Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel

Über die begleitenden Normaldreibeine der Fläche $\mathcal{A}^2_{0,3}$. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 95--98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117528`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ÜBER DIE BEGLEITENDEN NORMALDREIBEINE DER FLÄCHE $\mathscr{A}^2_{0,3}$, II

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Eingegangen am 31. März 1964)

1. Im ersten Teil [1] dieser Behandlung wurde der „asymptotische Normaldreibein" $MJ_1J_2J_3$ der Fläche $\mathscr{A} = \mathscr{A}^2_{0,3}$ konstruiert, welchen wir nun abändern (wir wechseln das Vorzeichen bei h), so dass

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \mathrm{d}u\, J_1 + \mathrm{d}v\, J_2\,,\\
\mathrm{d}J_1 &= \omega_1^1\, J_1 + \beta\, \mathrm{d}u\, J_2 + (1-h)\, \mathrm{d}v\, J_3\,,\\
\mathrm{d}J_2 &= \gamma\, \mathrm{d}v\, J_1 + \omega_2^2\, J_2 + (1+h)\, \mathrm{d}u\, J_3\,,\\
\mathrm{d}J_3 &= \omega_3^1\, J_1 + \omega_3^2\, J_2 + \omega_3^3\, J_3\,;
\end{aligned} \tag{1}
$$

die Koeffizienten ω_i^j haben die gewöhnliche Form $a_i^j\, \mathrm{d}u + b_i^j\, \mathrm{d}v$; u, v sind asymptotische Parameter, β, γ sind *die verallgemeinerten Fubinischen Koeffizienten* (wir setzen voraus, dass $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$) und h ist die *Torsion* der Fläche. Weiter verlangen wir das Bestehen der Unimodularitätsbedingung

$$
\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0\,. \tag{2}
$$

Diesen Dreibein kann man aus dem *speziellen Švecschen Tetraeder* der Fläche $P^2_{0,3}$ ([6], S. 387) gewinnen, indem man die Symbole $A_0, A_1, A_2, A_3, a_i^0, b_i^0$ durch $M, J_1, J_2, J_3, 0, 0$ ersetzt und anstatt der projektiven lokalen Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3 die affinen lokalen Koordinaten untersucht. Das entspricht dem Übergang zum lokalen affinen Raume und zur äquiaffinen Gruppe,*) nachdem A_1, A_2, A_3 in uneigentlichen Punkten der Koordinatenachsen x^1, x^2, x^3 gewählt wurden. Wir beschränken uns im weiteren ausschliesslich auf den äquiaffinen Fall.

Von diesem Gesichtspunkte aus kann man aus der geometrischen Beschreibung des speziellen Tetraeders $A_0A_1A_2A_3$ sofort die entsprechende Beschreibung des Dreibeins $MJ_1J_2J_3$ bekommen: uneigentliche Punkte der Koordinatenachsen x^1, x^2 sind Berührungsprunkte der Tangentialebene x^1x^3, bzw. x^2x^3 bezüglich der Quadrik $\mathscr{Q}_u(0)$ bzw. $\mathscr{Q}_v(0)$; [6], S. 394. Die Koordinatenachse x^3 (d.h. die Demoulinsche

*) Die Bedingung der Unimodularität $\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$ übergeht in (2).

Gerade; [3], S. 329) ist also die Schnittgerade der entsprechenden asymptotischen Tangentialebenen von $\mathcal{Q}_u(0)$ bzw. $\mathcal{Q}_v(0)$.

2. Die Quadriken $\mathcal{Q}_v(v)$, $\mathcal{Q}_u(v)$ haben bei $h \neq \pm 1$ die lokalen Gleichungen

$$(3) \qquad (1 + h)\,x^1x^2 - x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{h_u}{1 + h}\right)x^1x^3 = \frac{1}{2}\left(a_3^1 + \frac{v\beta\gamma}{1 + h}\right)(x^3)^2\,,$$

$$(4) \qquad (1 - h)\,x^1x^2 - x^3 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{h_v}{1 - h}\right)x^2x^3 = \frac{1}{2}\left(b_3^2 + \frac{v\beta\gamma}{1 - h}\right)(x^3)^2\,,$$

wo $a = -\,a_1^1 - a_2^2 + a_3^3$, $b = -\,b_2^2 - b_1^1 + b_3^3$; zur Herleitung und geometrischen Bedeutung siehe [6], S. 390 – 391.

Die Quadrik $\mathcal{Q}_v(v)$ enthält den Punkt $(0, 0, -2/(a_3^1 + (v\beta\gamma)/(1 + h))$, wenn $a_3^1 + (v\beta\gamma)/(1 + h) \neq 0$ und die zur Koordinatenachse x^3 konjugierte Polar bezüglich $\mathcal{Q}_v(v)$ hat die Gleichungen $x^3 = 0$, $x^1 = 2 : (a + h_u/(1 + h))$, sofern $a + h_u/(1 + h) \neq 0$. Daraus folgt bei geeigneter Wahl von v die geometrische Bedeutung des Einheitspunktes der Koordinatenachse x^3 und bei $a + h_u/(1 + h) \neq 0$ auch die geometrische Bedeutung des Einheitspunktes der Koordinatenachse x^1. Analogisch kann man beim Austausch von u, v schliessen. Die Relationen $a + h_u/(1 + h) = 0$, $b - h_v/(1 - h) = 0$ sind bei $h \neq 0$ in [1], S. 589 geometrisch beschrieben: in unserem Falle drücken sie das Zusammenfallen der „ersten Normale" und der „Pseudonormale" mit der Koordinatenachse x^3 aus.

Im Falle $h = 0$ kann man die Oskulationsquadrik $\mathcal{H}$ verwenden, die mit beiden Asymptotiken im Punkte der Fläche die Berührung vierter Ordnung hat und durch

$$(5) \qquad \begin{aligned} &-3x^3 + x^1x^2 + \left(\tfrac{1}{2}((\ln|\beta|)_u - 2a_1^1 + a_2^2) + \tfrac{3}{4}a\right)x^1x^3 + \\ &+ \tfrac{1}{2}((\ln|\gamma|_v - 2b_2^2 + b_1^1) + \tfrac{3}{4}b)\,x^2x^3 = 0 \end{aligned}$$

gegeben wird; [4], § 3.

Die zur Koordinatenachse x^3 bezüglich $\mathcal{H}$ konjugierte Polar hat die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} x^3 = 0\,, \quad &-3 + \left(\tfrac{1}{2}((\ln|\beta|)_u - 2a_1^1 + a_2^2) + \tfrac{3}{4}a\right)x^1 + \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}((\ln|\gamma|)_v - 2b_2^2 + b_1^1) + \tfrac{3}{4}b\right)x^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Sind die Koeffizienten bei x^1, x^2 von Null verschieden, folgt daraus die geometrische Bedeutung der Einheitspunkte der Koordinatenachsen x^1, x^2.

Bemerken wir, dass bei allgemeiner Torsion kann man auch die geometrische Bedeutung der Einheitspunkte von Koordinatenachsen x^1, x^2 durch die zweite Wilczynskische Direktrix ersten Typus, bzw. durch die Greensche Kante ersten Typus beschreiben.

3. Das Verschwinden der Torsion kann man auf verschiedene Weise charakterisieren, z.B. durch die Existenz einer regulären Quadrik $\mathcal{H}$, die mit beiden Asymptotiken im Punkte der Fläche die Berührung vierter Ordnung hat; [4], § 3.

Es sei also im weiteren $h = 0$. Dann fallen $\mathcal{Q}_v(0)$, $\mathcal{Q}_u(0)$ zusammen gerade dann, wenn $a = b = a_3^1 - b_3^2 = 0$, und das Zusammenfallen Greenscher Kanten erster zwei Typen ist durch $a_2^2 = b_1^1 = 0$ ([4], § 3) charakterisiert.

Setzen wir also $a = b = a_2^2 = b_1^1 = a_3^1 - b_3^2 = 0$ voraus. Daraus folgt dann $a_1^1 = a_3^3 = b_2^2 = b_3^3 = 0$ und das Zusammenfallen der drei Typen von Wylczynskischen Direktrizen ist nun mit $\beta_v - a_3^2 = \gamma_u - b_3^1 = 0$ ([4], § 2) gleichbedeutend.

Die Quadrik $\mathcal{Q}_v(-1) = \mathcal{Q}_u(-1)$ enthält den uneigentlichen Punkt der Koordinatenachse x^3 gerade dann, wenn $\beta\gamma = a_3^1 = b_3^2$, was sich sofort aus (3), (4) für $v = -1$ ergibt. Die Voraussetzung $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ führt nun zu $a_3^1 \neq 0$.

Weiter handelt es sich um die geometrische Bedeutung der Relationen

$$(a_3^1)_v - (b_3^1)_u = - a_3^2\gamma\,, \quad (b_3^2)_u - (a_3^2)_v = - b_3^1\beta\,. \tag{5}$$

Aus Abschnitt 2 wissen wir schon, dass der Punkt $(0, 0, -2/a_3^1)$ auf $\mathcal{Q}_v(0) = \mathcal{Q}_u(0)$ liegt und damit ist schon auch der geometrische Sinn von $\beta\gamma = a_3^1$ gegeben. Weiter bemerken wir, dass der Punkt $(- a_3^2\gamma, - b_3^1\beta, 2\beta\gamma)$ auf der Wilczynskischen Direktrix ([6], S. 395) und der Punkt $((a_3^1)_v = (b_3^2)_u = (\beta\gamma)_v, (a_3^1)_u = (b_3^2)_u = (\beta\gamma)_u, 2\beta\gamma)$ auf der Fubinischen kanonischen Gerade ([2], § 2) liegt und dass der geometrische Sinn für $(b_3^1)_u, (a_3^2)_v$ mit Hilfe der Tangente zu der Kurve der Punkte $(- a_3^2/(2\beta), - b_3^1/(2\gamma), 1)$ (bei $dv = 0$, bzw. $du = 0$) beschrieben werden kann. Daraus folgt dann die (ein wenig komplizierte) geometrische Bedeutung von (5).

Es ist gut bekannt, dass die Fläche $\mathcal{A}$ gerade dann im äquiaffinen Raume liegt, wenn $(a_j^k)_v - (b_j^k)_u = b_j^i a_i^k - a_j^i b_i^k$ für $j = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$, d.h. wenn

$$\begin{aligned}
&(a_0^1)_v - (b_0^1)_u = 0 = b_1^1\,, && (a_2^1)_v - (b_2^1)_u = \gamma_u = \gamma a_1^1 - b_3^1\,,\\
&(a_0^2)_v - (b_0^2)_u = 0 = a_2^2\,, && (a_2^2)_v - (b_2^2)_u = \gamma\beta - b_3^2\,,\\
&(a_0^3)_v - (b_0^3)_u = 0 = a_2^3 - b_1^3,\ \text{d.h. } h = 0\,, && (a_2^3)_v - (b_2^3) = 0 = b_2^2 - b_3^3\,,\\
&(a_1^1)_v - (b_1^1)_u = (a_1^1)_v = a_3^1 - \gamma\beta\,, && (a_3^1)_v - (b_3^1)_u = b_3^3 - a_3^1 - a_3^2\gamma\,,\\
&(a_1^2)_v - (b_1^2)_u = \beta_v = a_3^2 - \beta b_2^2\,, && (a_3^2)_v - (b_3^2)_u = b_3^1\beta - a_3^3 b_3^2\,,\\
&(a_1^3)_v - (b_1^3)_u = 0 = a_3^3 - a_1^1\,, && (a_3^3)_v - (b_3^3)_u = b_3^2 - a_3^1\,,
\end{aligned}$$

mit $a_1^1 = a_3^3 = b_2^2 = b_3^3 = 0$.

In früheren Betrachtungen haben wir also schrittweise geometrische Bedingungen auf $\mathcal{A}$ so weit gelegen, bis alle Integrabilitätsbedingungen ausgeschöpft wurden. Analogisches Verfahren für $\mathcal{P}_{0,3}^2$ ist in [2], § 3 angegeben.

Literatur

[1] *B. Cenkl:* La normale d'une surface dans l'espace à connexion projective. Czech. Mat. J. *12 (87)*, 1962, 582—606.

[2] *B. Cenkl:* L'équation de structure d'une espace à connexion projective. Czech. Mat. J. *14 (89)*, 1964, 79—94.

[3] *V. Havel:* Über die begleitenden Normaldreibeine der Fläche $A^2_{0,3}$, *I.* Czech. Mat. J. *13* (*88*), 1963, 327—334.

[4] *В. Гавел:* К понятию директрисы Вилчинского и ребра Грина в точке поверхности с проективной связностю. Čas. pěst. mat. *90* (1965), 87—94.

[5] *A. Švec:* K výkladu teorie prostorů s konexí. Čast. pěst. mat. *86* (1961), 425—432.

[6] *A. Švec:* Sur la géométrie différentielle d'une surface plongée dans un espace à trois dimensions à connexion projective. Czech. Mat. J. *11* (*86*), 1961, 386—397.

Résumé

O NORMÁLNÍCH REPERECH PLOCHY $\mathscr{A}^2_{0,3}$, II

VÁCLAV HAVEL, Brno

Pro „asymptotický normální" reper $MJ_1J_2J_3$ plochy $\mathscr{A}^2_{0,3}$, daný rovnicemi (1), je podán geometrický význam jednotkových bodů souřadnicových os lokálních prostorů a jsou geometricky charakterisovány podmínky integrability pro případ vnoření do ekviafinního prostoru.

Резюме

НОРМАЛЬНЫЕ РЕПЕРЫ ПОВЕРХНОСТИ $\mathscr{A}^2_{0,3}$, II

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

Для „асимптотического нормального" репера (1) поверхности $\mathscr{A}^2_{0,3}$ дано геометрическое значение орт локальных пространств, и геометрически характеризованы условия интегрируемости для случая поверхности эквиаффинного пространства.