Nahraďme nyní kružnici libovolnou křivkou C. V trojúhelníku $z\xi\xi'$ platí věta

$$\varrho : ds = \sin(\vartheta - \psi) : \sin d\psi.$$

Dále přesvědčíme se snadno, že

$$\sin(\vartheta - \psi) = -\frac{\partial \varrho}{\partial n},$$

tak že obdržíme

$$d\vartheta = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial n} ds = \frac{\partial \log \frac{1}{\varrho}}{\partial n} ds.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do integrálu

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(R, \psi)\, d\vartheta,$$

zamění se týž na

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(R, \psi) \frac{\partial \log \frac{1}{\varrho}}{\partial n} ds, \tag{8}$$

čímž opět vedeni jsme k funkci *Greena*.

Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček.

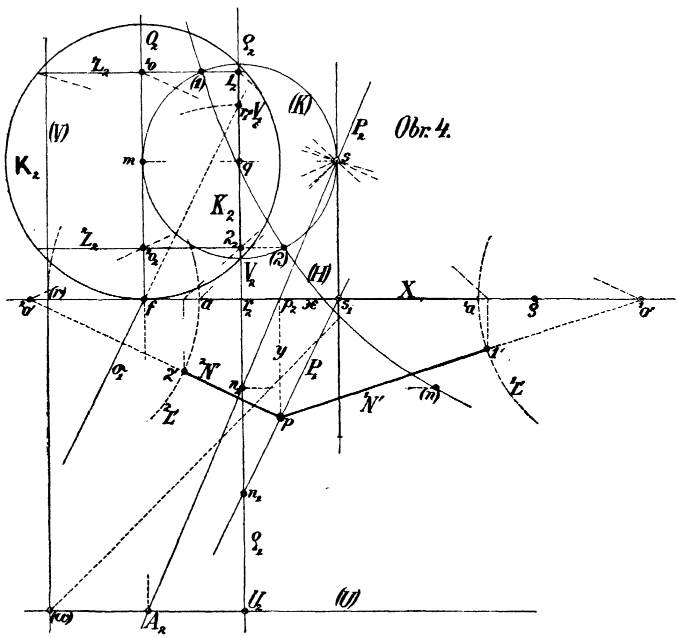
Napsal **Josef Klíma**, assistent české techniky.

(Dokončení.)

Hyperbola.

Budiž dána nevyrýsovaná hyperbola (obr. 4.) o hlavní ose $\overline{a^1a} = 2a$, ohniska jsou f a g, $\overline{fg} = 2e$, vedlejší poloosa označena b.

Hyperbolou nemožno proložiti rotační válec, i proložme jí kužel rotační o vrcholu s ($\overline{ss_1} \perp \overline{a^1a}$, s_1 střed dané hyperboly a $\overline{ss_1} = b$). Kužel tento dotýká se plochy kulové **K** dotýkající se půdorysny v ohnisku f a mající poloměr $= b$, podél kružnice K v rovině ϱ kolmé k oběma průmětnám. Stejnou úvahou jako při ellipse jeví se nám normály dané hyperboly jako vržené stíny površek přímého kruhového konoidu (K, O, π), kde O je opět svislý průměr plochy kulové **K**, ovšem pro centrálné osvětlení z bodu s. Evoluta hyperboly je tedy mezí vrženého stínu



Obr. 4.

konoidu toho na půdorysnu pro bod svítící s. Jako při ellipse daly by se z tohoto odvoditi některé vztahy, avšak přistupme hned k řešení problému normál pro libovolný bod p roviny hyperboly. Bodem tím prochází určitý světelný paprsek $P \equiv \overline{sp}$ a hledané normály bodu p budou vrženými centrálními stíny oněch površek konoidu, jež protínají tento paprsek. Jedná se tudíž opět o průsečíky přímky P s konoidem čtvrtého stupně, obecně tedy opět 4 řešení. Stejně jako při ellipse určíme si přímkami O a P a půdorysnou π hyperb. paraboloid a určíme jeho hyperbolický řez s rovinou ϱ. Roviny řídící tohoto jsou půdorysna a rovina σ kolmá k této, rovnoběžná s přímkou P. Sestrojena površka A hyp. paraboloidu rovnoběžna s ϱ a proložena jí rovina rovnoběžná s π, jež protíná rovinu ϱ a asymptotě U průsečné hyperboly H. Přímka druhé soustavy rovnoběžná s ϱ je patrně řídící přímka O sama a jí proložená rovina σ protíná ϱ v druhé asymptotě V, i je $U \perp V$, čili hyperbola H je rovnoosou a určena ještě ku př. bodem n, průsečíkem to přímky P s ϱ. Průsečíky této s kružnicí K sestrojeny sklopením ϱ do nárysny, K přejde v (K), hyperbola rovnoosá H v (H) o asymptotách (U) a (V). Tyto protínají se v našem případě ve dvou reálných bodech (1) a (2), k nimž odvozeny nárysy 1_2 a 2_2 a příslušné kružnice ${}^1L$ a ${}^2L$ o středech ${}^1o$ a ${}^2o$. Centrálné vržené stíny z s na půdorysnu ${}^1o'$ a ${}^2o'$ jsou body hledaných normál na hlavní ose a k vůli zjištění správnosti rýsování odvozeny též jich paty $1'$ a $2'$, takže dostáváme normály ${}^1N' \equiv \overline{p1'{}^1o'}$ a ${}^2N' \equiv \overline{p2'{}^2o'}$. Z hyperboly (H) třeba jen vyrýsovati onu část, v níž leží kružnice (K). K řešení dané bikvadratické úlohy třeba opět rýsovati jen jedinou kuželosečku (H).

Stanovme opět, kdy úloha naše rozpadá se ve dvě kvadratické, a netřeba rýsovati žádné kuželosečky. Nastane to opět, když střed q kružnice (K) padne na osu hyperboly (H) a kdy průsečíky obou lze určiti dle obr. 3. Každému bodu v rovině dané hyperboly odpovídá určitý při konstrukci užitý hyp. paraboloid a všechny tyto mají společnou rovinu řídící π a řídící přímku O. Druhá rovina řídící je vždy kolma k π (ježto $O \perp \pi$) a tedy průsečnice jich s rovinou ϱ kolmou k ose $\overline{a^1a}$ jsou dvě přímky k sobě kolmé, čili průsečné křivky paraboloidů těch s ϱ jsou rovnoosé hyperboly. By střed q kružnice (K) padl na osu oné rovnoosé hyperboly, musí vzdálenosti jeho od asymptot (U) a (V) býti stejné. Označme si opět souřadnice bodu p

$$\overline{s_1p_2} = x \text{ a } \overline{p_2p} = y.$$

Ježto

$$\overline{fr_1} \equiv \sigma_1 \,||\, \overline{ps_1} \equiv P_1,$$

plyne

$$\Delta\, s_1p_2p_1 \sim \Delta\, fr_2r_1$$

a tudíž

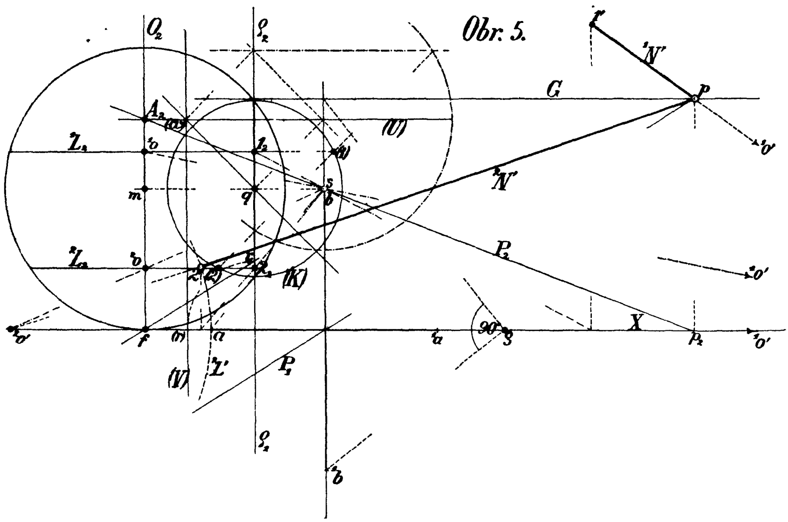
$$x : y = \overline{r_2f} : \overline{r_2r_1}. \tag{3}$$

Jelikož též

$$\Delta\, p_2 s_1 s \sim \Delta\, s m A_2,$$

je

$$x : b = e : \overline{mA_2}. \tag{4}$$



Avšak délky $\overline{r_2 r_1}$ a $\overline{mA_2}$ udávají nám vzdálenosti středu q od asymptot (U) a (V) a ty mají býti sobě rovny. Tudíž vzhledem k

$$\overline{r_2 r_1} = \overline{mA_2}$$

dostaneme dělením úměr (3) a (4)

$$1 : \frac{y}{b} = \frac{\overline{r_2 f}}{e} : 1.$$

Avšak $\overline{r_2 f}$ je vzdálenost přímky řídící $\varrho_1 \equiv \varrho_2$ hyperboly dané od ohniska f, a tu víme, že

$$\overline{r_2 f} = \frac{b^2}{e}$$

jak snadno lze též z obrazce odvoditi. Dosazením vychází

$$y = \frac{b\, .\, e}{\frac{b^2}{e}} = \frac{e^2}{b}.$$

Tudíž platí věta:

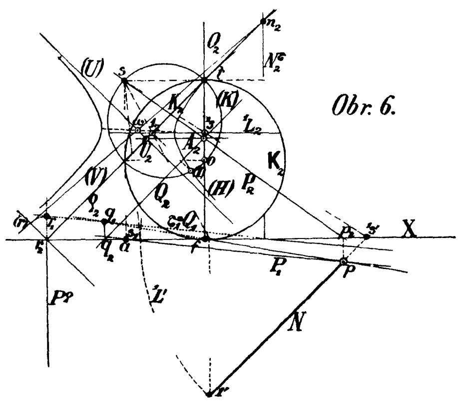
„*Při hyperbole dá se provésti problém normál použitím jen pravítka a kružítka pro body dvou přímek rovnoběžných s hlavní osou a vzdálených od této o délku* $\frac{e^2}{b}$.“

Výsledek, jejž analyticky odvodili dv. r. Mertens, Lauermann a cestou synthetickou p. prof. Sobotka.

V obr. 5. proveden případ tento, konstrukce všechny vyznačeny, takže netřeba k obrazci slov.

Parabola.

Poměrně nejméně výhod skýtá naše prostorová interpretace problému normál při parabole. Avšak k úplnosti budiž i ta uvedena.



Obr. 6.

Mějmež parabolu nevyrýsovánu (obr. 6.) o vrcholu a a ohnisku f. Touto nelze proložiti rotační válec, a proto zvolme kužel rotační o vrcholu s opsaný ploše kulové **K** dotýkající se půdorysny (roviny to dané paraboly) v ohnisku f a mající poloměr $\overline{of} = \overline{fa} = \frac{p}{2}$ (p parametr paraboly). Kužel ten dotýká se koule **K** podél kružnice K v rovině ϱ kolmé k nárysně, jež zvolena jako dříve. Normály paraboly jeví se jako vržené stíny površek přímého kruhového konoidu (O, K, π), jenž tentokrát je stupně třetího, ježto řídící přímka O protíná řídící kružnici K

v bodě t, jehož vrženým stínem z bodu s na půdorysnu je nekonečně vzdálený bod paraboly dané. K stanovení normál paraboly jdoucí bodem p postupujeme jako dříve. Třeba určiti průsečíky paprsku $P \equiv \overline{sp}$ s naším konoidem. Přímkami O, P a půdorysnou π co útvary řídícími určen hyp. paraboloid a stanoven řez tohoto s rovinou ϱ řídící kružnice K. Určeny površky hyp. paraboloidu A a Q různých osnov rovnoběžné s rovinou ϱ, jimi proloženy roviny rovnoběžné s příslušnými rovinami řídícími, z nichž druhá patrně kolma k půdorysně a rovnoběžna s P_1 a průsečnice jich s ϱ dají asymptoty U a V hyperboly H. Rovina ϱ sklopena do nárysny, tím obdržíme (K) a (H), z nichž poslední dána asymptotami (U) a (V) a bodem t, z čehož určíme snadno osy a hyperbolu tu vyrýsujeme. Hyperbola tato protíná (K) obecně v dalších třech bodech, z nichž dva mohou býti sdruženě imaginárné. K těmto jako v předchozích případech zobrazíme nárysy a pak odpovědné normály jdoucí bodem p k dané parabole. V obr. vychází jen jedna reálná. Vidíme z tohoto postupu, že bodem procházejí k parabole 3 normály, z nichž dvě mohou býti imaginární. Patrně čtvrtá normála z bodu p má za patu nekonečně vzdálený bod paraboly, odpovídající průsečíku t, ovšem tato normála se opomíjí.

Konstrukce tato pro parabolu nemá výhodnosti, pro tuto nejlépe sestrojí se paty hledaných normál Joachimsthalovou kružnicí, jež prochází vrcholem paraboly a střed její má souřadnice $\frac{x+p}{2}$, $\frac{y}{4}$, jsou-li x a y souřadnice bodu p vzhledem k osám určeným osou paraboly a vrcholovou její tečnou.

Hyperbola (H) není tu rovnostranná, mění-li bod p polohu, dostáváme jinou hyperbolu a všechny mají směr jedné asymptoty, t. j. kolmý k ϱ_2 a bod t společný. Problém normál stává se tu kvadratickým pro body každé normály, jak odvozuje *Schoute*. Což očividné, v našem řešení má pak hyperbola (H) s kružnicí (K) dva známé průsečíky a tu zbývající dva dají se odvodit kvadraticky použitím jen kružítka a pravítka.

V Praze, dne 15. ledna 1912.