_n, kterou v nepřesném tvaru vyslovil již G. E. A. BRUNEL v práci [1].

Ve své práci [1] z roku 1882 definuje G. E. A. BRUNEL křivosti křivky v E_n jako limity $\lim\limits_{s \to s_0} \psi_r / |s - s_0|$, kde ψ_r je „úhel" r-dimensionálních oskulačních podprostorů v bodech s a s_0. Zmíněná práce obsahuje, mimo jiné, explicitní vzorce pro křivosti, Frenetovy vzorce pro křivky v E_n a vzorce pro středy a poloměry oskulačních koulí těchto křivek. Brunelova definice křivostí má však jednu vadu, a to v tom, že předpokládá, že zmíněné oskulační prostory svírají nejvýše jeden nenulový úhel, což ovšem obecně není pravda. Okolnost, že se Brunel mohl omezit na jediný úhel, byla způsobena tím, že místo oskulačního prostoru $\{M'(s), \ldots, M^{(r)}_{(s)}(s)\}$ v bodě $M(s)$ bere „blízký" prostor $\{M'(s_0), \ldots, M^{(r-1)}_{(s_0)}(s_0), M^{(r)}_{(s_0)}(s_0) + M^{(r+1)}_{(s_0)}(s_0)(s - s_0)\}$.

Cílem tohoto článku je odstranit zmíněnou nepřesnost. Považuji při této příležitosti za správné poznamenat, že přes tuto a několik jiných podobných nepřesností — které byly v době vzniku Brunelova článku v geometrii běžné — má Brunelova práce pro diferenciální geometrii křivek v E_n základní význam a také patrně prioritu ve svrchu uvedených otázkách. Zdá se mi, že tato skutečnost není již dnes dostatečně známa.

Zkoumaná křivka bude dána parametricky pomocí oblouku s, při čemž předpokládáme, že funkce $M(s)$ je třídy $n + 1$ a determinant $[M', M'', \ldots, M^{(n)}]$ je různý od nuly pro každé uvažované s. Východiskem mé práce nebude geometrická definice křivostí, ale jejich definice pomocí Frenetových vzorců, jak je to dnes obvyklé.

Geometrický význam křivostí je dán potom následující větou:

Věta. *Označme* $0 \leqq \varphi_1(s) \leqq \varphi_2(s) \leqq \ldots \leqq \varphi_r(s) \leqq \frac{1}{2}\pi$, $r < n$, *ostré úhly r-rozměrných oskulačních prostorů v bodech* s_0 *a s. Potom platí*

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\varphi_r(s)}{|s - s_0|} = 0 \quad \textit{pro} \quad k = 1, \ldots, r - 1\,, \tag{1}$$

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\varphi_r(s)}{|s - s_0|} = \kappa_r(s_0)\,. \tag{2}$$

Důkaz. Označme $a_1(s)$ jednotkový vektor tečny, $a_2(s), \ldots, a_n(s)$ jednotkové vektory normál křivky v bodě s. Kroneckerovo delta označíme δ_{ik}. Pro úhly $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ platí podle [2] rovnice

$$(3) \qquad \left| \sum_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j(s_0)) (a_k(s), a_j(s_0)) - \lambda \delta_{ik} \right| = 0 ,$$

kde $\lambda = \cos^2 \varphi$. Svislé pruhy znamenají symbol pro determinant. Místo limity $\lim\limits_{s \to s_0} \varphi(s)/|s - s_0|^{-1}$ můžeme zkoumat limitu $\lim\limits_{s \to s_0} \sin \varphi(s)/|s - s_0|^{-1}$, případně $\lim \sin^2 \varphi(s)/(s - s_0)^{-2}$, tj. $\lim\limits_{s \to s_0} (1 - \lambda)/(s - s_0)^{-2}$. Rovnici (3) můžeme přepsat takto:

$$(4) \qquad \left| \sum_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j(s_0)) (a_k(s), a_j(s_0)) - \delta_{ik} + (1 - \lambda) \delta_{ik} \right| = 0 .$$

Odtud dostaneme limitním přechodem

$$(5) \qquad \left| \lim_{s \to s_0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j(s_0)) (a_k(s), a_j(s_0)) - \delta_{ik}}{(s - s_0)^2} + \lim_{s \to s_0} \frac{1 - \lambda}{(s - s_0)^2} \delta_{ik} \right| = 0 ,$$

ovšem za předpokladu, že existují limity

$$(6) \qquad \lim_{s \to s_0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j(s_0)) (a_k(s), a_j(s_0)) - \delta_{ik}}{(s - s_0)^2} .$$

Počítejme tyto limity. Pro $a_i(s)$ platí rozvoje

$$(7) \qquad a_i(s) = a_i(s_0) + a_i'(s_0)(s - s_0) + \tfrac{1}{2} a_i''(s_0)(s - s_0)^2 + \ldots$$

Použijme pro stručnost označení $a_i(s_0) = a_i$. Pro čitatel v limitách (6) platí podle (7) (uvážíme-li ještě, že $(a_i, a_k) = \delta_{ik}$)

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j) (a_k(s), a_j) - \delta_{ik} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} [(a_i, a_j) + (a_i', a_j)(s - s_0) + \tfrac{1}{2}(a_i'', a_j)(s - s_0)^2 + \ldots] .$$

$$. [(a_k, a_j) + (a_k', a_j)(s - s_0) + \tfrac{1}{2}(a_k'', a_j)(s - s_0)^2 + \ldots] - \delta_{ik} =$$

$$= \delta_{ik} + [(a_i', a_k) + (a_i'', a_i)](s - s_0) + [\tfrac{1}{2}(a_i', a_k) + \tfrac{1}{2}(a_k'', a_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} (a_i', a_j)(a_k', a_j)](s - s_0)^2 + \ldots - \delta_{ik} .$$

Derivací $(a_i(s), a_k(s)) = \delta_{ik}$ dostaneme postupně

$$(9) \qquad (a_i', a_k) + (a_i, a_k') = 0 ,$$

$$(10) \qquad (a_i'', a_k) + (a_i, a_k'') = -2(a_i', a_k') .$$

Pomocí (9), (10) se (8) redukuje na

$$(11)\quad \sum_{j=1}^{r}(a_i(s), a_j)(a_k(s), a_j) - \delta_{ik} = \left[-(a_i', a_k') + \sum_{j=1}^{r}(a_i', a_j)(a_k', a_j)\right](s - s_0)^2 + \ldots$$

Pomocí Frenetových vzorců

$$(12)\qquad a_i' = -\kappa_{i-1}a_{i-1} + \kappa_i a_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde

$$\kappa_0 = 0,\ a_0 = 0,\ \kappa_n = 0,\ a_{n+1} = 0,$$

dostaneme snadno

$$(13)\qquad (a_i', a_k') = (-\kappa_{i-1}a_{i-1} + \kappa_i a_{i+1}, -\kappa_{k-1}a_{k-1} + \kappa_k a_{k+1}) =$$
$$= \kappa_{i-1}\kappa_{k-1}\delta_{i-1,k-1} - \kappa_{i-1}\kappa_k\delta_{i-1,k+1} - \kappa_i\kappa_{k-1}\delta_{i+1,k-1} + \kappa_i\kappa_k\delta_{i+1,k+1},$$

$$(14)\qquad \sum_{j=1}^{r}(a_i', a_j)(a_k', a_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r}(-\kappa_{i-1}a_{i-1} + \kappa_i a_{i+1}, a_j)(-\kappa_{k-1}a_{k-1} + \kappa_k a_{k+1}, a_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r}\left[\kappa_{i-1}\kappa_{k-1}(a_{i-1}, a_j)(a_{k-1}, a_j) - \kappa_i\kappa_{k-1}(a_{i+1}, a_j)(a_{k-1}, a_j) -\right.$$
$$\left. - \kappa_{i-1}\kappa_k(a_{i-1}, a_j)(a_{k+1}, a_j) + \kappa_i\kappa_k(a_{i+1}, a_j)(a_{k+1}, a_j)\right] =$$
$$= \kappa_{i-1}\kappa_{k-1}\delta_{i-1,k-1} - \kappa_i\kappa_{k-1}\delta_{i+1,k-1} - \kappa_{i-1}\kappa_k\delta_{k+1,i-1} +$$
$$+ \kappa_i\kappa_k\sum_{j=1}^{r}\delta_{i+1,j}\delta_{k+1,j}.$$

V případě $(i, k) \neq (r, r)$ dostaneme

$$(15a)\qquad \sum_{j=1}^{r}(a_i', a_j)(a_k', a_j) = \kappa_{i-1}\kappa_{k-1}\delta_{i-1,k-1} - \kappa_{i-1}\kappa_k\delta_{k+1,i-1} -$$
$$- \kappa_i\kappa_{k-1}\delta_{i+1,k-1} + \kappa_i\kappa_k\delta_{i+1,k+1}.$$

V případě $i = r$, $k = r$ pak

$$(15b)\quad \sum_{j=1}^{r}(a_i', a_j)(a_k', a_j) = \kappa_{i-1}\kappa_{k-1}\delta_{i-1,k-1} - \kappa_{i-1}\kappa_k\delta_{k+1,i-1} - \kappa_i\kappa_{k-1}\delta_{i+1,k-1}$$

Dosadíme-li nyní do (11) podle vzorců (13), (15a) a (15b) dostaneme

$$(16)\qquad \sum_{j=1}^{r}(a_i(s), a_j)(a_k(s), a_j) - \delta_{ik} = o(s - s_0)^2 \quad \text{pro} \quad (i, k) \neq (r, r),$$

$$(17)\qquad \sum_{j=1}^{r}(a_r(s), a_j)(a_r(s), a_j) - \delta_{rr} = -\kappa_r^2(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^2,$$

kde o jsou známé symboly „malé o".

Z vzorců (16) a (17) plyne

$$(18) \qquad \lim_{s\to s_0} \frac{\sum_{j=1}^{r} (a_i(s), a_j(s_0)) (a_k(s), a_j(s_0)) - \delta_{ik}}{(s - s_0)^2} = 0 \quad \text{pro} \quad (i, k) \neq (r, r),$$

$$(19) \qquad \lim_{s\to s_0} \frac{\sum_{j=1}^{r} (a_r(s), a_j(s_0)) (a_r(s), a_j(s_0)) - \delta_{ik}}{(s - s_0)^2} = - \kappa_2^2 .$$

Označíme-li nyní pro stručnost $\lim_{s\to s_0} (1 - \lambda)/(s - s_0)^{-2} = \mu$, redukuje se rovnice (5) na

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu - \kappa_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$(20) \qquad \mu^{r-1}(\mu - \kappa_2^2) = 0 .$$

Odtud plyne ihned dokazované tvrzení.

Poznámka. Z právě dokázané věty plyne, že křivosti křivky můžeme definovat geometricky tak, jak to činí Brunel, jenom pod slovem úhel oskulačních podprostorů je třeba rozumět maximální ostrý úhel těchto podprostorů.

Literatura

[1] *G. E. A. Brunel*: Sur les proprietés metriques des courbes gauches dans un espace lineaire à *n* dimension. Math. Annalen 1882, B. XIX, 37–55.

[2] *Č. Vitner*: O úhlech lineárních podprostorů v E_n. Čas. pro pěst. matem., *87* (1962), 415—423.

Резюме

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ КРИВИЗН КРИВЫХ В E_n

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

Содержанием статьи является доказательство следующей теоремы, которую в неточном виде сформулировал уже Г. Э. А. Брунель в своей работе [1]:

Теорема. *Если обозначить через* $0 \leqq \varphi_1(s) \leqq \varphi_2(s) \leqq \ldots \leqq \varphi_r(s) \leqq \frac{1}{2}\pi$ *острые углы r-мерных соприкасающихся пространств в точках* s_0 *и* s *кривой в* E_n, *то*

$$\lim_{s\to s_0} \frac{\varphi_k(s)}{|s - s_0|} = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, r - 1, \lim_{s\to s_0} \frac{\varphi_r(s)}{|s - s_0|} = \kappa_r(s_0),$$

где s — *дуга, а* $\kappa_r(s_0)$ *означает r-ю кривизну кривой в точке* s_0.

Zusammenfassung

EINE GEOMETRISCHE INTERPRETATION DER KURVENKRÜMMUNGEN IM EUKLEIDISCHEN RAUM E_n

Čestmír Vitner, Praha

Die Arbeit ist dem Beweise des folgenden Satzes, welcher in einer nicht präzisen Form schon von G. E. A. Brunel in seiner Arbeit [1] formuliert wurde, gewidmet:

Satz. *Wenn man mit* $0 \leqq \varphi_1(0) \leqq \varphi_2(0) \leqq \varphi_r(s) \leqq \frac{1}{2}\pi$ *die spitzen Winkel der r-dimensionalen osculierenden Räumen in Punkten* s_0 *und* s *einer Kurve im* E_n *bezeichnet, dann gilt*

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\varphi_k(s)}{|s - s_0|} = 0 \ (k = 1, \ldots, r - 1), \quad \lim_{s \to s_0} \frac{\varphi_r(s)}{|s - s_0|} = \kappa_r(s_0),$$

wo s *die Bogenlänge und* $\kappa_r(s_0)$ *die r-te Krümmung der Kurve im Punkte* s_0 *ist.*