Über »Symmetrieen«, welche gegenüber »Symmetrie«. invariant sind.

Artur Winternitz, Prag.

Wir machen eine Relation zwischen drei Punkten zum Fundamentalbegriff der Geometrie, die wir als ,,Symmetrie eines Punktepaares PP' in Bezug auf einen Punkt O (an O)" bezeichnen. Wir fordern, daß je zwei — nicht zu weit auseinander liegende — Punkte P, P' einen und nur einen Punkt O so bestimmen, daß die Relation erfüllt ist: ,,Mittelpunkt" $O = m\,(P, P') = m\,(P', P)$; ebenso sollen P und O eindeutig P' bestimmen: ,,Spiegelung" $P' = \mathrm{f}(P, O)$. Es sei $O = m\,(O, O)$. Zwei Mannigfaltigkeiten, in welchen eine bestimmte Symmetrie-Definition gegeben ist, schreiben wir dieselbe Struktur zu, wenn sie ein-eindeutig und stetig so aufeinander abgebildet werden können, daß das Bestehen der Relation zwischen drei Punkten in der einen von ihnen das Bestehen der Relation zwischen den Bildpunkten in der anderen nach sich zieht.

Ich stelle mir nun die Aufgabe, alle solchen Strukturen (Geometrieen) zu ermitteln, welche die folgende weitere Forderung erfüllen: Symmetrie eines Punktepaares MN in Bezug auf den Punkt P zieht vermöge der Symmetrie an einen beliebigen Punkt O Symmetrie des entsprechenden Punktepaares $M'N'$ in Bezug auf den entsprechenden Punkt P' nach sich.

$$\mathrm{f}\,[\mathrm{f}(M, O).\ \mathrm{f}(P, O)] = \mathrm{f}\,[\mathrm{f}(M, P), O].$$

Diese Frage wird unter Zuhilfenahme von Differenzierbarkeits-Annahmen in Bezug auf die Funktionen f beantwortet. Zunächst gelingt es, ,,gerade" Linien mit affinem Parameter zu erklären. Dann wird gezeigt, daß eine affin-zusammenhängende Mannigfaltigkeit im Sinne von Weyl vorliegt, deren Krümmungstensor bei Parallelverschiebung erhalten bleibt. Dies führt zu dem Fundamentalsatz, daß die Struktur einer derartigen Geometrie auf die affine Klassifikation eines konstanten Tensors $K^s{}_{i[jk]}$ zurückführbar ist, der folgendem System von linearen und quadratischen Gleichungen genügt:

$$K^s{}_{i[kj]} = -K^s{}_{i[jk]};\quad K^s{}_{i[jk]} + K^s{}_{j[ki]} + K^s{}_{k[ij]} = 0,$$
$$K^s{}_{*[lm]}K^*{}_{i[hk]} - K^s{}_{*[hk]}K^*{}_{i[lm]} - K^s{}_{i[*k]}K^*{}_{h[lm]} - K^s{}_{i[h*]}K^*{}_{k[lm]} = 0.$$

(* bezeichnet einen Index, über den von 1 bis n zu summieren ist.) Zu jedem derartigen Konstanten-System findet man durch Integration eine Definition der Symmetrie, welche in einem n-dimensionalen Raumstück den aufgestellten Axiomen genügt.[1])

[1]) Von Weyl'schen Räumen, deren Krümmungstensor bei Parallelverschiebung erhalten bleibt, spricht auch Cartan, der sie mit der Gruppentheorie in einen engen Zusammenhang gebracht hat (Journal de Math.

Das übrig bleibende algebraische Problem wird nun für $n = 2$ und $n = 3$ gelöst. Es ergeben sich in zwei Dimensionen sechs Typen, in drei Dimensionen 17 einzelne und ein Kontinuum von Typen, welches durch die Kreislinie darstellbar ist. Die Integration lehrt: Alle Strukturen lassen sich algebraisch (oder logarithmisch) realisieren. In zwei Dimensionen ergeben sich ausschließlich die bekannten Geometrien von konstantem Krümmungsmaß und Grenzfälle derselben. In drei Dimensionen treten ganz neue Geometrie hinzu.

Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst.

série 9, tome 6, p. 1—120, chap. IV, § 77—85, 1927) und alle diejenigen unter ihnen bestimmt hat, welche Riemann'sche Räume sind. (Bull. Soc. Math. tome 54, p. 214—264 [1926], tome 55, p. 114—134 [1927].)