Mária Barnovská; Vladimir Aleksandrovich Il′in

О порядке равносходимости почти всюду средних Рисса несамоопряженных расширений оператора Лапласа

Mathematica Slovaca, Vol. 41 (1991), No. 2, 205--222

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136525

Math. Slovaca 41, 1991, No. 2, 205—222

О ПОРЯДКЕ РАВНОСХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ СРЕДНИХ РИССА НЕСАМООПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

М. БАРНОВСКА — Б. А. ИЛЬИН*)

ABSTRACT. Consider, in general a non-selfadjoint extension of a Laplace operator in an N-dimensional region G. Suppose that the collection of eigenfunctions of the extension is a Riesz basis in $L_2 G$. The Riesz means of an arbitrary positive order belonging to this operator are studied. It is proved that for an arbitrary function in $L_2 G$ the difference of the Riesz means of the order $s > 0$ of two arbitrary extensions is of the order $o\left(\lambda^{-\frac{s}{2}}\right)$.

1. Введение и постановка задачи

Теоремы о равносходимости (или соотвественно о равносуммируемости) двух спектральных разложений позволяют сводить изучение вопроса о сходимости (или соответственно о суммируемости) спектрального разложения, отвещающего произвольному расширению рассматриваемого эллиптического оператора, к выяснению вопроса о сходимости (или соответственно о суммируемости) специального спектрального разложения (например, разложения в N-кратный интеграл Фурье).

Исчерпывающие теремы о равносуммируемости почти всюду средних Рисса спектральных разложений, отвечающих двум произвольным *самосопряженным* расширениям оператора Лапласа, были недавно установлены В. А. Ильиным (см. [1]).

AMS Subject Classification (1985): Primary 35P99, Secondary 47F05.

Key words: Nonselfadjoint extension of a Laplace operator, Eigenfunction, Rieszmeans.

*) Совместная работа возникла во время пребывания проф. В. А. Ильина в Братиславе в 1987 г. по плану сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

В настоящей работе авторам удалось перенести указанные точные теоремы о равносуммируемости почти всюду средних Рисса любого положительного порядка s на случай двух произвольных и, вообще говоря, *несамосопряженных* расширений оператора Лапласа.

Установленный результат может быть использован при решении вопроса об устойчивости турбулентной плазмы и для расчета ядерных реакторов.

Сформулируем основной результат работы более подробно. Итак, в этой работе будут изучаться средние Рисса любого положительного порядка s разложений по собственным функциям, вообще говоря, несамосопряженного расширения оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G при условии, что система собственных функций изучаемого расширения образует базис Рисса в $L_2(G)$.

Мы доказываем, что для произвольной функции из класса $L_2(G)$ разность средних Рисса порядка $s > 0$ двух произвольных расширений указанного типа имеет порядок $o\left(\lambda^{-\frac{s}{2}}\right)$ при $\lambda \to \infty$.

Одним из допустимых расширений оператора Лапласа, укладывающимся в наше рассмотрение, может являться N-кратная система экспонент в N-мерном кубе G, получающаяся перемножением однократных систем экспонент, каждая из которых образует на соответствующем отрезке базис Рисса (условия для этого установлены в известных работах В. С. Павлова [2], Н. К. Никольского [3] и А. М. Седлецкого [4]). При этом в качестве второго расширения в том же N-мерном кубе G может быть взята N-кратная тригонометрическая система.

Будем понимать собственные функции оператора Лапласа в обобщенном смысле, ранее предложенном одним из авторов (см., например, [5]), полностью отказавшись от задания в каком-либо виде краевых условий, т.е. в качестве системы собственных функций оператора Лапласа будем рассматривать произвольную образующую базис Рисса в $L_2(G)$ систему $\{u_k(x)\}$, каждый элемент $u_k(x)$ которой принадлежит классу $C^2(G) \cap L_2(G)$ и для некоторого комплексного числа λ_k удовлетворяет внутри G уравнению $\Delta u_k + \lambda_k u_k = 0$.

Пусть $\{u'_k(x)\}$ и $\{u''_k(x)\}$ — две произвольные системы указанного типа, а $\{v'_k(x)\}$ и $\{v''_k(x)\}$ — биортогонально сопряженные к ним в $L_2(G)$ системы.

Пусть $\{\lambda'_k\}$ и $\{\lambda''_k\}$ — те комплексные числа, для которых внутри G для каждого номера k выполняются уравнения $\Delta u'_k + \lambda'_k u'_k = 0$ и $u''_k + \lambda''_k u''_k = 0$.

Для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ составим средние Рисса

$$\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) = \sum_{\lambda_k < \lambda} (f, v'_k)\, u'_k(x) \left(1 - \frac{\lambda'_k}{\lambda}\right)^s, \qquad (1)$$

$$\overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f) = \sum_{|\lambda''_k|<\lambda} (f, v''_k)\, u''_k(x)\left(1 - \frac{\lambda''_k}{\lambda}\right)^s, \tag{2}$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $L_2(G)$.

Пусть символы $\sqrt{\lambda'_k}$ и $\sqrt{\lambda''_k}$ обозначают те квадратные корни из комплексных чисел λ'_k и сответственно λ''_k, для которых $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda'_k} \geqq 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda''_k} \geqq$ $\geqq 0$.

В дальнейшем будем требовать выполнение условий

$$|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda'_k}| \leqq C_1 = \text{const}, \quad |\operatorname{Im}\sqrt{\lambda''_k}| \leqq C_2 = \text{const}. \tag{3}$$

Основная теорема. *Если* $\{u'_k(x)\}$ *и* $\{u''_k(x)\}$ *— две произвольные системы указанного выше вида и если выполнены условия* (3), *то для произвольного* $s > 0$ *и произвольной функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *для разности средних Рисса* (1) *и* (2) *почти в каждой точке* x *области* G *справедлива оценка*

$$|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)| = o\left(\lambda^{-\frac{s}{2}}\right) \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty. \tag{4}$$

2. Доказательство основного результата

Развивая технику работы [6], доказательству основной теоремы предошлем несколько лемм.

Договоримся обозначать символом G_R подмножство точек произвольной области G, удаленных от границы области G на расстояние, большее числа $R > 0$.

Зафиксировав произвольное достаточно малое число $R > 0$ и произвольную точку x подмножества G_R, рассмотрим среднее значение функции f на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x, обозначив его символом $\psi_x(r)$. Если обозначить символом $\int\limits_{\omega}\ldots\int f(x + r\omega)\,\mathrm{d}\omega$ интеграл по всем углам на поверхности N-мерной сферы радиуса r с центром в точке x, а символом ω_N — площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, равную $2\pi^{\frac{N}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1}$, то

$$\psi_x(r) = \omega_N^{-1} \int\limits_{\omega}\ldots\int f(x + r\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{5}$$

Далее положим

$$F(r) = F_x(r) = r^{N-1}\,\psi_x(r) \tag{6}$$

и введем операцию бесселевского дифференцирования

$$\mathrm{D}\,F(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\,F(r)\right]. \tag{7}$$

Наконец, обозначим через D^n результат n-кратного повторного применения операции D, так что

$$\mathrm{D}^n F(r) = \mathrm{D}\,[\mathrm{D}^{n-1} F(r)].$$

Лемма 1. *Для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$, произвольного достаточно малого $R > 0$, произвольной фиксированной точки x из подмножества G_R и произвольного номера n, не превосходящего числа $\dfrac{N+1}{2}$, каждый из рядов*)*

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1}\,\omega_N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k')\,u_k'(x)\,(\lambda_k')^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}-n}(r\sqrt{\lambda_k'}) \tag{8}$$

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} R^{\frac{N}{2}-n+1}\,\omega_N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k'')\,u_k''(x)\,(\lambda_k'')^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}-n}(r\sqrt{\lambda_k''}) \tag{9}$$

сходится к $\mathrm{D}^{n-1} F_x(r)$.

Доказательство. Проведем все рассуждения для первого из рядов (8), ибо для ряда (9) они аналогичны. С помощью широко известной формулы среднего значения для регулярного решения уравнения $\Delta u_k' + \lambda_k u_k' = 0$, имеющей вид

$$\int_{\omega}\!\dots\!\int u_k'(x + r\omega)\,\mathrm{d}\omega = (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_k'(x)\,(r\sqrt{\lambda_k'})^{1-\frac{N}{2}} J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_k'}), \tag{10}$$

вычислим коэффициент фурье w_k' по системе $\{u_k'(y)\}$ функции

$$w(|x-y|) = \begin{cases} \omega_N^{-1} & \text{при } |x-y| \leqq r \\ 0 & \text{при } |x-y| > r, \end{cases}$$

взятой для любого r из полусегмента $0 < r \leqq R$. Мы получим для него следующее значение:

$$w_k' = (2\pi r)^{\frac{N}{2}}\,\omega_N^{-1}\,u_k'(x)\,(\lambda_k')^{-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda_k'}).$$

Так как по условию система $\{u_k'(x)\}$ (а, стало быть, и сопряженная к ней

---

*) Символом $J_\nu(\varrho)$ обозначаем функцию Бесселя порядка ν от аргумента ϱ.

система $\{v'_k(x)\}$) образует базис Рисса, то для двух принадлежащих по y классу $L_2(G)$ функций $w(|x-y|)$ и $f(y)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}(w, u'_k)(f, v'_k) = \int_G w(|x-y|)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

которое принимает вид

$$(2\pi r)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(f, v'_k)u'_k(x)(\lambda'_k)^{-\frac{N}{4}}J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda'_k}) = \omega_N^{-1}\int_{|x-y|\leqq r} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Это равенство справедливо для любого $0 < r \leqq R$ и для любой точки x подмножества G_R. Обозначим величину, стоящую в правой части (11), через $\varphi_x(r)$ и заметим, что в силу (5) и (6) для всех $x \in G_R$, $0 < r \leqq R$ справедливо равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\varphi_x(r) = F_x(r) = F(r). \tag{12}$$

Заметим теперь, что ряд, стоящий в левой части (11), сходится в $L_2(G)$ по x равномерно по параметру r на сегменте $0 \leqq r \leqq R$. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться неравенством

$$|(\lambda'_k)^{-\frac{N}{4}}J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda'_k})| \leqq Cr^{\frac{N}{2}}$$

и вытекающей из базисности Рисса сходимостью ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f, v'_k)|^2 \tag{13}$$

Сумму ряда в левой части (11) обозначим также через $\varphi_x(r)$ и учтем, что $\varphi_x(r) \in L_2(G)$ и что при $x \in G_R$, $0 \leqq r \leqq R$ функция $\varphi_x(r)$ совпадает с величиной, стоящей в правой части (11), и для нее справедливо равенство (12).

Итак, в $L_2(G)$ по x справедливо равенство

$$(2\pi r)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(f, v'_k)u'_k(x)(\lambda'_k)^{-\frac{N}{4}}J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda'_k}) = \varphi_x(r). \tag{11$'$}$$

Формально дифференцируя равенство (11′) по r, получим

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}}\omega_N^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}r^{\frac{N}{2}}(\lambda'_k)^{\frac{1}{2}-\frac{N}{4}}J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda'_k})(f, v'_k)u'_k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\varphi_x(r)],$$

а формально применяя к последнему равенству по r операцию*) D^{n-1} при $n = 2, 3, \ldots, \left[\frac{N+1}{2}\right]$, получим

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \omega_N^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} r^{\frac{N}{2}-n+1} (\lambda'_k)^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}-n}(r\sqrt{\lambda'_k})(f, v'_k)\, u'_k(x) = = \mathrm{D}^{n-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\varphi_x(r)]\right\}. \tag{14}$$

Теперь для доказательства того, что все формально проведенные операции законны для всех r из сегмента $0 \leqq r \leqq R$, достаточно доказать, что каждый из рядов в левой части (14) $\left(\text{при любом } n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N+1}{2}\right]\right)$ сходится в $L_2(G)$ по x равномерно по параметру r на сегменте $0 \leqq r \leqq R$, а это сразу вытекает из сходимости ряда (13) и из справедливого при всех $n \leqq \frac{N+1}{2}$ неравенства

$$|r^{\frac{N}{2}-n+1} (\lambda'_k)^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}-n}(r\sqrt{\lambda'_k})| \leqq C r^{N-2n+1} \leqq C R^{N-2n+1}.$$

Остается заметить, что при любом $n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N+1}{2}\right]$ и для всех $x \in G_R$, $0 \leqq r \leqq R$ величина, стоящая в правой части (14), равна $\mathrm{D}^{n-1} F(r)$ и положить $r = R$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольного* $s \geqq -\frac{1}{2}$, *произвольного достаточно малого* $R > 0$, *произвольной функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *для разности средних Рисса* (1) *и* (2) *двух произвольных расширений* $\mathscr{L}'$ *и* $\mathscr{L}''$ *оператора Лапласа справедлива оценка*

$$\int_G \int_0^{\infty} \lambda^{s-\frac{1}{2}} |\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)|^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}\lambda \leqq C \| f \|^2_{L_2(G)}. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточно провести все рассуждения для произвольной области любого нечетного числа N измерений, ибо если лемма 2 будет доказана для произвольной нечетномерной области, то справедливость ее для произвольной области G четного числа измерений N будет

---

*) Договоримся отождествлять $\mathrm{D}^0 F(n)$ с $F(r)$.

вытекать из рассмотрения $(N+1)$-мерного цилиндра $\widetilde{G}$, равного произведению N-мерной области G на отрезок $0 \leqq x_{N+1} \leqq 2\pi$ и из рассмотрения в этом цилиндре систем, получающихся умножением собственных функций расширений $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ в области G на функции тригонометрической системы на отрезке $0 \leqq x_{N+1} \leqq 2\pi$. При этом для произвольной функции f, зависящей только от $x_1, \ldots, x_N$ и не зависящей от x_{N+1}, средние Рисса (1) и (2) расширений $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ в области G будут совпадать со средними Рисса соответствующих расширений в $(N+1)$-мерном цилиндре $\widetilde{G}$.

Итак, пусть $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ — два произвольных расширения в произвольной области G нечетного числа N измерений. Сначала установим некоторое нужное нам представление для средних Рисса (1) расширения $\mathscr{L}'$.

Вычисляя с помощью формулы среднего значения (10) коэффициент Фурье $\tilde{v}_k(x)$ взятой для любого $\lambda > 1$ функции

$$\overset{\lambda}{v}(|x-y|) = \begin{cases} \Gamma(s+1)\, 2^s (2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} |x-y|^{-\frac{N}{2}-s} J_{\frac{N}{2}+s}(|x-y|\sqrt{\lambda}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad |x-y| \leqq R \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad |x-y| > R \end{cases}$$

по системе $\{u_k'(y)\}$, мы получим, что

$$\tilde{v}_k(x) = \Gamma(s+1)\, 2^s u_k'(x)\, \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}} (\lambda_k')^{\frac{1}{2}-\frac{N}{4}} \int_0^R r^{-s} J_{\frac{N}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, J_{\frac{N}{2}-1}(r\sqrt{\lambda_k'})\, \mathrm{d}r.$$

По $\dfrac{N-1}{2}$-кратному интегрированию по частям интеграла в правой части последнего равенства, используя рекуретные соотношения

$$\int r^{-\nu} J_{\nu+1}(r\sqrt{\lambda})\, \mathrm{d}r = -(\sqrt{\lambda})^{-\nu} r^{-\nu} J_{\nu}(r\sqrt{\lambda}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^{\nu} J_{\nu}(r\sqrt{\lambda_k'})\right] = r^{\nu} \sqrt{\lambda_k'}\, J_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda_k'})$$

и учитывая обращение в нуль всех подстановок при $r = 0$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(x) = -\Gamma(s+1)\, 2^s u_k'(x) \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} (\lambda_k')^{\frac{n}{2}-\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda}) \times \\ \times J_{\frac{N}{2}-n}(R\sqrt{\lambda_k'})\, R^{-s} + \Gamma(s+1)\, 2^s u_k'(x)\, \lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} (\lambda_k')^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \int_0^R r^{-s} J_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, J_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_k'})\, \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{16}$$

Умножая обе части (16) на $(f,\ v_k')$ и суммируя полученное при этом равенство по всем k, получим в силу равенства Парсеваля для двух функций $\overset{\lambda}{v}(|x-y|)$ и $f(y)$, принадлежащих по y классу $L_2(G)$, и в силу леммы 1, что для любой точки $x \in G_R$

$$\begin{aligned}\int_G \overset{\lambda}{v}(|x-y|)\, f(y)\, \mathrm{d}y = &-\Gamma(s+1)\, 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \omega_N \Bigg(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} \times \\ &\times R^{n-\frac{N}{2}+1-s} J_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\, \mathrm{D}^{n-1} F_x(R) \Bigg) + \Gamma(s+1)\, 2^s \lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \times \\ &\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (f,\ v_k')\, u_k'(x)\, (\lambda_k')^{\frac{1}{4}} \int_0^R r^{-s} J_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, J_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_k'})\, \mathrm{d}r \right).\end{aligned} \tag{17}$$

Будем использовать для интеграла, стоящего в правой части (17), следующее представление

$$\begin{aligned}&\int_0^R r^{-s} J_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, J_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_k'})\, \mathrm{d}r = \\ &\qquad = \delta_k^{\lambda} \left\{ \Gamma(s+1)\, 2^s \lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} (\lambda_k')^{\frac{1}{4}} \right\}^{-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s + I_{\lambda_k}^{\lambda}(R),\end{aligned} \tag{18}$$

где $\delta_k^{\lambda} = 1$ при $|\lambda_k'| \leqq \lambda$ и $\delta_k^{\lambda} = 0$ при $|\lambda_k'| > \lambda$, $I_{\lambda_k'}^{\lambda}(R)$ — величина, для которой при любых $s > -1$, $\lambda > 1$, $|\lambda_k'| \geqq 1$ справедливы следующие оценки:

а) при $|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda_k'}|| > 1$

$$|I_{\lambda_k'}^{\lambda}(R)| = O(\lambda^{-\frac{1}{4}} |\lambda_k'|^{-\frac{1}{4}} |\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda_k'}||^{-1}), \tag{19}$$

б) при $|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda_k'}|| \leqq 1$

$$|I_{\lambda_k'}^{\lambda}(R)| = \begin{cases} O(\lambda^{-\frac{1}{4}} |\lambda_k'|^{-\frac{1}{4}}) & \text{при} \quad s \geqq 0 \\ O(\lambda^{-\frac{1}{4}} |\lambda_k'|^{-\frac{1}{4}} |\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda_k'}||^{s}) & \text{при} \quad -1 < s < 0 \end{cases} \tag{20}$$

Оценка (19) при любом $s > -1$ и оценка (20) при $s \geqq 0$ установлена в работе Я. Ш. Салимова [7].

Для установления оценки (20) в случае $-1 < s < 0$ достаточно земетить, что

$$\left| \lambda^{\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{\lambda_k'}{\lambda}\right)^s \right| = O(|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda_k'}||^{s}),$$

$$\left|\int_0^R r^{-s} J_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})\, J_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda'_k})\,\mathrm{d}r\right| = O(\lambda^{-\frac{1}{4}}|\lambda'_k|^{-\frac{1}{4}}).$$

Первая из этих оценок является тривиальной, а для установления второй из этих оценок достаточно заметить, что при выполнении первого из условий (3) справедливы неравенства

$$|J_{\frac{1}{2}+s}(r\sqrt{\lambda})| \leqq C_1 r^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}$$

$$|J_{-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda'_k})| \leqq C_2 r^{-\frac{1}{2}}|\lambda'_k|^{-\frac{1}{4}}.$$

Сопоставляя (17) и (18), мы получим соотношение

$$\begin{aligned}\int_G \overset{\lambda}{v}(|x-y|)f(y)\,\mathrm{d}y = {} & -\Gamma(s+1)\,2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} R^{n-\frac{N}{2}-1-s} J_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\,\mathrm{D}^{n-1}F_x(R) + \\ & + \overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) + \Gamma(s+1)\,2^s\lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}(f,v'_k)\,u'_k(x)\,(\lambda'_k)^{\frac{1}{4}} I^\lambda_{\lambda'_k}(R).\end{aligned} \tag{21}$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается подобная формула для расширения $\mathscr{L}''$:

$$\begin{aligned}\int_G \overset{\lambda}{v}(|x-y|)f(y)\,\mathrm{d}y = {} & -\Gamma(s+1)\,2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\omega_N \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \lambda^{\frac{N}{4}-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}} R^{n-\frac{N}{2}-1-s} J_{\frac{N}{2}+s-n}(R\sqrt{\lambda})\,\mathrm{D}^{n-1}F_x(R) + \\ & + \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f) + \Gamma(s+1)\,2^s\lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}(f,v''_k)\,u''_k(x)\,(\lambda''_k)^{\frac{1}{4}} I^\lambda_{\lambda''_k}(R).\end{aligned} \tag{22}$$

Беря разность соотношений (21) и (22), получим

$$\begin{aligned}\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f) = {} & \Gamma(s+1)\,2^s\lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}(f,v'_k)\,u'_k(x)\,I^\lambda_{\lambda'_k}(R) - \\ & -\Gamma(s+1)\,2^s\lambda^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty}(f,v''_k)\,u''_k(x)\,I^\lambda_{\lambda''_k}(R).\end{aligned} \tag{23}$$

Из соотношения (23) следует, что

$$\int_G \int_0^{\mu} \lambda^{s-\frac{1}{2}} |\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\lambda \leqq$$

$$\leqq 2\Gamma^2(s+1)\, 2^{2s} \int_0^{\mu} \left\{ \int_G \left| \sum_{k=1}^{\mu} (f, v'_k)\, u'_k(x)\, I^{\lambda}_{\lambda_k}(R) \right|^2 \mathrm{d}x \right\} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \tag{24}$$

$$+ 2\Gamma^2(s+1)\, 2^{2s} \int_0^{\mu} \left\{ \int_G \left| \sum_{k=1}^{\mu} (f, v''_k)\, u''_k(x)\, I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R) \right|^2 \mathrm{d}x \right\} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Из неравенства (24) и из неравенства типа Гильберта (которое справедливо для базиса Рисса), мы получим неравенство

$$\int_G \int_0^{\mu} \lambda^{s-\frac{1}{2}} |\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x, f)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\lambda \leqq$$

$$\leqq 4\Gamma^2(s+1)\, 2^{2s} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu} |(f, v'_k)|^2 \left[\int_0^{\mu} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \right] + \right. \tag{25}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\mu} |(f, v''_k)|^2 \left[\int_0^{\mu} |I^{\lambda}_{\lambda''_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \right] \right\}.$$

В силу неравенства типа Бесселя для получения из (25) искомой оценки (15) достаточно доказать существование постоянных C_1 и C_2 таких, что

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mu} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq C_1, \\ &\int_0^{\mu} |I^{\lambda}_{\lambda''_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq C_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Для установления первой оценки в (26), разобьем интеграл

$$\int_0^{\infty} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda})$$

на сумму двух интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) = &\int_{|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda'_k}| > 1} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) + \\ &+ \int_{|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_k}| < 1} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \end{aligned} \tag{27}$$

и для оценки их используем соотношения (19) и (20). Тогда будем иметь

$$\int_{|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|| > 1} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \,\mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq C'_1 \int_{|\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_k}| > 1} \lambda^{-\frac{1}{2}} |\lambda'_k|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$
\times |\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}||^{-2} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq C'_1 \int_{|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|| > 1} |\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}||^{-2} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) =
$$

$$
= C'_1 \left(\int_0^{|\sqrt{\lambda'_k}| - 1} (|\sqrt{\lambda'_k}| - \sqrt{\lambda})^{-2} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) + \right. \tag{28}
$$

$$
\left. + \int_{|\sqrt{\lambda'_k}| + 1}^{\infty} (\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|)^{-2} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \right) \leqq 2C'_1 \int_1^{\infty} t^{-2} \mathrm{d}t \leqq C'_2,
$$

причем мы здесь сделали замену переменной, положив в первом из интегралов, стоящих в скобках, $t = |\sqrt{\lambda'_k}| - \sqrt{\lambda}$, а во втором $t = \sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|$.

Теперь оценим второй интеграл, стоящий в правой части (27):

$$
\int_{\sqrt{\lambda}\quad|\sqrt{\lambda'_k}|| \leqq 1} |I^{\lambda}_{\lambda'_k}(R)|^2 \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) = \tag{29}
$$

$$
= \begin{cases} C'_3 \int_{|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|| \leqq 1} \lambda^{-\frac{1}{2}} |\lambda'_k|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq C'_3 \int_{|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|| \leqq 1} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) = 2C_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } s \geqq 0 \\ C'_4 \int_{|\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}|| \leqq 1} \lambda^{-\frac{1}{2}} |\lambda'_k|^{-\frac{1}{2}} |\sqrt{\lambda} - |\sqrt{\lambda'_k}||^{2s} \mathrm{d}(\sqrt{\lambda}) \leqq 2C'_4 \int_0^1 t^{2s} \mathrm{d}t = C_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } -\frac{1}{2} < s < 0. \end{cases}
$$

Из сопоставления соотношений (27)—(29) вытекает первая из оценок (26). При этом нужно отметить, что выступающие в оценках постоянные не зависят ни от λ, ни от k, а только от R и s.

Лемма 3. *Для любого* $s > -1$, *для любого достаточно малого* R *и для любых двух расширений* $\mathscr{L}'$ *и* $\mathscr{L}''$ *оператора Лапласа найдется последовательность* $\{\tilde{\lambda}_n\}$ *такая, что* $(n-1)^2 \leqq \tilde{\lambda}_n \leqq n^2$ *и почти всюду в* G_R

$$
|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x, f)| = o\left(\tilde{\lambda}_n^{-\frac{s}{2}}\right). \tag{30}
$$

Доказательство. При доказательстве леммы 2 нами была установлена сходимость „двойного интеграла“

$$
\int_0^{+\infty} \lambda^{s - \frac{1}{2}} \left(\int_{G_R} |\overset{s}{\sigma}{}'_{\lambda}(x, f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\lambda}(x, f)|^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\lambda < \infty. \tag{31}
$$

Представляя интеграл (31) в виде суммы

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \lambda^{s-\frac{1}{2}}\left(\int_{G_R} |\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)|^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda &= \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)^2}^{n^2} \left\{\int_{G_R} [\lambda^{\frac{s}{2}}|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)|]^2\,\mathrm{d}x\right\} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned} \tag{32}
$$

и применяя формулу среднего значения к каждому интегралу, стоящему под знаком суммы, получим, что существует такое $\tilde{\lambda}_n$, что $(n-1)^2 \leqq \tilde{\lambda}_n \leqq n^2$ и

$$
\begin{aligned}
\int_{(n-1)^2}^{n^2} \left\{\int_{G_R} [\lambda^{\frac{s}{2}}|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)|]^2\,\mathrm{d}x\right\} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda}} &= \\
= \int_{G_R} [\tilde{\lambda}^{\frac{s}{2}}_n|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x,f)|]^2\,\mathrm{d}x \int_{(n-1)^2}^{n^2} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda}} &= \\
= 2\int_{G_R} [\tilde{\lambda}^{\frac{s}{2}}_n|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x,f)|]^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Приняв во внимание (31)—(33), приходим к выводу, что

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_R} [\tilde{\lambda}^{\frac{s}{2}}_n|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x,f)|]^2\,\mathrm{d}x < \infty.
$$

Из последнего неравенства и из теоремы Б. Леви следует, что почти всюду в G_R сходится ряд

$$
\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{\lambda}^{\frac{s}{2}}_n|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x,f)|]^2,
$$

а необходимым условием сходимости последнего ряда почти всюду в G_R является выполнение для почти всех точек из G_R оценки (30). Лемма 3 доказанна.

Доказательство основной теоремы. В доказательстве мы будем опираться на следующее представление риссовских средних порядка s через риссовские средние более низкого порядка δ (доказательство его можно провести, например, аналогично тому, как это делается в случае суммирования (C, α) интегралов в [8], стр. 39, приняв по внимание, что

$$
\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda(x,f) = s\int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-1}\sigma_t(x,f)\,\mathrm{d}t
$$

(см. [9], стр. 256), где

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\lambda(x,f) = \sum_{|\lambda_k| \leqq \lambda} (f, v_k)\, u_k(x): \\
&\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda(x,f) = C(s,\delta) \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-\delta-1}\, t^\delta \overset{\delta}{\sigma}_t(x,f)\, \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{34}
$$

здесь $C(s, \delta) = \Gamma(s+1)[\Gamma(s-\delta)\Gamma(\delta+1)]^{-1}$, $s > \delta > -\frac{1}{2}$. Из представления (34) следует, в частности, что

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda^s \overset{s}{\sigma}_\lambda] = \lambda^{s-1} \overset{s-1}{\sigma_\lambda} \quad (\text{для яюбого } s > \tfrac{1}{2}). \tag{35}
$$

Пусть λ и $\tilde{\lambda}$ — любые два значения переменной λ, связанные неравенством $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leqq C\sqrt{\lambda}$, где C — достаточно большое фиксированное число. На основании леммы 3 для доказательства справедливости почти всюду в G_R оценки (4), достаточно доказать, что для указанных λ и $\tilde{\lambda}$ почти всюду в G_R справедлива оценка

$$
\lambda^s |\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)| - \tilde{\lambda}^s |\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}}(x,f)| = o\left(\lambda^{\frac{s}{2}}\right)^{*)}. \tag{36}
$$

Для установления оценки (36) рассмотрим два случая: 1) $s > \frac{1}{2}$; 2) $0 < s < \frac{1}{2}$.

В случае $s > \frac{1}{2}$, интегрируя соотношение

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda^s(\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda)] = \lambda^{s-1}(\overset{s-1}{\sigma'_\lambda} - \overset{s-1}{\sigma''_\lambda})
$$

в пределах от $\tilde{\lambda}$ до λ, где $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leqq C\sqrt{\lambda}$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)] - \tilde{\lambda}^s[\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}}(x,f)] = \\
&\quad = \int_{\tilde{\lambda}}^{\lambda} t^{s-1}(\overset{s-1}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-1}{\sigma''_t}(x,f))\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Переходя к модулям и применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$
|\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)] - \tilde{\lambda}^s[\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}}(x,f)]| \leqq
$$

---

*) Действительно, пусть для любых λ и $\tilde{\lambda}$, удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \tilde{\lambda} \leqq C\sqrt{\lambda}$, справедлива оценка (36). Для любого $\lambda > 0$ существует номер n такой, что $(n-1)^2 \leqq \lambda \leqq n^2$. Согласно лемме 3, для указанного номера n найдется число $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_n$ такое, что $(n-1)^2 \leqq \tilde{\lambda}_n \leqq n^2$, так что $|\lambda - \tilde{\lambda}_n| \leqq C\sqrt{\lambda}$, причем для $|\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde{\lambda}_n}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde{\lambda}_n}(x,f)|$ справедлива оценка (30). Сопоставляя оценки (30) и (36), взятой при $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_n$, получим оценку (4).

$$\leqq \left\{\int_{\tilde\lambda}^{\lambda} \left(t^{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}}\right)^2 \left|\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\tilde\lambda}^{\lambda} \left(t^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\right)^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Ввиду справедливости оценки

$$\left\{\int_{\tilde\lambda}^{\lambda} t^{s-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(\lambda^{\frac{s}{2}}\right) \tag{38}$$

при $|\lambda - \tilde\lambda| \leqq C\sqrt{\lambda}$, из предположения $s > \frac{1}{2}$ и из сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \lambda^{s-\frac{1}{2}} \left|\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)\right|^2 \mathrm{d}\lambda$$

для любого $s > -\frac{1}{2}$ (см. лемму 2) вытекает, что

$$\left\{\int_{\tilde\lambda}^{\lambda} t^{s-\frac{3}{2}} \left|\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} = o(1). \tag{39}$$

Из сопоставления соотношений (37) – (39) следует, что при $s > \frac{1}{2}$ справедлива оценка (36).

Для завершения доказательства основной теоремы остается установление оценки (36) в случае $0 < s < \frac{1}{2}$. Из соотношения (34), взятого при $\delta = s - \frac{1}{2}$, получим, что

$$\begin{aligned}
&\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)] - \tilde\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde\lambda}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde\lambda}(x,f)] = \\
&\quad = C(s, s-\tfrac{1}{2})\left[\int_0^{\lambda} (\lambda - t)^{-\frac{1}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\right]\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right)\mathrm{d}t - \\
&\quad - \int_0^{\tilde\lambda} (\tilde\lambda - t)^{-\frac{1}{2}} t^{s-\frac{1}{2}}\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{40}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\tilde\lambda \leqq \lambda$, так что $0 \leqq \lambda - \tilde\lambda \leqq C\sqrt{\lambda}$. Тогда равенство (40) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_\lambda(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_\lambda(x,f)] - \tilde\lambda^s[\overset{s}{\sigma}{}'_{\tilde\lambda}(x,f) - \overset{s}{\sigma}{}''_{\tilde\lambda}(x,f)] = \\
&\quad = C(s, s-\tfrac{1}{2})[I_1 + I_2 + I_3],
\end{aligned} \tag{41}$$

где

$$I_1 = \int_0^{\lambda - 2(\lambda - \tilde\lambda)} \left[(\lambda - t)^{-\frac{1}{2}} - (\tilde\lambda - t)^{-\frac{1}{2}}\right] t^{s-\frac{1}{2}}\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right)\mathrm{d}t, \tag{42}$$

$$I_2 = \int_{\lambda - 2(\lambda - \tilde{\lambda})}^{\lambda} (\lambda - t)^{-\frac{1}{2}} t^{s - \frac{1}{2}} \Bigl(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr) \, \mathrm{d}t, \tag{43}$$

$$I_3 = \int_{\lambda - 2(\lambda - \tilde{\lambda})}^{\tilde{\lambda}} (\tilde{\lambda} - t)^{-\frac{1}{2}} t^{s - \frac{1}{2}} \Bigl(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr) \, \mathrm{d}t. \tag{44}$$

Достаточно доказать, что почти всюду в G_R каждый из интегралов I_1, I_2, I_3 по модулю есть $o(\lambda^{\frac{s}{2}})$. Для оценки интеграла (42) применим к нему неравенство Коши – Буняковского и воспользуемся тривиальным неравенством

$$[(\lambda - t)^{-\frac{1}{2}} - (\tilde{\lambda} - t)^{-\frac{1}{2}}]^2 \leqq (\tilde{\lambda} - t)^{-1} - (\lambda - t)^{-1} \quad (t < \tilde{\lambda} \leqq \lambda).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} |I_1| \leqq & \left\{ \int_0^{\lambda - 2(\lambda - \tilde{\lambda})} [(\tilde{\lambda} - t)^{-1} - (\lambda - t)^{-1}] \, \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ \int_0^{\lambda} t^{2s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr|^2 \, \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Далее, в силу условия $0 \leqq \lambda - \tilde{\lambda} \leqq C\sqrt{\lambda}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\lambda - 2(\lambda - \tilde{\lambda})} [(\tilde{\lambda} - t)^{-1} - (\lambda - t)^{-1}] \, \mathrm{d}t = \\ & = \left[\ln \frac{\lambda - t}{\tilde{\lambda} - t} \right]_{t = 0}^{t = \lambda - 2(\lambda - \tilde{\lambda})} = \ln 2 + \ln \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = O(1). \end{aligned} \tag{46}$$

Для второго интеграла в правой части (45) получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} t^{2s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{\lambda}} t^{2s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr|^2 \, \mathrm{d}t + \\ + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} t^{2s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr|^2 \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_0^{\lambda} t^{2s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t} (x, f) \Bigr|^2 \, \mathrm{d}t \leqq (\sqrt{\lambda})^s \int_0^{\sqrt{\lambda}} t^{s - 1} \Bigl| \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t} (x, f) -$$

$$- \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)|^2\,dt + \lambda^s \int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda} t^{s-1} |\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)|^2\,dt$$

и, стало быть, в силу леммы 2 почти всюду в G_R

$$\int_0^{\lambda} t^{2s-1} |\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)|^2\,dt = o(\lambda^s). \tag{47}$$

Из соотношений (45)—(47) вытекает, что $|I_1| = o(\lambda^{\frac{s}{2}})$ почти всюду в G_R.

Остается доказать, что каждый из интегралов (43) и (44) по модулю есть $o(\lambda^{\frac{s}{2}})$ почти всюду в G_R. Приведем доказательство лишь для (43), потому что для (44) оно проводится аналогично.

Приняв во внимание, что $s > 0$ и заменив в формуле (34) s на $\left(s - \frac{1}{2}\right)$, а δ на $\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right)$, получим

$$\begin{aligned} t^{s-\frac{1}{2}}\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right) &= C\left(s - \frac{1}{2}, \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \\ &\times \int_0^t (t-u)^{\frac{s}{2}-1} u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\overset{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}{\sigma'_u}(x,f) - \overset{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}{\sigma''_u}(x,f)\right) du. \end{aligned} \tag{48}$$

Воспользуемся теперь тем, что для так называемого интеграла дробного порядка

$$\tilde{f}_\alpha(t) = \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \tilde{f}(u)\,du$$

при любых $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \alpha$ и для любой функции $\tilde{f}(t) \in L_2[0, \lambda]$ справедлива оценка

$$\|\tilde{f}_\alpha\|_{L_p[0,\lambda]} \leqq C_\alpha \|\tilde{f}\|_{L_2[0,\lambda]} \tag{49}$$

где C_α — постоянная, зависящая лишь от α. Вывод указанной оценки можно найти в монографии [10], стр. 348.

Применим оценку (49), взятую при $\alpha = \frac{s}{2}$ $\left(\text{так как } 0 < s \leqq \frac{1}{2}, \text{ то } 0 < \alpha \leqq \frac{1}{4}\right)$ к интегралу (48), будем иметь

$$\|t^{s-\frac{1}{2}}\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}(x,f) - \overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t}(x,f)\right)\|_{L_p[0,\lambda]} \leqq$$

$$\leqq C\left(\int_0^\lambda u^{s-1}|\overset{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}{\sigma'_u}(x,f)-\overset{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}{\sigma''_u}(x,f)|^2\,\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}},\quad \text{где } \frac{1}{p}=\frac{1-s}{2}. \tag{50}$$

Если теперь применить к интегралу, стоящему в правой части (50) те же рассуждения, что и к интегралу в правой части (45), то получим из (50), что для почти всех x из G_R

$$\|t^{s-\frac{1}{2}}(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}-\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t})\|_{L_p[0,\lambda]}=o(\lambda^{\frac{s}{4}}),\quad \text{где } \frac{1}{p}=\frac{1-s}{2}. \tag{51}$$

Теперь для оценки интеграла (43) по модулю достаточно к интегралу применить неравенство Гельдера

$$|I_2|\leqq\left(\int_{\lambda-2(\lambda-\bar\lambda)}^{\lambda}(\lambda-t)^{-\frac{q}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\|t^{s-\frac{1}{2}}(\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma'_t}-\overset{s-\frac{1}{2}}{\sigma''_t})\|_{L_p[0,\lambda]}$$

при $\frac{1}{q}=\frac{1+s}{2}$, $\frac{1}{p}=\frac{1-s}{2}$ и воспользоваться оценкой (51) и элементарной оценкой

$$\left(\int_{\lambda-2(\lambda-\bar\lambda)}^{\lambda}(\lambda-t)^{-\frac{q}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^{2(\lambda-\bar\lambda)}u^{-\frac{1}{1+s}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1+s}{2}}\leqq$$

$$\leqq\left(\int_0^{2C\sqrt{\lambda}}u^{-\frac{1}{1+s}}\mathrm{d}u\right)^{\frac{1+s}{2}}=O(\lambda^{\frac{s}{4}}).$$

Мы получим при этом, что $|I_2|=o(\lambda^{\frac{s}{2}})$ для почти всех x из G_R. Посколку для доказательства оценки модуля интеграла (44) рассуждения аналогичны, то доказательство основной теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ИЛЬИН, В. А.: Оценка разности средних Рисса двух спектральных разложений для функции из класса L_2. Диффер. уравнения, т. 24, 1988, № 5, 852—863.

[2] ПАВЛОВ, В. С.: Базисность системы экспонент и условия Макенхоупта. ДАН СССР, т. 247, 1979, № 1, 37—40.

[3] НИКОЛЬСКИЙ, Н. К.: Базисы из экспонент и значения воспроизводящих ядер. ДАН СССР, т. 252, 1980, № 6, 1316—1320.

[4] СЕДЛЕЦКИЙ, А. М.: Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси. Успехи матем. наук, т. 37, 1982, № 5, 51—95.

[5] ИЛЬИН, В. А.: Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора. ДАН СССР, т. 274, 1984, № 1, 19 22.

[6] ИЛЬИН, В. А.: Обобщенный принцип локализации для риссовских средних ряда Фурье по произвольной ФСФ оператора Лапласа с дискретным спектром. Диффер. уравнения, т. 6, 1970, № 7, 1143 1158.

[7] САЛИМОВ, Я. Ш.: Аналог многомерного разрывного множителя Дирихле для средних Рисса в комплексной области. Математ. заметки, т. 40, 1986, № 4, 492 510.

[8] ТИТЧМАРШ, Э.: Введение в теорию интегралов Фурье. Гос. изд. Т.-Т. лит., Москва 1948.

[9] ТИТЧМАРШ, Э.: Разложение по собственным функциям связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. т. II. Изд. иностр. лит., Москва 1961.

[10] ХАРДИ, Г. Г. ЛИТТВУД, Дж. Е. ПОЛИА, Г.: Неравенства. Изд. иностр. лит., Москва 1948.

Received January 10, 1989

117 234 Москва
В-234 Ленинские горы МГУ
Факультет ВМК
Кафедра общей математики

Katedra matematickej analýzy
MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava