Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jiří Melichar

Sestrojení společných bodů dvou kuželoseček majících hlavní osy na téže přímce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 345--350

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121464`

sečíky těchto kolmic s příslušnými stranami leží na téže přímce. Necháme-li bod S splynouti s bodem O, tu obdržíme větu:

Spojíme-li libovolný bod S v rovině trojúhelníka s jeho vrcholy a vztyčíme-li v bodě tom kolmice na spojnice, pak protínají tyto příslušné strany v bodech, jež leží v přímce.

Sestrojení společných bodů dvou kuželoseček majících hlavní osy na téže přímce.

Napsal **Jan Melichar**, professor v Kroměříži.

Dvě kuželosečky, jejichž hlavní osy leží na téže přímce — nazveme ji X — protínají se ve čtyřech bodech tvořících dva páry bodů souměrně položených ku přímce X; spojnice těchto bodů jsou pak vždy dvě přímky reálné, ať už všechny čtyři body jsou reálné či imaginárné aneb dva reálné a dva imaginárné. Při sestrojení průsečných bodů obou kuželoseček jde tudíž napřed o tyto dvě spojnice resp. jejich body na přímce X, což jest úlohou 2. st., jiż lze řešiti pravítkem a kružítkem.

Je-li jednou z kuželoseček kružnice, lze vésti snadno kuželosečkou rotační plochu kuželovou (nebo válcovou) a kružnicí plochu kulovou o středu na ose prvé pomocné plochy, takže průsekem obou ploch pomocných jsou dvě kružnice, jejichž roviny protínají rovinu daných kuželoseček v hledaných spojnicích. (Niemtschik, Konstruktionen der Durchschnitte von Kreisen und Kegelschnitte, Sitzungsbericht der kais. Akademie in Wien 1869.)

Případ tento nelze řešiti methodou pro případy obecné, jež právě tu bude podána.

Mají-li dvě kuželosečky v rovině π hlavní osy na přímce X, veďme jednou z nich libovolnou pomocnou rotační plochu kuželovou (nebo válcovou) a druhou pak podobně plochu o ose rovnoběžné s osou první plochy, což lze obecně vždy učiniti při vhodné volbě první pomocné plochy. Obě plochy protínají se navzájem v křivce, jejíž průmět do roviny ν jdoucí přímkou

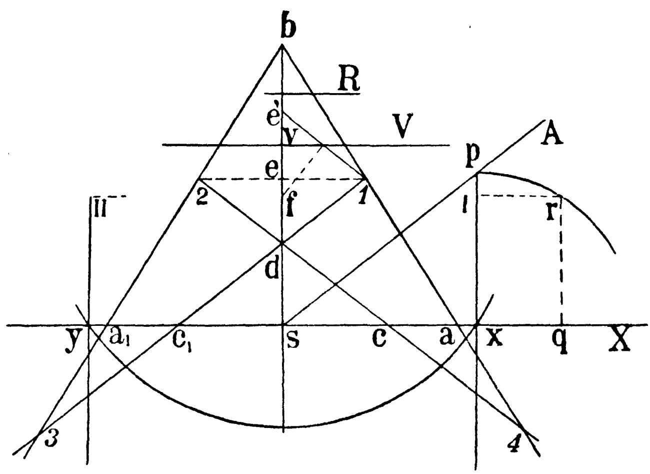
X kolmo ku π jest parabola P, jež protíná přímku X ve dvou bodech, jimiž procházejí spojnice hledaných bodů průsečných kolmo ku X. Parabola P určena je dostatečně čtyřmi body, v nichž protínají se oba páry povrchových přímek obou pomocných ploch kuželových ležící v rovině ν; kromě toho směr osy paráboly P udán jest kolmicí ku rovnoběžným osám obou ploch pomocných, takže jedna z parabol určených čtyřmi body je tím z úvahy vyloučena. Parabolu P určují tři vhodně ze čtyř zvolené body a směr osy, ježto jde o sestrojení jejích průsečných bodů s přímkou X, bude výhodno užíti kollineárného vztahu mezi touto parabolou a kružnicí sestrojenou nad spojnicí některých dvou bodů jakožto průměrem.

a) Je-li jednou z kuželoseček ellipsa a druhou kterákoliv kuželosečka, lze affinitou, jež této ellipse přiřazuje kružnici, převésti případ na jednodušší z obecného řešení vyloučený; jinak ovšem dalo by se tu užíti řešení právě popsaného s tou ještě výhodou, že ellipsou položíme plochu válcovou, bude-li však možno vésti tečnu rovnoběžnou s osou její ku kuželosečce ležící v rovině ν a mající za vrcholy ohniska druhé kuželosečky a za ohniska vrcholy její.

b) Jsou-li obě kuželosečky hyperboly, veďme každou z nich pomocnou plochu rotační o ose rovnoběžné s X, středy těchto ploch sklopené kolem přímky X do π jsou pak vrcholy imaginárních os. Konstrukce průsečných bodů paraboly P s přímkou X bude ukázána v případě *c*).

Jsou-li obě hyperboly zároveň soustředné o hlavních osách aa_1, cc_1 a vedlejších bb_1, cc_1 (obr. 1.), bude parabola P jdoucí body 1, 2, 3, 4 míti osu v přímce bd a vrchol v ve středu úsečky bd, ježto body b, d jsou dva sdružené póly, ohnisko její f určeno pak tečnou ku př. bodu 1, t. j. $1e'$, je-li $e'v = ev$. Přímka X seče parabolu fR, je-li R přímkou řídící, v bodech x, y, jimiž jdoucí kolmice ku X jsou spojnice hledaných bodů průsečných I, II, III, IV jakožto bodů jedné či druhé hyperboly.

c) Je-li jednou kuželosečkou *hyperbola* o osách aa_1, bb_1 (ohnisko f obr. 2.) a druhou *parabola* o vrcholu v a ohnisku f_1, veďme opět oběma čarami pomocné rot. plochy kuželové o osách rovnoběžných, na př., aby měly sklon k π 45°; je-li poloha jejich nevýhodná pro další konstrukce, zvolíme jejich směr jiný. Středy rotač. ploch kuželových jdoucích hyperbolou jsou na ellipse E v rovině ν o ohniskách aa_1 a vrcholu f; vrchol malé osy sklopené této ellipsy je pak b; sestrojme tečnu ellipsy E rovnoběžnou se spojnicí fb; její dotyčný bod o_1 — střed pomocné plochy rotační — bude na přímce so_1 rovnoběžné s b_1f a bude pak dle známé vlastnosti ellipsy so_1 přeponou trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky se.

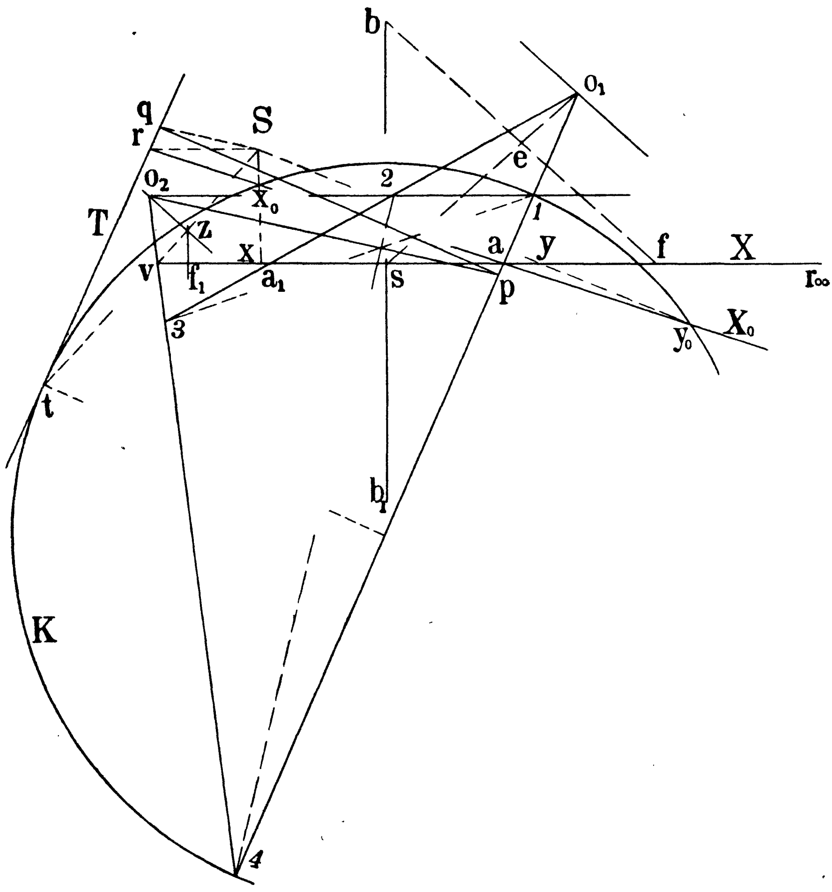


Obr. 1.

Středy rotač. ploch kuželových vedených parabolou (v, f_1) budou na parabole v rovině ν o vrcholu f_1 a ohnisku v; tečna její o_2z s dotyčným bodem o_2 rovnoběžná se spojnicí bf nalezena pomocí ohniska a tečny vrcholové f_1z známým způsobem, čímž nalezen střed i osa druhé pomocné plochy kuželové položené parabolou v f_1. Rovina π seče pak obě plochy kuželové ve čtyřech přímkách, jejichž sklopené polohy jsou o_1a_1, o_1a_1, o_2v_1, $o_2 1 \parallel X$.

Parabola P, určená průsečnými body 1, 2, 3, 4 těchto čtyř přímek, jest pak průmětem (sklopeným) vzajemného průseku obou pomocných ploch kuželových do roviny ν.

Kružnice K nad průměrem 14 je s parabolou *1234* v souvislosti perspektivní kollineace o ose *14*. Tečna T kružnice K rovnoběžná s osou je úběžnicí kollineace, jí odpovídající tečna



Obr. 2.

paraboly je nekonečně vzdálená přímka roviny ν, ježto dotyčný bod této udává směr osy paraboly, bude dotyčným bodem t kružnice vedená kolmice ku bf (či rovnoběžka ku vz) jedním paprskem kollineace. Druhý paprsek najdeme, uvážíme-li, že polára paraboly bodu o_1 jest diagonala o_2p, jíž kollineací přiřazená polára kružnice je pq kolmá ku ose. Průsečíku tečny T kružnice s touto polárou t. j. bodu q odpovídá nekonečně vzdálený bod poláry paraboly o_2p t. j. $qS \parallel o_2p$ jest druhým paprskem kollineačním, čímž v průsečíku obou získán střed kollineace S. Ku přímce X v soustavě paraboly najdeme nyní přiřazenou X_0 v soustavě kružnice, bod její na ose je a, druhému bodu přímky X nekonečně vzdálenému odpovídá bod r, $Sr \parallel X$; $X_0 = ar$; X_0 seče K v bodech $x_0 y_0$, jimž odpovídající body x, y jsou body hledaných spojnic průsečných bodů kolmých ku X. Hledané body jsou pak průsečné body těchto přímek buď s parabolou nebo hyperbolou.

d) Jsou-li *obě* kuželosečky *paraboly*, budou obě pomocné rotač. plochy kuželové jimi položené o osách rovnoběžných, ku př. nejlépe odchýlených od X o úhel 45°, shodné a tudíž jejich vzájemný průsek jest vedle nekonečně vzdálené kružnice ještě jedna kuželosečka v rovině kolmé ku ν; její průmět do ν bude při hořejší zmíněné volbě os úhlopříčnou obdélníka, jejíž průsečík s přímkou os X udá bod spojnice hledaných společných bodů; spojnice druhých dvou společných bodů je nekonečně vzdálená přímka roviny. Jednoduchý výsledek dá se tu snadno z obrazce (který pro jednoduchost jest vynechán) vyčísti: na vrcholovou tečnu každé paraboly naneseme délku parametru druhé paraboly směrem stejným, je-li stejný směr od vrcholu k ohnisku u obou parabol, směrem protivným, je-li směr vrcholu k ohnisku u obou parabol protivný; spojnice získaných takto koncových bodů na obou tečnách vrcholových seče přímku X v bodě, jímž jde kolmo ku X spojnice průsečných bodů.

e) Jsou-li dvě kuželosečky konfokální, zvolme libovolnou plochu kulovou, dotýkající se jejich roviny π v jednom ze společných ohnisek; obě kuželosečky jsou pak obrysy průmětu této plochy kulové ze středů, jež jsou průsečnými body obou tečen vedených z vrcholů hlavní osy obou kuželoseček k hlavní kružnici plochy kulové, ležící v rovině ν. Promítající plochy kuželové mají dvě společné tečné roviny a protínají se tudíž ve dvou kuželosečkách, jejichž roviny sekou π v hledaných spojnicích. Při konfokálních kuželosečkách středových najdeme ovšem jinak mnohem snadněji průsečné body pomocí průvodičů hledaných bodů, jsou-li tyto m, n, bude jejich součet roven hlavní ose ellipsy a rozdíl hlavní ose hyperboly; sečtením vychází, že jeden průvodič roven je polovičnímu součtu obou hlavních os a odečtením, že druhý rovná se polovičnímu rozdílu těchto os.

Při konfokálních parabolách budou patrně průsečné body jejich na přímce stejně vzdálené od obou přímek řídících.

Věstník literární.

Recense knih.

Oskar Perron, **Die Lehre von den Kettenbrüchen.** B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Svazek 36. Lipsko, 1913. Str. XII., 520.

Ačkoliv řetězové zlomky poskytují velmi důležitou pomůcku pro vyšetřování číselně theoretická a k analyse — a i pro praktické úkoly početní mají značný význam — nebylo dosud učebnice, která by výhradně tímto oborem mathematiky se byla zabývala, nehledíme-li ovšem ke starším pracím *Sternovým*. Kniha Perronova klade si za účel vyplniti tuto mezeru, a nelze pochybovati, že z různých důvodů bude pracovníkům mathematickým užitečnou pomůckou.

Celé dílo z pochopitelných příčin rozděleno jest na dvě části. Prvá věnována jest elementárně-arithmetickým vlastnostem řetězců a vztahům ku číselné theorii, druhá část vztahuje se ku analysi a funkční theorii.

V první části zejména se vyšetřují t. zv. pravidelné řetězce, t. j. řetězce tvaru

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou celá kladná čísla; pak věty approximační, týkající se těchto řetězců, dále pravidelné řetězce periodické