Václav Hübner

Poznámka ku sestrojení stop roviny určené odchylkami $alpha, beta$ od průměten

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 331--334

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123978`

$$\overline{b'_1 u'} = s \cos \alpha, \quad u' v_1 = 0, \quad \overline{a'_1 u'} = \frac{s \cos \alpha}{2},$$

tudíž

$$p = \frac{1}{\cos \alpha}\left[\frac{\pi s^2 \cos^2 \alpha}{4} + \frac{1}{3}\left\{\frac{s \cos \alpha}{2}\sqrt{2}\left(\frac{3s \cos \alpha \sqrt{2}}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - s \cos \alpha (2 + \sqrt{2})\right) + 2s^2 \cos \alpha^2\right\}\right].$$

Provedeme-li naznačené výkony, obdržíme

$$p = \frac{s^2 \cos \alpha}{12} (3\pi + 10 - 4\sqrt{2});$$

hledaný poměr jest tedy

$$p : \Pi = \frac{s^2 \cos \alpha}{12} (3\pi + 10 - 4\sqrt{2}) : \pi s^2 \cos \alpha$$

(Π značí plášť celého kužele), nebo

$$p : \Pi = (3\pi + 10 - 3\sqrt{2}) : 12\pi.$$

Béřeme-li přibližně

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \sqrt{2} = 1{\cdot}414,$$

jest

$$p : \Pi = 4 : 11.$$

Poznámka ku sestrojení stop roviny určené odchylkami α, β od průměten.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

V Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XX., byla úloha ta řešena obecně, jsou-li dány odchylky α, β od průměten π, ν.

Zajímavý jest případ, jenž plyne z onoho obecného řešení, když totiž odchylky α, β mají určitou hodnotu, jak při úlohách v deskriptivní geometrii bývá užíváno.

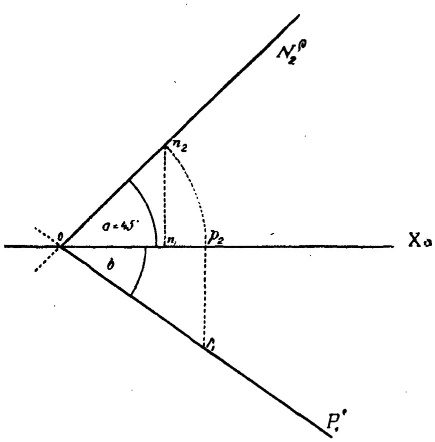
Jak známo, stopy N^{ϱ}, P^{ϱ} roviny ϱ určují s osou X trojhran, v němž jest úhel stěnový při ose X pravý. Je-li

$$\sphericalangle N^{\varrho} X = a, \quad \sphericalangle P^{\varrho} X = b, \quad (\gamma = 90^0),$$

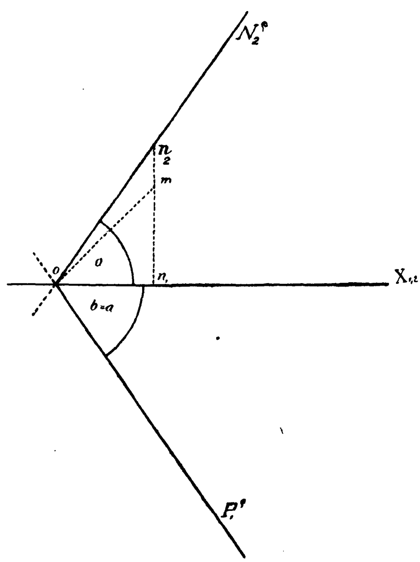
jest ze sférického trojúhelníka pravoúhlého

$$(1) \qquad \cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta},$$

$$(2) \qquad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$



Obr. 1.



Obr. 2.

při čemž pro možnost roviny platí

$$\alpha + \beta \gtreqqless 90^0.$$

I. Budiž

$$\alpha = 60^0, \quad \beta = 45^0;$$

z rovnice (1) jest

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sphericalangle N_3^{\varrho} X = 45^0$$

a z rovnice (2)

$$\cos b = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ježto

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b}}{\cos b},$$

jest

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

čili

$$\operatorname{tg} b = \cos a.$$

Z obrazce 1. poznáváme sestrojení úhlu $b = \sphericalangle P^{\varrho} X$; jest totiž

$$\cos a = \frac{\overline{on_1}}{\overline{on_2}} = \operatorname{tg} b, \quad \overline{op_2} = \overline{on_2}, \quad \overline{p_2 p_1} = \overline{on_1}.$$

Pouhou záměnou řeší se případ, když

$$\alpha = 45^0, \quad \beta = 60^0.$$

II. Je-li $\alpha = \beta$, jest, jak známo, $a = b$.

Dáno-li na př.

$$\alpha = \beta = 60^0,$$

vypočítáme

$$\cos a = \cos b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

čili

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} b = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

tudíž

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} b = \cos 45^0.$$

Řešení tohoto případu jest vidno z obr. 2. Jest tu

$$\overline{on_1} = \overline{n_1 m}\,,\quad (\sphericalangle\, n_1\, om = 45^0),\quad \overline{n_1 n_2} = \overline{om}.$$

III. Je-li

$$\begin{Bmatrix} \alpha = \beta = 45^0 \\ \alpha = 60^0,\ \beta = 30^0 \end{Bmatrix}$$

obecně pro

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

jest

$$\cos a = 1, \quad \cos b = 1,$$

tudíž

$$a = b = 0.$$

Stopy hledané roviny jsou buď v ose X nebo s osou X rovnoběžné (rovina ϱ jest kolmá ku třetí průmětně hlavní).

Připomenutí. Jak z deskriptivní geometrie jest známo, jsou možné 4 roviny, které svírají odchylky α, β s průmětnami π, ν.

Z rovnice (1) a (2) poznáváme, že při ostrých úhlech α, β jest $\cos a$ a $\cos b$ kladný; poněvadž

$$\cos(-a) = \cos a,$$

vyhovují tudíž rovnicím (1) a (2) tyto úhly:

$$\begin{array}{ll} 1) & a,\ b, \\ 2) & -a,\ b, \\ 3) & a,\ -b, \\ 4) & -a,\ -b. \end{array}$$

Příslušnými konstrukcemi lze se o těchto 4 případech přesvědčiti.