Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Obecná poučka o funkcích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 2, 142–143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123470

Obecná poučka o funkcích.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

V lonském ročníku časopisu „Nouvelles annales de mathématiques" pag. 469 podává pan *Moret-Blanc* důkaz následujícího theoremu:

Budiž $f(x)$ libovolná, v mezích od a do x konečná a spojitá funkce. Mezi a a x vložme $(n-1)$ člen řady geometrické

$$a\sqrt[n]{\frac{x}{a}},\quad a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2},\quad \ldots\quad a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$$

a označme Mg arithmetický průměr hodnot

$$f(a),\ f\left[a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right],\ \ldots\ f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right],\ f(x).$$

Dále vložme $(n-1)$ člen řady arithmetické

$$a+\frac{x-a}{n},\ a+\frac{2(x-a)}{n},\ \ldots\ a+(n-1)\frac{x-a}{n}$$

mezi a a x a budiž Ma arithmetický průměr hodnot

$$\frac{f(a)}{a},\ \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}},\ \ldots\ldots\ \frac{f\left(a+(n-1)\frac{x-a}{n}\right)}{a+(n-1)\frac{x-a}{n}},\ \frac{f(x)}{x}$$

Pro $n=\infty$ jest pak

$$lim\,\frac{Ma}{Mg}=\frac{l\,\frac{x}{a}}{x-a}.$$

kterýžto výraz nezávisí na tvaru funkce f.

Podáváme tuto důkaz jiný, kratší a jednodušší.

Položme $\frac{x-a}{n}=\Delta x$,

$$\frac{x-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{f\left(a+k\frac{x-a}{n}\right)}{a+k\frac{x-a}{n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(a+k\Delta x)}{a+k\Delta x}\Delta x=J,$$

dále

$$\frac{x}{a}=b,\quad \frac{1}{n}=\Delta_1 x,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\,(ab^{k\Delta_1 x})\,\Delta_1 x = J_1\ ;$$

pak bude patrně

$$Ma = \frac{J}{(n+1)\,\Delta x} = \frac{n\,J}{(n+1)\,(x-a)},$$

$$Mg = \frac{J_1}{(n+1)\,\Delta_1 x} = \frac{n\,J_1}{n+1},$$

a tudíž dělíme-li,

$$\frac{Ma}{Mg} = \frac{J}{(x-a)\,J_1}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $n = \infty$, obdržíme

$$lim\,J = \int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi,\ lim\,J_1 = \int_0^1 f(-ab^{\xi})\,d\,\xi$$

a zavedením nové proměnné $\eta = -ab^{\xi}$ do posledního integrálu,

$$lim\,J_1 = \frac{1}{lb}\int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta}\,d\eta.$$

Z toho následuje konečně

$$lim\,\frac{Ma}{Mg}\ lim = \frac{J}{(x-a)\,J_1} = \frac{lb\displaystyle\int_a^x \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi}{(x-a)\displaystyle\int_a^x \frac{f(\eta)}{\eta}\,d\eta} = \frac{l\,\frac{x}{a}}{x-a},$$

což bylo dokázati.
