Kybernetika

Antonín Špaček

Jak je třeba budovat teorii automatického řízení na statistickém základě

Kybernetika, Vol. 1 (1965), No. 5, (379)--398

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124309

KYBERNETIKA ČÍSLO 5, ROČNÍK 1/1965

Jak je třeba budovat teorii automatického řízení na statistickém základě

ANTONÍN ŠPAČEK

Předkládaný článek je jednou z posledních prací člena korespondenta dr. A. Špačka, jednoho z prvních propagátorů kybernetiky v Československu. Časopis „Kybernetika" vzpomíná uveřejněním tohoto článku čtvrtého výročí předčasné smrti dr. A. Špačka, který zemřel dne 24. října 1961 ve věku 50 let.

Článek, který nebyl v původní předkládané formě určen přímo k publikaci, obsahuje rozbor a přístup k řešení problémů teorie automatického řízení na základě pravděpodobnostních metod. Hlavní důraz se klade na srozumitelné vysvětlení základních pojmů statistické teorie řízení spíše z hlediska obsahového než z hlediska formálně matematického. Přesto je článek psán s velkou matematickou přesností, kterou dr. Špaček vždy vyžadoval i u popularizačních článků, a je psán tak, aby vysvětlení základních pojmů bylo obsahově jasné a srozumitelné i těm, kteří nejsou specialisty v teorii pravděpodobnosti.

Podobně zaměřené popularizační články chtěl dr. A. Špaček napsat též o pravděpodobnostní funkcionální analýze, o statistickém rozhodování a o teorii informace se zaměřením na řešení technických problémů Bohužel, jeho předčasná smrt mu nedovolila realizovat tyto plány.

Od napsání článku uběhlo již několik let. Nicméně i dnes zůstává článek aktuální a proto jej předkládáme na stránkách našeho časopisu, aby se s ním mohla seznámit širší odborná veřejnost. Článek může sloužit nejen technikům pracujícím v automatizaci, nýbrž i matematikům a statistikům jako podklad pro další rozvoj a rozpracování metod v obou směrech, jak v teorii automatického řízení, tak i v teorii pravděpodobnosti.

Při konstrukci složitých strojů a výrobních zařízení se obvykle na každém stupni vývoje techniky vychází ze zjednodušených představ o jejich činnosti a tím se stává, že tato zařízení fungují v praxi poněkud jinak – a to obvykle hůře – než se očekávalo. Stroje a výrobní zařízení totiž kromě poslání, jemuž mají sloužit, jsou také zdroji vnitřních poruch, které jejich normální činnost zhoršují, avšak mohou ji v krajním případě ohrozit, po případě také znemožnit. Situace se stane ještě komplikovanější, když uvažujeme výrobní proces jako celek. Tady se totiž k vlivům nedokonalé činnosti strojů přidružují ještě vlivy kolísání vlastností surovin a jejich zpracování na vlastnosti výrobků a pod.

Souhrn všech těchto nepříznivých okolností dává podnět k úvahám o radikálním řešení situace. Samo od sebe se tu nabízí uplatnění principu samočinného řízení.

Princip automatického řízení je v podstatě tak starý jako používání strojů ve výrobním procesu, avšak jeho využití v praxi je obvykle záležitostí velmi komplikovanou. Důvodů k tomu je celá řada. Tak např. často ani nevíme, na kterém místě výrobního postupu poruchy vznikají. Avšak i když se podaří jednotlivé poruchy lokalizovat, nastává obvykle jiná potíž, že tato místa nejsou přístupna vnějším zásahům. Je proto nutné provádět zásahy na místech přístupných a kompenzovat tím vlivy poruch vznikajících na místech nepřístupných. Zhruba řečeno, většinou je třeba podněty pro tyto zásahy odvozovat z vhodných veličin na konci výrobního procesu a samotné zásahy provádět někde na začátku výrobního procesu. Není nikterak překvapující, že zásah provedený v určitém okamžiku na začátku výrobního procesu se projeví na jeho konci až za nějakou dobu, kterou obvykle nelze zanedbat. Toto zpoždění spolu se skutečností, že časový průběh veličiny, ze které odvozujeme řídicí signál, je nepravidelný a nelze jej přesně předpovědět, je i v jednoduchých případech kritickým bodem teorie automatického řízení.

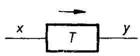
Řekneme-li, že časový průběh nějaké veličiny je nepravidelný, neznamená to ještě, že jeho sledování neposkytuje žádné informace o jeho průběhu v budoucnosti. Procesy vznikající v různých technických zařízeních jako nežádoucí zjevy mají kromě na pohled patrného nepravidelného průběhu stabilní pravděpodobnostní vlastnosti, které již nejsou na první pohled tak nápadné. Pro tuto stabilitu existují hluboké fyzikální důvody a formálním vyjádřením této stability je právě platnost zákonů velkých čísel. Šíření poruch od vnitřních zdrojů až k místům, kde se nepříznivým způsobem projevují, jakož i superpozice poruch z různých zdrojů podléhají zákonům mechaniky a elektrodynamiky, které v podstatě také určují pravděpodobnostní charakter výsledného náhodného procesu. Zhruba lze říci, že čím větší hmoty a kapacity jsou zúčastněny při šíření poruch, tím větší je závislost mezi dvěma časově posunutými hodnotami výsledného náhodného procesu a odtud již není daleko k myšlence, že by bylo možno využít této stochastické závislosti k předpovídání budoucích hodnot takových náhodných procesů. Naproti tomu skutečnost, že existuje způsob predikce který je podle daného kritéria optimální a že jej lze technicky realizovat, je dalekosáhlým vědeckým objevem posledních třiceti let. Vztah mezi otázkami predikce a otázkami automatického řízení je v hrubých rysech zcela názorný. Optimální predikce totiž zaručuje, že zpožděný účinek řízení ztratí co nejméně na aktuálnosti pro kompenzaci poruchy.

Klasická teorie predikce a z ní odvozená statistická teorie automatického řízení poskytuje výsledky, jejichž využití v praxi předpokládá znalost pravděpodobnostních vlastností náhodného procesu představujícího časový průběh poruchové veličiny, nebo aspoň znalost příslušné korelační funkce nebo spektra. Naproti tomu využití principu adaptivní predikce a adaptivního řízení nevyžaduje při aplikaci téměř žádných apriorních znalostí o náhodném procesu. Tato nesporná výhoda je však dosti draze vykoupena jednak matematickými obtížemi při rozvíjení příslušné teorie, jednak komplikovaností prostředků realizace. Základní myšlenka adaptivní predikce a adaptivního řízení je velmi prostá. Zhruba řečeno, místo pravděpodobnostních vlastností náhodného procesu, které jsou k dispozici v klasickém případě, se v každém časovém okamžiku spokojíme s jejich dodatečným statistickým odhadem a operaci predikce resp. řízení postupně přizpůsobujeme těmto odhadům. Platnost zákonů velkých čísel nám za vhodných podmínek zaručí, že při stejném kritériu optimality a po uplynutí dostatečně dlouhé doby je adaptivní predikce stejně dobrá jako predikce klasická a adaptivní řízení je stejně dobré jako řízení klasické.

1. OBJEKTY BEZ VNITŘNÍCH PORUCH

Objekty a s nimi spojené soustavy pro jejich automatické řízení mívají v praxi obvykle velmi složitou strukturu. Aby v této komplikovanosti nezaniklo pro nás principiálně důležité statistické hledisko, zjednodušíme si náš problém aspoň tím,

Obr. 1.



že budeme uvažovat objekty s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou, což se obvykle schematicky znázorňuje podle obr. 1.

Uvidíme však, že taková zjednodušení v mnoha praktických případech není příliš přehnané.

Poměrně velmi jednoduché vlastnosti mají právě objekty bez vnitřních zdrojů poruch, které v tomto smyslu jsou idealizací objektů skutečných. Budeme je jednoduše charakterizovat pomocí funkcionálních transformací. Aby nedocházelo k nedorozumění, učiníme jednou pro vždy úmluvu, že symboly x, y, z, u budou znamenat reálné funkce nezáporného argumentu t, který budeme interpretovat jako čas, zatím co např. $x(t)$ bude znamenat hodnotu funkce x pro danou hodnotu argumentu t. Připomeňme, že rozlišování mezi funkcemi a funkčními hodnotami není zbytečné.

Objekt na obr. 1. funguje tak, že každé funkci x, která se může objevit na vstupu, je jednoznačně přiřazena funkce $y = T(x)$ na výstupu. Rčení „která se může objevit na vstupu“ v podstatě znamená, že jsme vymezili obor X těch funkcí x nezáporného argumentu, které v daném konkretním případě chceme vzít v úvahu. Obvykle tvoří obor X takové funkce, které mají nějaký vhodný „stupeň hladkosti“, jako jsou např. spojité funkce, funkce neomezeně diferencovatelné apod. Dále je vhodné zvolit obor X tak, aby i funkce na výstupu objektu do něho náležely, tj. aby každé funkci x z oboru X byla jednoznačně přiřazena funkce $y = T(x)$ z téhož oboru X. Za těchto podmínek je činnost soustavy popsána transformací oboru X do sebe. Šipka na obr. 1 slouží k rozlišení argumentu x od hodnoty transformace $T(x) = y$.

Jako názorný příklad uvedeme objekt popsaný transformací T, která každé funkci x přiřazuje funkci $y = T(x)$ tak, že

$$y(t) = x(t - \tau)$$

pro $t \geqq \tau$ a $y(t) = 0$ pro $0 \leqq t < \tau$. Objekt popsaný takovou transformací T nazýváme zpožďovací linkou. Zpožďovací linka je určena nezáporným číslem τ, které nazýváme zpožděním. Pro naše účely je vhodné, když vymezíme obor X tak, aby obsahoval všechny funkce x, které splňují podmínku

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^2(s)\, \mathrm{d}s < \infty . \tag{1}$$

Tento obor tvoří tzv. lineární prostor, což znamená, že když funkce x patří do oboru X a c je libovolné reálné číslo, pak také funkce cx patří do oboru X, a dále když funkce x_1 a x_2 patří do oboru X, pak také jejich součet $x_1 + x_2$ patří do oboru X. Snadno se verifikuje, že transformace T, popisující zpožďovací linku, převádí obor X do sebe, je aditivní, tj. pro libovolné dvě funkce x_1, x_2 z oboru X platí

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2),$$

a je homogenní, tj. když funkce x je z oboru X a c je libovolné reálné číslo, pak

$$T(cx) = c\, T(x).$$

Speciálně platí

$$T(0) = 0, \tag{2}$$

tj. transformace T přiřazuje funkci identicky rovné nule zase funkci identicky rovnou nule. Je tedy zpožďovací linka objekt pasivní v tom smyslu, že „ponechán sám o sobě“, nedělá nic, tj. vyrábí funkci identicky rovnou nule.

Obecně každou transformaci T nějakého oboru X do sebe, která splňuje podmínku (2), nazýváme pasivní. Aby tato definice měla smysl, je třeba požadovat, aby obor X obsahoval funkci identicky rovnou nule.

Objekt popsaný pasivní transformací neobsahuje zdroje vnitřních poruch a je tedy v tomto smyslu idealizací objektu skutečného. Avšak i při zanedbání vnitřních poruch podléhají transformace popisující skutečné objekty jistým omezením diktovaným požadavky fyzikální realizovatelnosti na různých stupních. Pro ilustraci uveďme aspoň jedno takové omezení kladené na transformaci T, které je intuitivně velmi názorné:

(R) Když $t \geqq 0$ a když x_1 a x_2 jsou funkce z oboru X, které se shodují na intervale od nuly až do t, pak také funkce $y_1 = T(x_1)$ a $y_2 = T(x_2)$ se shodují na tomto intervale.

Tato podmínka realizovatelnosti v podstatě říká, že uvažovaný objekt nemůže již dnes od sebe rozeznat dvě funkce, které se začnou lišit teprve zítra, zkrátka objekt nedovede věštit budoucnost. Snadno se zjistí, že zpožďovací linka je tohoto typu.

2. OBJEKTY S VNITŘNÍMI PORUCHAMI

Jak už bylo naznačeno v úvodu, výrobní zařízení jsou objekty, které fungují nedokonale, tj. obsahují vnitřní zdroje poruch. Mohlo by se zdát na první pohled, že takový objekt lze popsat transformací S oboru X do sebe, která porušuje podmínku (2), tj. platí

$$S(0) \neq 0 .$$

Názorný smysl této podmínky je takový, že objekt „ponechán sám o sobě", vyrábí funkci

$$z = S(0) ,$$

která není identicky rovna nule. Avšak snadno se zjistí, že taková charakterizace objektu s vnitřními poruchami je zcela nevyhovující. Důvod je ten, že se vůbec nebere v úvahu prvek nejistoty při výskytu poruch. Kdybychom totiž uvažovali dva stejné objekty s vnitřními poruchami, pak jejich činnost by popisovala jediná transformace S a jelikož platí $z = S(0)$, tedy v obou případech by byl časový průběh poruchové veličiny přesně stejný, což odporuje základním fysikálním poznatkům i denním zkušenostem.

Abychom tento vážný rozpor odstranili, nemusíme hned celou úvahu zavrhnout, nýbrž stačí, když ji vhodným způsobem doplníme. Prostředky k tomu nám poskytuje aparát teorie pravděpodobnosti. Jsou to v podstatě tytéž prostředky, jakých se již odedávna používá k formálnímu popisu neurčitých situací v jednoduchých hazardních hrách. Abychom si vytvořili vhodné intuitivní představy, použijeme analogie se školním příkladem házení kostky. Neurčitost situace před provedením pokusu spočívá v tom, že nevíme, které z čísel 1 až 6 se objeví jako výsledek hodu. Právě tak před uvedením nedokonalého objektu do činnosti nevíme, jakým způsobem bude jeho činnost přesně probíhat, tj. nevíme kterou z možných transformací se bude tato činnost řídit. U kostky tvoří skupina čísel 1 až 6 zásobu všech možných případů. Zcela obdobně je třeba mít k dispozici zásobu transformací, z nichž každá představuje jeden z možných průběhů činnosti objektu. Tuto zásobu si vytvoříme pomocí prostoru Ω, jehož body ω budeme nazývat elementárními jevy. Každému takovému ω přiřadíme transformaci

$$S(\omega, \cdot) ,$$

která převádí obor X do sebe. Znamená to, že každé funkci x z oboru X je přiřazena funkce $S(\omega, x)$ z téhož oboru. Zhruba řečeno, proměnná ω vyjadřuje závislost tohoto přiřazení na „náhodě". Jestliže u transformace $S(\omega, \cdot)$ necháme proměnnou ω proběhnout celý prostor Ω, pak se nám tímto způsobem nastřádá systém $\mathfrak{S}$ transformací oboru X do sebe, z nichž každá představuje právě jeden z možných průběhů činnosti objektu. Na rozdíl od kostky je obvykle počet případů, které mohou nastat, nekonečný, tj. systém $\mathfrak{S}$ obvykle obsahuje nekonečně mnoho transformací. Tento požadavek zajistíme snadno tím, že prostor Ω zvolíme dostatečně bohatý. U dobře udělané kostky je každému z čísel 1 až 6 přiřazena pravděpodobnost přibližně $1/6$, že se objeví jako výsledek hodu. Součet těchto pravděpodobností je roven jedné, což je právě pravděpodobnost, že se jako výsledek hodu objeví některé z čísel 1 až 6. Něco takového pro systém $\mathfrak{S}$ prakticky nikdy neplatí, naopak většinou je situace taková, že každá jednotlivá transformace $S(\omega, \cdot)$ má nulovou pravděpodobnost, že se vyskytne. Avšak přesto je pravděpodobnost rovna jedné, že se vyskytne některá transformace ze systému $\mathfrak{S}$. Tato zdánlivě překvapující skutečnost není nikterak ve sporu s poznatky z matematické analýzy a také nevylučuje možnost zavedení pojmu rozložení pravděpodobnosti v prostoru Ω, které má obdobný smysl, jako rozložení pravděpodobnosti ve skupině čísel 1 až 6. Zhruba řečeno, je to funkce P s hodnotami mezi nulou a jednou, která každé „přípustné" skupině A elementárních jevů z prostoru Ω přiřazuje pravděpodobnost $P(A)$, že činnost objektu bude probíhat podle některé transformace $S(\omega, \cdot)$, určené elementárním jevem ω ze skupiny A. Shrneme-li předešlé úvahy, můžeme stručně konstatovat, že činnost nedokonalého objektu může probíhat mnoha různými způsoby, z nichž jeden je vybrán „náhodovým mechanismem" podle daného pravděpodobnostního zákona.

Tím jsme zhruba objasnili pojem náhodné transformace $S(\cdot, \cdot)$. Připomeňme, že ze dvou volných míst v závorce první je rezervováno pro argument ω, vyjadřující závislost na „náhodě", a druhé místo pro funkci x, která vyjadřuje závislost na průběhu vstupní veličiny.

Teorie náhodných transformací tvoří novou kapitolu teorie pravděpodobnosti. Její vznik byl motivován řadou konkrétních problémů z oboru technických věd. Připomeňme, že např. sdělovací kanály, které hrají důležitou úlohu v otázkách přenosu informace, lze rovněž považovat za objekty s vnitřními zdroji poruch a jejich vlastnosti lze právě vyjádřit pomocí náhodných transformací.

Pojem náhodné transformace je i při všech omezeních diktovaných požadavky konzistence se základy matematické analýzy (které jsme tu nerozebírali), příliš obecný. Skutečné fyzikální objekty kladou na náhodné transformace, které popisují jejich činnost, ještě celou řadu dalších omezení, z nichž některá jsou velmi jednoduchá a názorná.

Abychom např. vyjádřili, že nedokonale fungující objekt je fyzikálně realizovatelný, stačí, když budeme žádat, aby podmínka (R) fyzikální realizovatelnosti byla splněna s pravděpodobností jedna, tj. aby ty elementární jevy ω z prostoru Ω, pro které transformace $S(\omega, \cdot)$ podmínku (R) nesplňují, měly dohromady nulovou pravděpodobnost.

Mezi nedokonale fungujícími objekty nás budou především zajímat ty, které „ponechány samy o sobě" vyrábějí skutečné poruchy, tj. funkce, které nejsou identicky rovny nule. Tento požadavek splníme tím, že elementárním jevům ω z prostoru Ω, které splňují podmínku $S(\omega, 0) = 0$ přiřadíme dohromady nulovou pravděpodobnost. Tím je zajištěno, že objekt se bude chovat pasivně toliko s nulovou pravděpodobností.

Již v úvodu bylo konstatováno, že časový průběh poruchové veličiny je nepravidelný. Tento slovní obrat měl vyvolat aspoň dojem, že záleží na náhodě, která funkce se vyskytne jako časový průběh poruchy. Jelikož činnost objektu je popsána náhodnou transformací $S(\cdot, \cdot)$ oboru X do sebe, máme právo očekávat, že tato náhodná transformace určí zákon pravděpodobnosti vyskytu poruch za předpokladu, že objekt je ponechán sám o sobě. Že tomu tak skutečně je, o tom se přesvědčíme prostou substitucí $x = 0$. Transformace $S(\cdot, 0)$ totiž každému elementárnímu jevu ω z prostoru Ω přiřazuje funkci $S(\omega, 0)$ z oboru X, která vyjadřuje časový průběh poruchy. Abychom vyjádřili, že $S(\omega, 0)$ je funkcí času, budeme psát

$$\xi(\omega, \cdot)$$

místo $S(\omega, 0)$, při čemž volné místo v závorce je rezervováno pro argument t. Jestliže „náhodový mechanismus" daného objektu vybral z prostoru Ω elementární jev ω, pak tím již určil jak transformaci $S(\omega, \cdot)$, podle které jeho činnost probíhá, tak také poruchu

$$\xi(\omega, \cdot) = S(\omega, 0)\,,$$

kterou vyrábí. Vidíme tedy, že poruchy jsou skutečně výsledkem nedokonalé činnosti objektu.

Od pojmu náhodné transformace jsme přirozeným způsobem dospěli k daleko jednoduššímu pojmu náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$. Ze dvou volných míst v závorce je první rezervováno pro „náhodu", tj. pro argument ω, a druhé pro argument t, představující čas.

Tato neúplná definice aspoň neuvede nikoho do pochybností, že když $\xi(\cdot, \cdot)$ je náhodná funkce, pak také $\xi^2(\cdot, \cdot)$ je náhodná funkce, dále když $\xi(\cdot, \cdot)$ je náhodná funkce a c je libovolné reálné číslo, pak $c\xi(\cdot, \cdot)$ je náhodná funkce a konečně když $\xi(\cdot, \cdot)$ a $\eta(\cdot, \cdot)$ jsou dvě náhodné funkce, pak také jejich součet $\xi(\cdot, \cdot) + \eta(\cdot, \cdot)$ a jejich součin $\xi(\cdot, \cdot)\,\eta(\cdot, \cdot)$ jsou náhodné funkce. Ve skutečnosti tato tvrzení sice nejsou zcela samozřejmá, avšak na základě přesné definice je lze snadno dokázat.

Pro libovolný pevný časový okamžik t funkce

$$\xi(\cdot, t)$$

přiřazuje každému elementárnímu jevu ω z prostoru Ω reálné číslo $\xi(\omega, t)$ a nazýváme ji náhodnou veličinou.

Velmi důležitý je pojem střední hodnoty náhodné veličiny $\xi(\cdot, t)$. I když tato střední hodnota není nic jiného než integrál

$$\int \xi(\omega, t)\, \mathrm{d}P$$

vzhledem k proměnné ω a k rozložení pravděpodobnosti P v prostoru Ω, přece jenom si tento pojem vyžaduje poněkud bližšího objasnění. Důvod je ten, že ve srovnání s obvyklým integrálem reálné funkce reálné proměnné je pojem střední hodnoty náhodné veličiny $\xi(\cdot, t)$ méně názorný.

Označme α nezápornou a β nekladnou část náhodné veličiny $\xi(\cdot, t)$. Přesněji řečeno, funkce α a β proměnné ω jsou definovány takto: $\alpha(\omega) = \xi(\omega, t)$, když $\xi(\omega, t) \geqq 0$, a $\alpha(\omega) = 0$, když $\xi(\omega, t) < 0$, a obdobně $\beta(\omega) = -\xi(\omega, t)$, když

$\xi(\omega, t) \leqq 0$, a $\beta(\omega) = 0$, jestliže $\xi(\omega, t) > 0$. Funkce α a β jsou náhodné veličiny a platí vztah

$$\xi(\omega, t) = \alpha(\omega) - \beta(\omega)$$

pro každé ω z prostoru Ω.

Zvolme nyní rozklad prostoru Ω na konečný počet „přípustných" částí $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ a označme a_i dolní hranici náhodné veličiny α na části A_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)$$

je aproximací střední hodnoty

$$\int \alpha(\omega) \, dP$$

náhodné veličiny α a tato střední hodnota je právě rovna horní hranici všech takových aproximací.

Střední hodnota náhodné veličiny $\xi(\cdot, t)$ je definovaná vztahem

$$\int \xi(\omega, t) \, dP = \int \alpha(\omega) \, dP - \int \beta(\omega) \, dP \, .$$

Vidíme ihned, že střední hodnota náhodné veličiny $\xi(\cdot, t)$ nemusí vždycky existovat. Je tomu tak právě tehdy, když

$$\int \alpha(\omega) \, dP = \int \beta(\omega) \, dP = \infty \, .$$

Jelikož střední hodnota je integrálem, má také všechny vlastnosti integrálu. Tak např. střední hodnota součtu dvou náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot těchto náhodných veličin, samozřejmě za předpokladu, že střední hodnoty obou těchto náhodných veličin existují a nejsou nekonečné s opačnými znaménky. Podobně střední hodnota násobku náhodné veličiny je rovna násobku její střední hodnoty, zase za předpokladu, že střední hodnota této náhodné veličiny existuje.

Podobně jako pro obyčejné integrály platí také pro střední hodnoty tzv. Schwarzova nerovnost, která říká, že

$$\left(\int \xi(\omega, s) \, \xi(\omega, t) \, dP \right)^2 \leqq \int \xi^2(\omega, s) \, dP \, . \int \xi^2(\omega, t) \, dP \, .$$

Pro každý pevně zvolený elementární jev ω je $\xi(\omega, \cdot)$ už jenom funkce času a bylo by žádoucí, abychom měli vždycky právo integrovat vzhledem k proměnné t aspoň s pravděpodobností jedna. I když existují patologické případy, které takovou integraci podle času nepřipouštějí, nemusí nás tato skutečnost příliš znepokojovat. Požadavky, jež budou v dalších úvahách kladeny na náhodnou funkci $\xi(\cdot, \cdot)$, nám vždycky zaručí, že vhodnou úpravou náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$, která neporušuje její pravděpodobnostní vlastnosti, lze vždycky dosáhnout integrovatelnosti s pravděpodobností jedna podle času v každém konečném intervalu.

3. STACIONARITA A ERGODICITA

Prvek náhody v činnosti objektů s vnitřními zdroji poruch nikterak nevylučuje jistou časovou stabilitu této činnosti, pro kterou existují hluboké fyzikální důvody. Jejím formálním vyjádřením jsou vlastnosti stacionarity a ergodicity příslušné náhodné transformace. Abychom se vyhnuli příliš komplikovaným úvahám, spokojíme se jen s přibližným objasněním těchto pojmů a to ještě na objektech speciálního typu.

Pro naše účely vhodnou vlastnost mají ideální objekty, jejichž činnost je aditivním způsobem pokažena náhodnými poruchami. Připomeňme, že činnost objektů bez vnitřních zdrojů poruch lze popsat transformací T oboru X do sebe, která splňuje podmínku (2). Objekt, jehož činnost lze vyjádřit náhodnou transformací $S(\cdot, \cdot)$, která každému elementárnímu jevu ω a každé funkci x z oboru X přiřazuje funkci

$$S(\omega, x) = T(x) + \xi(\omega, \cdot)\,, \tag{3}$$

má požadovanou jednoduchou strukturu. Všechny pravděpodobnostní vlastnosti jsou tu soustředěny v náhodné funkci $\xi(\cdot, \cdot)$. Samozřejmě stacionarita a ergodicita náhodné transformace $S(\cdot, \cdot)$, která splňuje podmínku (3), se tu redukují na stacionaritu a ergodicitu náhodné funkce $\xi(.,.)$.

Řekneme, že náhodná funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ je stacionární, když pro každou konečnou skupinu nezáporných čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$ společné rozložení pravděpodobnosti náhodných veličin $\xi(\cdot, t_1), \xi(\cdot, t_2), \ldots, \xi(\cdot, t_n)$ je stejné jako společné rozložení pravděpodobnosti náhodných veličin $\xi(\cdot, t_1 + \tau), \xi(\cdot, t_2 + \tau), \ldots, \xi(\cdot, t_n + \tau)$ a to pro každé kladné τ. Názorný smysl stacionarity je takový, že pravděpodobnostní vlastnosti uvažované náhodné funkce nezávisí na posunutí v čase.

Přímým důsledkem stacionarity náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ je nezávislost střední hodnoty $\int \xi^2(\omega, t)\, \mathrm{d}P$ na čase t, tj.

$$\int \xi^2(\omega, t)\, \mathrm{d}P = b\,,$$

kde b je konstanta, splňující nerovnost

$$0 \leqq b \leqq \infty\,.$$

Jestliže ještě navíc je splněna podmínka

$$b < \infty\,, \tag{4}$$

pak existuje střední hodnota $\int \xi(\omega, t)\, \mathrm{d}P$, která nezávisí na čase t, tj.

$$\int \xi(\omega, t)\, \mathrm{d}P = a\,, \tag{5}$$

 kde a je konstanta, splňující podle Schwarzovy nerovnosti podmínku

$$a^2 \leqq b \,. \tag{6}$$

Obdobně existuje střední hodnota

$$\int (\xi(\omega, t) - a)\,(\xi(\omega, t + \tau) - a)\,\mathrm{d}P\,, \tag{7}$$

která pro libovolné pevné nezáporné τ nezávisí na čase t. Prábě tato důležitá vlastnost střední hodnoty (7) nám umožňuje definovat korelační funkci ϱ, která každému reálnému číslu τ přiřazuje číslo

$$\varrho(\tau) = \int (\xi(\omega, t) - a)\,(\xi(\omega, t + \tau) - a)\,\mathrm{d}P\,.$$

Aby tato definice měla smysl i pro záporné τ, je třeba pro taková τ volit $t \geqq \tau$, neboť náhodná funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ byla definovaná jen pro nezáporné hodnoty času.

Podle (6) je

$$\varrho(0) = b - a^2 \geqq 0$$

a ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$-\varrho(0) \leqq \varrho(\tau) \leqq \varrho(0)$$

pro každé reálné číslo τ. Přímým důsledkem definice korelační funkce je její symetrie kolem nuly, tj. platí

$$\varrho(-\tau) = \varrho(\tau)$$

pro všechna reálná τ. Není bez zajímavosti, že když korelační funkce je spojitá v bodě nula, pak už je spojitá všude. Všechny tyto vlastnosti, i když jsou velmi důležité, ani zdaleka nestačí k charakterizaci korelační funkce. Poznamenejme však, že je známa nutná a postačující podmínka, aby reálná funkce reálné proměnné byla korelační funkcí nějaké stacionární náhodné funkce. V této podmínce vystupuje pojem tzv. spektra.

Abychom si udělali představu jakého tvaru mohou být korelační funkce, uvedeme aspoň jeden typický příklad, totiž

$$\varrho(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\,, \tag{8}$$

kde $\alpha \geqq 0$. Taková korelační funkce se bude v dalších úvahách často vyskytovat.

Pojem ergodicity, který se zavádí jen pro stacionární náhodné funkce, již nemá tak názorný obsah jako stacionarita a proto se spokojíme jenom s formulací některých důsledků ergodicity, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Přesněji řečeno, ze stacionarity a z ergodicity náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ a z podmínky (4) lze jistým dosti složitým postupem odvodit závěr, že

$$\frac{1}{t}\int_0^t \xi(\omega, s)\, \mathrm{d}s \to a$$

a pro libovolné nezáporné τ

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\xi(\omega, s) - a)(\xi(\omega, s + \tau) - a)\, \mathrm{d}s \to \varrho(\tau),$$

$$(9) \qquad \frac{1}{t}\int_\tau^{t+\tau} (\xi(\omega, s) - a)(\xi(\omega, s - \tau) - a)\, \mathrm{d}s \to \varrho(-\tau)$$

s pravděpodobností jedna, když $t \to \infty$, což znamená, že tyto konvergence jsou zajistěny pro všechny elementární jevy ω z prostoru Ω až na výjimky, které mají dohromady nulovou pravděpodobnost. Zhruba řečeno, stacionarita a ergodicita spolu s podmínkou (4) je poněkud přísnější požadavek, než je záměnnost středních hodnot s časovými průměry. Právě tato vlastnost má velmi závažné praktické důsledky, neboť nám umožňuje s použitím jediného časového průběhu poruchové veličiny získat všechny potřebné statistické údaje o náhodné funkci.

Korelační funkce, jejíž význam je zdůrazněn ergodicitou, je měřítkem vnitřní závislosti ukryté ve zdánlivě chaotickém časovém průběhu poruchové veličiny. Intuitivně by se dalo očekávat, že dva časově od sebe dostatečně odlehlé úseky průběhu poruchové veličiny, popsané stacionární a ergodickou náhodnou funkcí, jsou – zhruba řečeno – téměř nezávislé. Tato domněnka je sice nesprávná, avšak ve všech praktických případech něco takového skutečně platí. Přesněji řečeno, v praxi je obvykle splněna podmínka

$$\varrho(\tau) \to 0$$

pro $\tau \to \infty$. Hlubší analýza procesů vzniku poruch ukazuje, že taková vlastnost korelační funkce není nikterak neočekávaná. Např. korelační funkce definovaná vztahem (8) tuto podmínku splňuje.

Korelační teorie náhodných funkcí je velmi účinným nástrojem statistické teorie automatického řízení, avšak to nikterak neznamená, že by byla nástrojem jediným. V některých případech je korelace velmi špatným měřítkem závislosti a někdy dokonce ji ani nelze definovat. Za těchto okolností je třeba k řešení otázek statistické teorie automatického řízení použít vhodnějších prostředků, které nám poskytuje teorie pravděpodobnosti.

4. CO JE PREDIKCE

Již v úvodu bylo zhruba naznačeno, že vnitřní závislost, ukrytá v časovém průběhu poruchové veličiny se dá využít pro předpovídání budoucích hodnot a to dokonce způsobem, který je v jistém přesně definovaném smyslu optimální. Je intuitivně zcela pochopitelné, že takto předpověděných hodnot lze využít pro automatické řízení se zpožděným účinkem, neboť předpověď do jisté míry kompenzuje vliv zpoždění.

Základem všech dalších úvah bude stacionární a ergodická náhodná funkce $\xi(\cdot, \cdot)$, která splňuje podmínku (4). Tím máme zaručeno, že můžeme použít aparátu korelační teorie. Obecnost úvah neomezíme a ani jinak se žádného přestupku nedopustíme, když ve výraze (5) budeme předpokládat, že

$$a = 0 \,, \tag{10}$$

neboť tuto podmínku vždycky snadno splníme, když místo $\xi(\cdot, \cdot)$ použijeme náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot) - a$, která je také stacionární a ergodická a splňuje podmínku (4). Podmínka (10) nám poskytuje možnost zjednodušení definice korelační funkce a to tak, že

$$\varrho(\tau) = \int \xi(\omega, t)\, \xi(\omega, t + \tau)\, \mathrm{d}P \,.$$

Problém predikce si objasníme v silně zjednodušeném tvaru. Spočívá v tom, že pro každý časový okamžik t náhodnou veličinu $\xi(\cdot, t + \tau)$, jejíž hodnota $\xi(\omega, t + \tau)$ bude k dispozici až za dobu τ, tj. v časovém okamžiku $t + \tau$, aproximujeme náhodnou veličinou $c\, \xi(\cdot, t)$, jejíž hodnota $c\, \xi(\omega, t)$ je k dispozici právě v časovém okamžiku t. Jde nyní o to, je-li aproximace $c\, \xi(\cdot, t)$ náhodné veličiny $\xi(\cdot, t + \tau)$ dobrá nebo špatná. Vhodné posuzovací měřítko nám poskytuje střední hodnota

$$\int (\xi(\omega, t + \tau) - c\, \xi(\omega, t))^2\, \mathrm{d}P \,, \tag{11}$$

která se obvykle nazývá střední kvadratickou chybou predikce. Je jasné, že vhodnou volbou konstanty c lze dosáhnout toho, aby střední kvadratická chyba predikce (11) byla minimální.

Jelikož

$$\int (\xi(\omega, t + \tau) - c\, \xi(\omega, t))^2\, \mathrm{d}P =$$

$$= \int (\xi^2(\omega, t + \tau) - 2c\, \xi(\omega, t + \tau)\, \xi(\omega, t) + c^2\, \xi^2(\omega, t))\, \mathrm{d}P =$$

$$= \int \xi^2(\omega, t + \tau)\, \mathrm{d}P - 2c \int \xi(\omega, t + \tau)\, \xi(\omega, t)\, \mathrm{d}P + c^2 \int \xi^2(\omega, t)\, \mathrm{d}P =$$

$$= \varrho(0) - 2c\, \varrho(\tau) + c^2\, \varrho(0) \,,$$

tedy pro

$$c = \frac{\varrho(\tau)}{\varrho(0)} \tag{12}$$

nabývá střední hodnota (11) svého minima, které je rovno

$$\varrho(0) - \frac{\varrho^2(\tau)}{\varrho(0)}.$$

Vidíme, že stanovení optimální predikce pomocí konstanty c předpokládá znalost korelační funkce ϱ v bodech 0 a τ.

Je vhodné upozornit, že tento zcela elementární poznatek neříká vlasně nic jiného, než že mezi všemi způsoby predikce o časovou hodnotu τ do budoucnosti, realizovanými pro každé nezáporné t náhodnou veličinou $c\,\xi(\cdot, t)$ je ve smyslu kritéria minima střední kvadratické chyby nejlepší ten, který používá konstantu c, jejíž velikost je dána výrazem (12). To ovšem nikterak nevylučuje, že jiné způsoby predikce mohou dát ve smyslu uvažovaného kritéria výsledky lepší. Jestliže však korelační funkce ϱ je exponenciálního typu (8), pak uvedený způsob predikce je nejlepší v absolutním smyslu, tj. každá snaha o další zmenšení střední kvadratické chyby je beznadějná.

Až dosud jsme pro stanovení optimální predikce využili jenom stacionaritu náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ a vlastnosti (4), takže by se mohlo na pohled zdát, že požadavek ergodicity je zbytečný. Ukážeme nyní, že ergodicita zbytečná není, nýbrž naopak, že teprve ona dává problému predikce a jeho řešení reálný smysl.

Jestliže „náhodový mechanismus" daného objektu vybral z prostoru Ω elementární jev ω, pak tento mechanismus také zvolil ze všech možných časových průběhů poruchy právě jednu, která je vyjádřena funkcí $\xi(\omega, \cdot)$. Hodnoty této funkce závisí už jenom na čase t. Pro každý časový okamžik t je kvadratická chyba predikce

$$(\xi(\omega, t + \tau) - c\,\xi(\omega, t))^2 .$$

Její velikost sice v okamžiku t ještě neznáme, avšak budeme ji znát v okamžiku $t + \tau$. To znamená, že v okamžiku t víme, že v okamžiku $t - \tau$ byla kvadratická chyba predikce

$$(\xi(\omega, t) - c\,\xi(\omega, t - \tau))^2 .$$

Jestliže náhodná funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ splňuje požadavek ergodicity, pak podle (9)

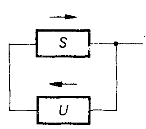
$$\frac{1}{t}\int_{\tau}^{t+\tau} (\xi(\omega, t) - c\,\xi(\omega, t - \tau))^2 \,\mathrm{d}P \to \varrho(0) - 2c\,\varrho(\tau) + c^2\,\varrho(0)$$

s pravděpodobností jedna pro $t \to \infty$. Tím je zaručeno, že pro každou volbu elementárního jevu ω (až na výjimky, které mají dohromady nulovou pravděpodobnost) časový průměr kvadratické chyby konverguje k jedné a téže konstantě, totiž právě ke střední kvadratické chybě predikce. Kdybychom upustili od požadavku ergodicity, pak sice časové průměry kvadratické chyby by také ještě konvergovaly s pravděpodobností jedna, avšak nikoliv nezávisle na ω a tím by tyto časové průměry přestaly mít reálný smysl.

Předmětem našich úvah bude objekt s vnitřním zdrojem poruch, jehož činnost lze popsat náhodnou transformací $S(\cdot, \cdot)$ splňující podmínku (3). O transformaci T budeme předpokládat, že vyjadřuje zpoždění o dobu τ. Tím se zaručuje dostatečná jednoduchost výkladu a zachovává se nejzávažnější obtíž automatického řízení, totiž jeho zpožděný účinek. Za tohoto předpokladu „vyrábí" objekt náhodnou funkci, která každému elementárnímu jevu ω, každé funkci x na vstupu objektu a každému $t \geqq \tau$ přiřazuje hodnotu

$$x(t - \tau) + \xi(\omega, t) . \tag{13}$$

Je jasné, že kdybychom mohli na vstup objektu přivádět funkci $-\xi(\omega, \cdot)$ posunutou o dobu τ do budoucnosti, tj. funkci, která každému t přiřazuje hodnotu $-\xi(\omega, t + \tau)$,



Obr. 2.

pak bychom podle (13) docílili úplné kompenzace poruchy. Víme však, že u nedegenerované náhodné funkce nelze takový zásah do budoucnosti provést. Avšak co se nedá provést přesně, může se podařit aspoň přibližně. Víme již, že predikce aproximuje budoucí hodnoty náhodné funkce. Základní myšlenka automatického řízení objektu je tedy nasnadě ležící.

Jestliže na vstup objektu přivedeme funkci $-c\,\xi(\omega, \cdot)$, která pro každé $t \geqq 0$ aproximuje budoucí hodnotu $\xi(\omega, t + \tau)$, pak výsledek takového řízení je funkce, která každému $t \geqq \tau$ přiřazuje hodnotu

$$-c\,\xi(\omega, t - \tau) + \xi(\omega, t) \tag{14}$$

a je přirozené volit konstantu c tak, aby střední kvadratická chyba řízení, tj.

$$\int(-c\,\xi(\omega, t - \tau) + \xi(\omega, t))^2 \,\mathrm{d}P \tag{15}$$

byla minimální.

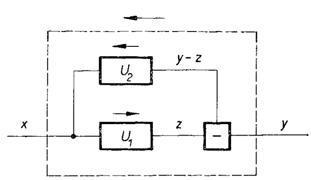
Vidíme, že optimální řízení podle minima střední kvadratické chyby odpovídá optimální predikci podle stejného kritéria.

Obecné schéma teorie automatického řízení je uvedeno na obr. 2. Toto schéma je odůvodněno přirozeným požadavkem, že řídící veličinu lze odebírat toliko na výstupní straně objektu a po úpravě pasivní soustavou popsanou transformací U, přivádět na vstupní stranu tohoto objektu. Základním problémem teorie automatického řízení je určení struktury a parametrů řídící soustavy, tj. transformace U tak, aby výsledek řízení byl co nejlepší, tj. aby střední hodnota kvadrátu výsledné poruchy byla minimální.

Víme již, že pro pevné ω z prostoru Ω je třeba přivádět na vstupní stranu objektu funkci x, která každému $t \geqq 0$ přiřazuje hodnotu

$$x(t) = -c\,\xi(\omega, t)\,, \tag{16}$$

avšak nevíme ještě, jakým způsobem lze toho dosáhnout. Hlavní potíž je v tom, že hodnoty $\xi(\omega, t)$ funkce $\xi(\omega, \cdot)$ nemáme přímo k dispozici. Avšak podle (13) máme



Obr. 3.

k dispozici funkci y, která každému $t \geqq \tau$ přiřazuje hodnotu

$$y(t) = x(t - \tau) + \xi(\omega, t)\,,$$

takže podle (16) je

$$x(t) = -c(y(t) - x(t - \tau))\,. \tag{17}$$

Označíme-li U transformaci oboru X do sebe, která každé funkci y přiřazuje řešení x rovnice (17), pak řídící soustava na obr. 2 popsaná transformací U má požadovanou strukturu.

Abychom nemuseli brát v úvahu příliš mnoho funkcí a měli při tom dostatečnou volnost pro manipulaci s nimi, budeme předpokládat, že obor X je lineární prostor všech funkcí splňujících podmínku (1). Tento předpoklad je oprávněný, neboť jiné funkce se mohou objevit na vstupu řídící soustavy toliko s nulovou pravděpodobností.

Jelikož transformace U je určena řešením rovnice (17) podle x, lze řídící soustavu na obr. 2 schematicky znázornit podle obr. 3, kde transformace U_1 vyjadřuje zpoždění o dobu τ ve směru označeném šipkou, transformace U_2 znamená násobení konstantou $-c$ opět ve směru označeném příslušnou šipkou a čtvereček označený $-$ znázorňuje provedení rozdílu $y - z$ funkcí y a z. Směr činnosti takto složené soustavy je zase označen šipkou, takže y je vstup, x je výstup a, jak jsme požadovali, platí $x = U(y)$.

Výsledek procesu řízení podle obr. 2 řídící soustavou, schematicky znázorněnou na obr. 3, je porucha vyjádřená stacionární a ergodickou náhodnou funkcí, která každému $t \geqq \tau$ přiřazuje hodnotu (14). Volný parametr c řídící soustavy můžeme volit tak, aby střední hodnota (15) byla minimální. Dosáhne se toho obdobně jako u predikce pro

$$c = \frac{\varrho(\tau)}{\varrho(0)}\,.$$

Reálný smysl a oprávněnost takového způsobu řízení jsou zaručeny požadavkem ergodicity, kladeným na stacionární náhodnou funkci $\xi(\cdot, \cdot)$.

Je třeba zdůraznit, že právě uvedený zjednodušený způsob řízení není podle minima střední kvadratické chyby nejlepší ve všech případech. Avšak když korelační funkce ϱ stacionární náhodné funkce $\xi(\cdot, \cdot)$ je exponenciálního typu (8), pak uvažovaný způsob automatického řízení představuje to nejdokonalejší, čeho lze vůbec dosáhnout.

Jesliže ϱ je typu (8), pak optimální konstanta je určena výrazem

$$c = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

a vidíme ihned, že konstanta c klesá k nule, když zpoždění τ roste bez omezení. Konstanta c je měřítkem konzervativnosti řízení, to znamená, že automatické řízení musí být tím opatrnější, čím větší je zpoždění, jak se ostatně dá intuitivně očekávat. Je-li zpoždění τ tak velké, že hodnota $\varrho(\tau)$ je prakticky nulová, pak je nejlepší od automatického řízení vůbec upustit.

6. ADAPTIVNÍ ŘÍZENÍ

Princip adaptivního řízení si objasníme za stejných zjednodušujících předpokladů jako princip řízení klasického. V předešlém paragrafu bylo konstatováno, že optimální hodnota parametru c řídící soustavy na obr. 3 je dána výrazem (12). Budeme nyní sledovat, co se stane, když konstantu c nahradíme náhodnou funkcí $\gamma(\cdot, \cdot)$, definovanou pro každý elementární jev ω a každý časový okamžik $t \geqq 0$ tak, že

$$\gamma(\omega, t) = 0$$

pro $0 \leqq t \leqq \tau$ a

$$\gamma(\omega, t) = \frac{\int_\tau^t \xi(\omega, s - \tau)\, \xi(\omega, s)\, \mathrm{d}s}{1 + \int_0^t \xi^2(\omega, s)\, \mathrm{d}s}$$

pro $t > \tau$. Snadno zjistíme, že se nestane dohromady vůbec nic. Podle (9) totiž

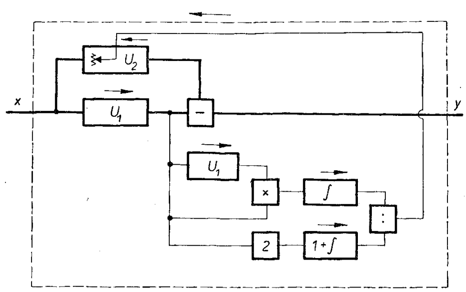
$$\gamma(\ , t) \to c \tag{18}$$

s pravděpodobností jedna pro $t \to \infty$. Vlastnost (18) náhodné funkce $\gamma(\cdot, \cdot)$ má velmi názorný smysl. Říká v podstatě, že optimálního parametru řízení se dosáhne v limitě zcela samočinně.

Výsledkem procesu řízení na výstupu objektu je náhodná funkce, která každému elementárnímu jevu ω z prostoru Ω a každému časovému okamžiku t přiřazuje hodnotu

$$- \gamma(\omega, t)\, \xi(\omega, t - \tau) + \xi(\omega, t)\,. \tag{19}$$

Vidíme, že tento proces samočinného řízení je skutečně adaptivní, neboť v definici náhodné funkce $\gamma(\cdot, \cdot)$ se nepoužívá hodnot $\varrho(0)$ a $\varrho(\tau)$ korelační funkce ϱ, které tedy vůbec nemusíme znát a přesto je tento proces řízení prakticky stejně dobrý jako proces řízení klasického. Zhruba řečeno, je tomu tak proto, že podle limitního



Obr. 4.

vztahu (18) po dostatečně dlouhé době se adaptivní proces řízení (19) libovolně málo liší od procesu řízení klasického (14). Pro každý časový okamžik t je parametr řízení $\gamma(\cdot, t)$ náhodnou veličinou, jejíž hodnota $\gamma(\omega, t)$ představuje jakýsi provizorní stav automatického řízení. Závislost parametru řízení na elementárním jevu ω, tj. na „náhodě" postupně mizí a v limitě se stane optimální konstantou. Reálný smysl adaptivního řízení je v tom, že časový průměr chyby řízení

$$\frac{1}{t} \int_{\tau}^{t} (-\gamma(\omega, s)\, \xi(\omega, s - \tau) + \xi(\omega, s))^2 \,\mathrm{d}s$$

konverguje s pravděpodobností jedna k minimální střední kvadratické chybě

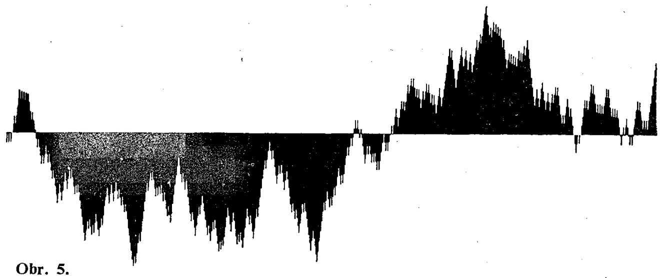
$$\varrho(0) - \frac{\varrho^2(\tau)}{\varrho(0)}\,.$$

Soustava, která může toto adaptivní řízení uskutečňovat je schematicky znázorněna na obr. 4.

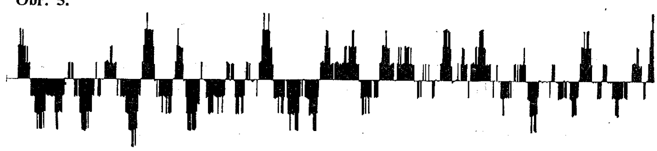
Tato soustava je jistým doplněním soustavy klasického řízení znázorněné na obr. 3 a nakreslené na obr. 4 silnými čarami. Ta část soustavy, která je nakreslena slabými čarami, nepřetržitě upravuje parametr řízení a tato jeho činnost je v souhlase s definicí náhodné funkce $\gamma(\cdot, \cdot)$. Symbol U_1 značí operaci zpožďování o τ podobně jako u soustavy na obr. 3, „ × “ značí násobení, číslo „2“ označuje provedení kvadrátu, symboly „∫“ resp. „1 + ∫“ značí integraci resp. integraci s přičtením jednotky a „:“ vyjadřuje dělení. Vidíme, že ve srovnání se soustavou řízení klasického je systém adaptivního řízení značně složitější.

7. PŘÍKLADY

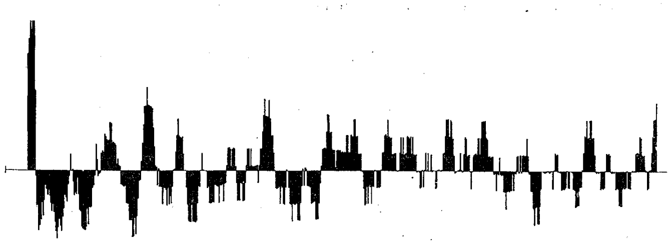
Názornou představu o efektivnosti klasického a adaptivního procesu řízení poskytují obr. 5, 6 a 7. Všechny tři obrázky jsou ve stejném měřítku a připouštějí tedy přímé srovnávání.



Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.

Na obr. 5 je znázorněn časový průběh poruchy za předpokladu, že objekt není žádným způsobem automaticky řízen. Tato porucha byla získána uměle jako řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

$$y'(t) + a\,y(t) = \zeta(\omega, t)\,, \tag{20}$$

kde $0 < a < 1$ a $\zeta(\cdot, \cdot)$ je tzv. bílý šum, který byl aproximován posloupností impulsů z generátoru náhodného procesu. Zhruba řečeno, řešením této rovnice je asymptoticky stacionární Gaussův náhodný proces, který má korelační funkci exponenciálního typu, totiž

$$\varrho(\tau) = \frac{1}{2a}\,e^{-a|\tau|}\,.$$

Jelikož průběh poruchy byl počítán na číslicovém počítači, byla místo diferenciální rovnice (20) řešena odpovídající rovnice diferenční. Zpoždění τ bylo zvoleno tak, aby

$$\varrho(\tau) = 0{,}9.$$

Nejlepší způsob automatického řízení se zpožděným účinkem o dobu τ v klasickém případě dává časový průběh poruchy, který je znázorněn na obr. 6 a nic dokonalejšího nelze v žádném případě dosáhnout.

Nejlepší způsob adaptivního řízení se zpožděným účinkem o dobu τ dává časový průběh poruchy podle obr. 7 a na pohled vidíme, že výsledek procesu řízení je za určitou dobu již stejný jako při optimálním řízení klasickém, jak jsme očekávali.

ZÁVĚR

Ve značně zjednodušeném příkladu klasického a adaptivního řízení bylo možno použít při řešení přímé metody, která je zcela názorná. Naproti tomu v komplikovanějších případech je třeba použít daleko složitějšího matematického aparátu, tzv. pravděpodobnostní funkcionální analýzy. Ukazuje se, že bez takových prostředků vůbec nelze formulovat a tím méně řešit komplikovanější úlohy adaptivního řízení. Při tom se ještě omezujeme na výsledky typu zákonů velkých čísel, které dávají odpověď na otázky struktury řídící soustavy, zaručují jistou stabilitu procesu adaptivního řízení a poskytují metody k přímému řešení takových úloh technikou matematických strojů ve spojení s generátory náhodných procesů. Tím se do značné míry obcházejí potíže analytického řešení, které jsou v současné době nepřekonatelné.

How to Built up the Theory of Automatic Control on the Basis of Statistics

Antonín Špaček

The present paper is one of the last works written by Dr A. Špaček, Corresponding Member of the Czechoslovak Academy of Sciences, one of the first propagators of cybernetics in Czechoslovakia. By means of publishing the present paper the journal "Kybernetika" remembers the fourth anniversary of the untimely death of Dr A. Špaček, who deceased October 24, 1961, in the age of 50 years.

The paper which was not in this original published form determined for publication contents analysis and approach to the solution of problems of theory of automatic control on the basis of probabilistic methods. The main stress is laid on the intelligible explanation of fundamental notions of statistical control theory rather from the point of view of their meaning than from the formally mathematical point of view. Despite this the paper is written with a great mathematical precision which had been always demanded by Dr Špaček even in popularizing papers and is written in such a way that the explanation of basic notions is clear and intelligible even for those who are not specialists in probability theory.

It had been the intention of Dr Špaček to write similar papers also on probabilistic functional analysis, statistical decision theory, and information theory with respect to the solution of technical problems. Unfortunately, his untimely death did not allow to realize his plans.

Several years have passed from the time the paper was written. Nevertheless, even today the paper remains modern and therefore it is published in this journal so that the general engineering public can get acquainted with it. The paper can serve not only to technicians dealing with automation but also to mathematicians and statisticians as the starting point for further development and working out of methods in both directions, in theory of automatic control and in probability theory.