Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav A. Hruška

Řešení rovnic iteracemi

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 281--285

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121387`

Řešení rovnic iteracemi.

V. Hruška.

Při řešení rovnic iteracemi uvádíme je obyčejně na tvar

$$x = f(x). \tag{1}$$

Je-li x hodnota blízká kořenu α rovnice (1), počítáme přesnější hodnoty kořene postupně dosazováním do pravé strany rovnice (1)

$$x_2 = f(x_1)$$
$$x_3 = f(x_2).$$
$$\cdots\cdots$$

Jak známo,[1]) je-li v jistém okolí kořene

$$|f'(x)| < 1,$$

a volíme-li prvou sblíženou hodnotu kořene x_1 dosti blízko kořene, konverguje posloupnost

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

ke kořeni α rovnice (1).

Převedení rovnice na tvar (1) dělá někdy značné obtíže. Zpravidla bývá daleko snáze uvésti ji na obecnější tvar

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{2}$$

Je-li opět x_1 prvou sblíženou hodnotou kořene α rovnice (2), počítejme postupně další jeho sblížené hodnoty z rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= f_2(x_1) \\ f_1(x_3) &= f_2(x_2) \\ f_1(x_4) &= f_2(x_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Chceme dokázati větu: **Je-li v jistém oboru $a \ldots b$, který obsahuje kořen α, stále**

$$|f'_1(x)| > |f'_2(x)|, \qquad |f'_1(x) > 0, \tag{4}$$

a volíme-li prvou sblíženou hodnotu x_1 uvnitř tohoto oboru tak, aby v něm ležela i druhá sblížená hodnota x_2, konverguje posloupnost

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \tag{5}$$

ke kořeni α rovnice (2).

---

[1]) *Runge-König*, Numerisches Rechnen, str. 155.

Jelikož α je kořenem rovnice (2), platí

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha).$$

Odečteme-li tuto rovnici od prvé rovnice (3), obdržíme

$$f_1(x_2) - f_1(\alpha) = f_2(x_1) - f_2(\alpha).$$

Jest tedy x_2 kořenem rovnice

$$F(x) = \frac{f_1(x) - f_1(\alpha)}{f_2(x_1) - f_2(\alpha)} = 1. \tag{6}$$

Funkce $F(x)$ však jest podle (4) monotoní spojitou funkcí x, která nabývá hodnost

$$F(\alpha) = 0, \qquad F(x_1) = \frac{f_1(x_1) - f_1(\alpha)}{f_2(x_1) - f_2(\alpha)} = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)},$$

kde ξ leží mezi α a x_1. Mají-li tudíž $f'_1(x)$ a $f_2'(x)$ stejná znamení v oboru $a \ldots b$, jest podle (4) $F(x_1) > 1$ a proto rovnice (6) má určitě kořen x_2, který leží mezi α a x_1, tedy blíže kořene α než x_1. Ze stejného důvodu leží x_3 mezi α a x_2, atd. Posloupnost (5) skutečně konverguje (neboť je monotoní) a její limita X splňuje

$$f_1(X) = f_2(X),$$

t. j. jest kořenem rovnice (2). Tento kořen ostatně je identický s α, neboť vzhledem k podmínkám (4) má rovnice (2) jediný kořen v oboru $a \ldots b$.

Poněkud jinak je tomu, mají-li $f'_1(x)$ a $f'_2(x)$ v $a \ldots b$ znamení opačná. Pak jest patrně

$$F(\alpha) = 0, \qquad F(x_1) = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)} < -1,$$

z čehož však ještě neplyne, že by rovnice (6) vůbec musela míti kořen. Předpokládejme však, že (6) má v oboru $a \ldots b$ kořen x_2, takže je

$$F(x_2) = \frac{f_1(x_2) - f_1(\alpha)}{f_2(x_1) - f_2(\alpha)} = 1. \tag{7}$$

Pak x_3 jest kořenem druhé rovnice (3), kterou lze vzhledem k (7) také psáti

$$\Phi(x) = \frac{f_1(x) - f_1(\alpha)}{f_2(x_2) - f_2(\alpha)} \cdot \frac{f_1(x_2) - f_1(\alpha)}{f_2(x_1) - f_2(\alpha)} = 1. \tag{8}$$

Levá strana této rovnice však jest monotoní spojitou funkcí, která nabývá hodnot

$$\Phi(\alpha) = 0, \quad \Phi(x_1) = \frac{f_1(x_1) - f_1(\alpha)}{f_2(x_1) - f_2(\alpha)} \cdot \frac{f_1(x_2) - f_1(\alpha)}{f_2(x_2) - f_2(\alpha)} = \frac{f'_1(\xi_1)}{f'_2(\xi_1)} \cdot \frac{f'_1(\xi_2)}{f'_2(\xi_2)},$$

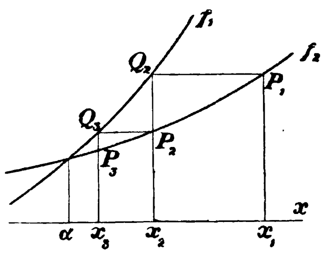
kde ξ_1 je vhodnou hodnotu mezi α a x_1 a ξ_2 je vhodnou hodnotou mezi α a x_2. Podle předpokladu (4) leží však obě tyto hodnoty mezi $a \ldots b$ a proto je $\Phi(x_1) > 1$, takže rovnice (8) má kořen mezi α a x_1.

Stejně následující rovnice (3) má kořen x_4 mezi α a x_2 atd. Jak ostatně snadno seznáme, leží x_2 po opáčné straně kořene α než x_1, takže se v tomto případě kořenu přibližujeme střídavě s obou stran. Konvergence posloupnosti (5) ke kořeni α pak odtud plyne stejným způsobem jako dříve.

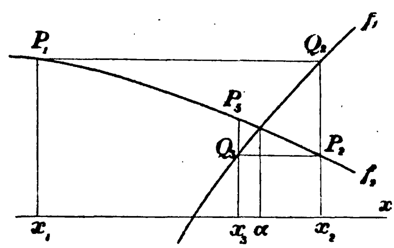
Znázorníme-li si funkce

$$y = f_1(x) \quad \text{a} \quad y = f_2(x) \tag{9}$$

křivkami, seznáme snadno, že výpočet aproximací (5) kořene α odpovídá postupnému určení bodů Q_2, Q_3, ... na křivce f_1 (obr. 1 a 2). Případ prvý je znázorněn obrazem 1 a případ druhý obrazem 2.



Obr. 1.



Obr. 2.

Jako příklad vypočteme nejmenší kladný kořen rovnice

$$x \,.\, \sin x = 3{,}2568. \tag{10}$$

Uveďme ji na tvar

$$\sin x = \frac{3{,}2568}{x}. \tag{11}$$

Z grafického obrazu zcela hrubě „od oka" sestrojeného již vidíme, že hledaný kořen leží v okolí 390^0 ($\doteq 6{,}9$) a že derivace pravé strany je v jeho okolí značně menší než derivace strany levé. Klademe proto $x_1 \doteq 6{,}9$ a počítáme nejprve logaritmickým pravítkem

$$\sin x_2 = \frac{3{,}2568}{6{,}9} = 0{,}479, \qquad x_2 = 338^0\,40' \;(= 6{,}783)$$

a dále logaritmy

Log 3, 2568	0,51279	
— Log x_2	— 0,83142	
Log sin x_3 =	9,68137—10	
	21	.. $388^0\,41'$
P. P.	16 ...	$42''$

$$x_3 = 388^0\,41'\,42'' \;(= 6{,}78401).$$

$$\begin{array}{lll}
& \text{Log } 3{,}2568 & 0{,}5127\ 9109 \\
& -\text{Log } x_3 & -\ 0{,}8314\ 8072 \\
\hline
& \text{Log sin } x_4 & =\ 9{,}6813\ 1037-10 \\
& & \quad 0878\ \ldots\ 388^0\ 41'\ 20'' \\
\text{P. P.} & & \quad 159\ \ldots\ \qquad 5''\ 4 \\
& & x_4 = 388^0\ 41'\ 25''\ 4\ (=6{,}78393),
\end{array}$$

která hodnota je jistě správná na všech 5 deset. míst.

Kdybychom byli naproti tomu rovnici uvedli na tvar

$$x = \frac{3{,}2568}{\sin x},$$

byl by celý proces velmi rychle divergoval:

$$x_2 = \frac{3{,}2568}{\sin 390^0} = 6{,}5136\ (= 373^0\ 12'),$$

$$\begin{array}{lll}
& \text{Log } 3{,}2568 & 0{,}51279 \\
& -\text{Log sin } x_2 & -\ 9{,}35860 + 10 \\
\hline
& \text{Log } x_3 & =\ 1{,}15419 \\
& & \quad 12\ \ldots\ 14{,}26 \\
\text{P. P.} & & \quad 7\ \ldots\ \qquad 2 \\
& & x_3 = 14{,}262 \text{ atd.}
\end{array}$$

Při skutečném numerickém výpočtu ovšem zpravidla neznamená užití tvaru (2) žádných nebo jen velmi malých úspor práce proti tvaru (1). Hlavní jeho výhoda spočívá v úspoře práce spojené s převedením rovnice na tvar (2), proti práci spojené s převedením rovnice na tvar (1), v němž by v okolí kořene bylo $|f'(x)| < 1$. Tak na př. převedení rovnice (10) na tvar (11) provedeme snadněji a hrubým náčrtkem „od oka" ihned rozhodneme, do které strany třeba sblížené hodnoty dosazovati, nežli kdybychom chtěli rovnici (10) převáděti na tvar (1):

$$x = \text{arc sin} \frac{3{,}2568}{x}.$$

Uvedené zde řešení rovnic iteracemi ve tvaru (2) pochází od *R. Rosse* (*Nature*, sv. 78, 1908, str. 663) a uvádějí je též *Whittaker* a *Robinson* ve své knize *Calculus of Observations* (str. 81). Bohužel oba prameny neuvádějí vůbec důkazu konvergence sblížených hodnot, ba ani ne úplně d o s t a č u j í c í c h p o d m í n e k, za nichž jej lze provésti.

Sur la résolution des équations par des itérations.

(Extrait de l'article précédent.)

Pour résoudre l'équation (2), on trouve une première valeur approchée x_1 de la racine α et on calcule, ensuite, les valeurs de plus en plus approchées $x_2, x_3, \ldots$ au moyen des équations (3). L'auteur démontre que, les conditions (4) ayant lieu dans un certain domaine réel $a \ldots b$ contenant la racine à déterminer, les approximations successives (5) tendent vers la racine α de l'équation (2). Cette méthode, qui présente plusieurs avantages sur la méthode habituelle des itérations laquelle cherche à transformer l'équation donnée à la forme (1) (avec la condition $| f'(x) | < 1$), a été employée pour la première fois par M. R. Rosse (Nature, t. 78, p. 663), mais n'a pas été établie rigoureusement jusqu'à présent.