

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Stanislav Kubík
Elektrické modely

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 3, 346--350

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137213>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ELEKTRICKÉ MODELÝ

Spolu s rozvojem přírodních a technických věd vznikají stále nové oblasti použití elektřiny. V posledních letech byla velká pozornost věnována použití elektřiny pro modelování fyzikálních jevů. Řešení tohoto problému má velký vědecký a praktický význam. Pomocí uměle sestrojeného elektrického modelu nějakého složitého jevu je možno provést potřebná zkoumání a výpočty. A v tom v podstatě spočívá jeden ze základních úkolů aplikovaných věd.

Původ metody elektrického modelování fyzikálních jevů spočívá v oblasti učení o podobnosti jevů jedné a téže fyzikální podstaty. Podstata problémů, řešených pomocí teorie podobnosti, spočívá v následujícím: Na základě výsledků pokusů na modelech je potřeba určit pro nějaký fyzikální objekt, podobný modelu, příslušná číselná data, na př. dráhy, rychlosti, zrychlení, síly napětí, práce, výkonu, teploty, atd.

Podle druhu zkoumaných fyzikálních jevů rozlišujeme podobnost statickou, dynamickou, tepelnou, termodynamickou, elektrickou, magnetickou. Nejjednodušší pojmy o geometrické podobnosti obrazců se určitým způsobem nechají rozšířit i na stejnorodé fyzikální jevy.

Theorie o podobnosti se velmi používá pro zpracování a zobecnění dat, získaných experimentálně. Theorie modelování stanoví zákony, jak je potřeba stavět modely a pracovat s nimi při sledování a výzkumu fyzikálních jevů obvykle jedné a téže podstaty. Ruští a sovětské vědci dosáhli značných úspěchů v této oblasti vědy. A. N. Krylov použil metody podobnosti při výzkumu modelů vojenských lodí v pokusném bazénu. N. J. Žukovskij prováděl svá pozorování modelů letadel v aerodynamických tunelech. Velkých úspěchů dosáhl také M. V. Kirpičev při modelování tepelných zařízení a při rozvoji obecné teorie modelování. Na problémech modelování fyzikálních jevů pracuje také celá řada vědců v západních státech (G. Kron, Carter, V. Bush, G. Korn, T. Korn a další).

Metody matematické analogie mechanických, akustických, hydraulických a jiných jevů jsou velmi rozšířené. Princip matematické analogie umožňuje experimentálně najít pomocí modelu řešení diferenciální rovnice v té oblasti, kde je možno experiment realizovat přesně a co nejnázce. Je těžké najít pro tento účel vhodnější oblast techniky než je elektrotechnika. Konstanty elektrických obvodů, potřebné pro tento účel, kondensátory indukčnosti, odpory — jsou snadno přenosné, levné a mohou být vyrobeny s potřebnou přesností. V elektrotechnice existují také dokonalé měřicí přístroje a metody pro měření elektrických veličin. Z toho vyplývá poměrná snadnost, s kterou je možno na základě analogie řešit problémy z ostatních oblastí techniky a fyziky pomocí elektrických modelů.

Elektrické modelování je tedy methodou experimentálního zkoumání fyzikálních procesů za podmínek přesně matematicky zformulovaných. Pomocí uměle vytvořeného elektrického modelu nějakého složitého jevu je možno provést nutné inženýrské odhady, vědecké výzkumy, projekční výpočty, zkoumat dynamické vlastnosti daného zařízení. Elektrický model se vytváří podle dané rovnice a daných podmínek pomocí určitého počtu jednoduchých prvků elektrických obvodů. Podobně jako chemici uměle vytvářejí z jednoduchých chemických prvků syntetický kaučuk, benzin a další látky, vytvářejí elektrotechnici z elementů elektrických obvodů složité elektrické soustavy, odpovídající daným podmínkám. To je tedy úkol specialistů, kteří se zabývají elektrickým modelováním. Řeší jej tak, aby sestrojeného modelu mohli používat také inženýři ostatních oborů.

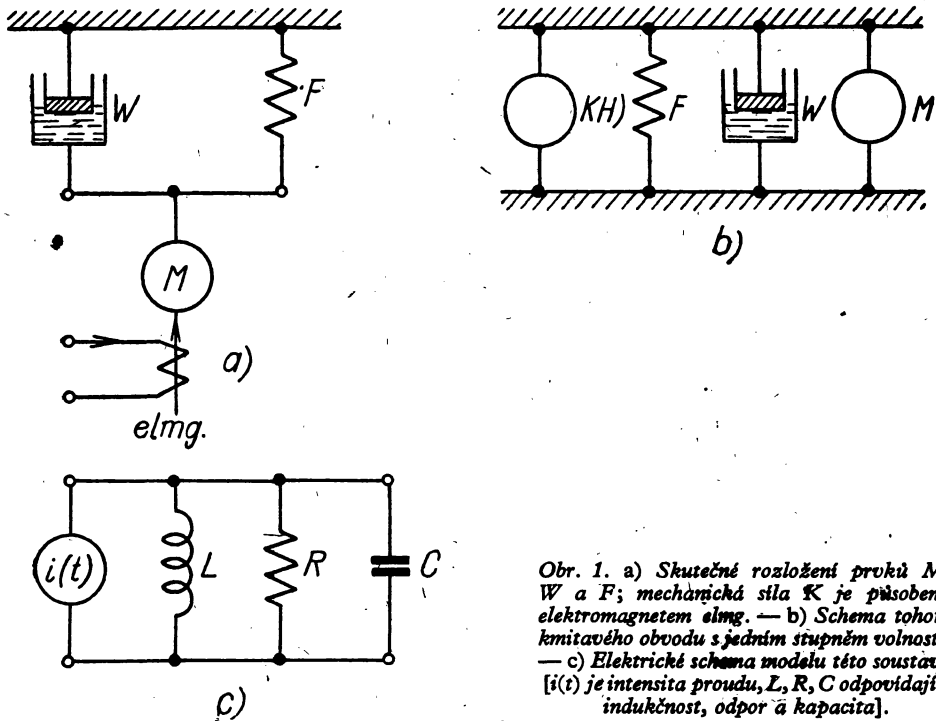
Při elektrickém modelování je využíváno analogie mezi elektrickými a jinými jevy

(na př. mechanickými, akustickými, hydraulickými atd.). Rovnice pro mnohé navzájem odlišné jevy jsou často tytéž. V uplynulém století mnozí učenci hledali pro elektrické jevy, v té době nové a málo prozkoumané, analogii v oblasti tehdy více známých jevů mechanických, tepelných a dalších. Tak Maxwell vyložil pomocí mechaniky Lagrangeovu teorii elektromagnetických procesů. Dnes naopak uměle vyvoláváme elektrické procesy, analogické jiným fyzikálním pochodům.

V posledních patnácti letech byla vypracována jednoduchá analogie pro stacionární procesy, popisované Laplaceovou rovnicí. Od r. 1929 byly v Akademii věd SSSR rozvíjeny obecné teorie a metody elektrického modelování jevů, popisovaných diferenciálními rovnicemi matematické fyziky. Při modelování jevů, spojených se šířením různých vln v prostoru a času, při zjišťování přechodných procesů v složitých soustavách je nutno používat všechny prostředky radiotechniky. Jsou to zdroje proudu různé frekvence (od 10^{-2} do 10^6 Hz), různé velikosti napětí (od 10^{-3} do 10^3 voltu), různé proudové intenzity (od 10^{-5} do 10^2 A).

Průběhy křivek proudu a napětí mohou být libovolně zadány. Jsou dále používány odpory stálých i proměnných hodnot od 10^{-1} do $10^7 \Omega$, kondensátory různé kapacity (od 10^{-11} do 10^{-6} F), indukčnosti (od 10^{-2} do 10 H), transformátorky, elektronky, obrazovky, magnetické zesilovače a relé.

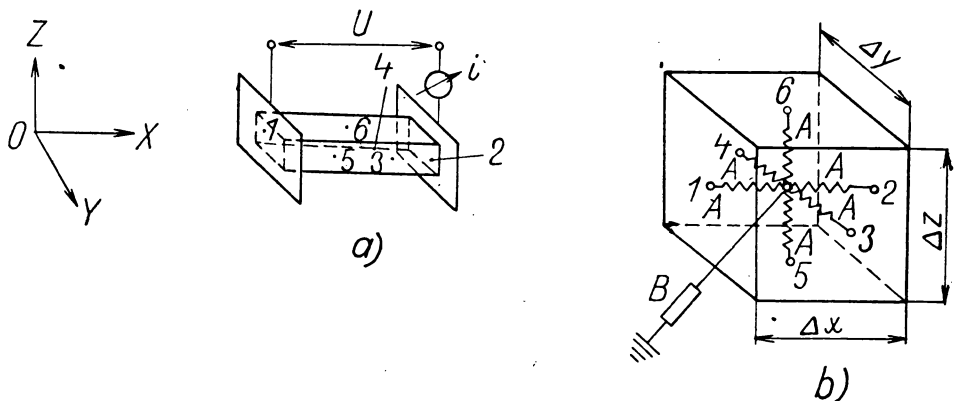
Známa náhradní schemata dlouhých vedení, kabelových vedení, izolátorových řetězců, transformátorů atd., která jsou v elektrotechnice používána již 50 let, je možno považovat



Obr. 1. a) Skutečné rozložení prvků M , W a F ; mechanická síla K je působena elektromagnetem $elmg$. — b) Schema tohoto kmitavého obvodu s jedním stupněm volnosti. — c) Elektrické schéma modelu této soustavy [$i(t)$ je intenzita proudu, L , R , C odpovídající indukčnost, odpor a kapacita].

za modelování jevů v stejnorodých oblastech pomocí elektrických obvodů se soustředěnými parametry.

Obecná teorie elektrického modelování procesů probíhajících v prostoru a času je novou oblastí teorie elektrických obvodů se soustředěnými parametry. Objasníme pojem „elektrické obvody se soustředěnými parametry“:



Obr. 2. a) Schema pokusu určení vodivosti mezi hranami 1 a 2. — b) Síťový model elementárního kvádru.

Rychlost šíření elektromagnetických vln v prostoru je $3 \cdot 10^5$ km/sec (300 000 km/sec). Mějme na př. proud o frekvenci 10^4 Hz. Doba jedné periody je 10^{-4} sec. Délka vlny je rovna 30 km ($3 \cdot 10^5 : 10^4 = 30$). Má-li element obvodu (na př. odpor) délku 0,1 m, činí fázový posun, vzniklý v důsledku zpoždění na tomto odporu za $1/3 \cdot 10^{-9}$ sekundy asi 10^{-5} el. stupňů (t. j. asi $\frac{3}{108}$ periody proudu — 10^{-4} km : $3 \cdot 10^5$ km/sec = $1/3$

10^{-9} sec). Je tedy jasné, že při vyšetřování procesů v obvodech, jejichž elementy mají délku zanedbatelně malou ve srovnání s délkou vlny proudu, je možno uvažovat konstanty těchto elementů za soustředěné v „bodě“ a zanedbat zpoždování elektromagnetických procesů v těchto elementech. Tím také uvažujeme, že je intenzita proudu stejná v počátečním konečném bodě daného elementu v libovolném časovém okamžiku. Při vyšetřování elektrických procesů při velmi vysokých frekvencích se však na element délky 0,1 m bude ukládat 10 celých centimetrových vln nebo jedna vlna o délce 0,1 m (fázový posun 36°). Tak je potřeba v každém jednotlivém případě prověřit, je-li možno považovat parametry za soustředěné v bodě. Teorie elektrických obvodů se soustředěnými parametry byla velmi rozšířena a byla použita pro analýzu procesů i v jiných oblastech, na př. v mechanice, akustice, regulaci a pod.

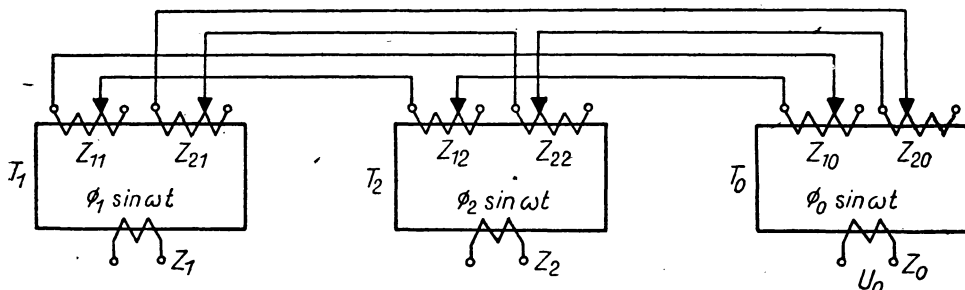
Na obr. 1 jsou jednoduchá schemata mech. obvodu a jemu ekvivalentního obvodu elektrického (oba obvody se soustředěnými parametry).

Kapalinné tření W je vyvozováno tlumičem s vrstvou vazkého oleje mezi pístem a válcem. Pružnost soustavy je představována pružinou F , massa M absolutně tvrdým tělesem. Působením vnější síly K (elmagnet) dochází k rozkmitání soustavy. Diferenční rovnice popisující tento pohyb má tvar

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + W \frac{dx}{dt} + \frac{x}{F} = K(t).$$

Vztahy mezi silou K , posunem bodu této soustavy a jeho rychlostí jsou analogické vztahům mezi intenzitou proudu, nábojem a napětím na odporu, indukčnosti a kondensátoru — elementech el. obvodu.

Theorie obvodů se soustředěnými parametry je tedy založena na faktu, že řešení nutno uvažovat vliv prostorového faktoru na rozdělení proudů a napětí v elementech obvodu. Tak vznikl pojem dvoupólu, čtyřpólu a obecně n -pólu. Jsou to elementy elektrických obvodů soustředěné v bodě a nemající rozměrů na srovnání s délkou vlny.



Obr. 3. Model z transformátorů pro řešení soustavy dvou algebraických rovnic.

Theorie elektrického modelování přechodných stavů, probíhajících v prostoru a času, naproti tomu vznikla jako výsledek přiřazení geometrického smyslu dvoupólu nebo n -pólu.

Parametry elementů elektrických obvodů se stanoví jako funkce geometrických rozměrů, podle úmluvy připisované elementům obvodu. Toto umožnilo vytvoření nové formy zobecnění a rozvoje nového směru v obecné teorii obvodů.

Proveďme myšlenkově následující experiment s určitým elementárním objemem vidivého materiálu (obr. 2).

K hranám 1 a 2 přiložíme elektrody a určíme vodivost mezi nimi (A_{1-2}) z poměru proudu a napětí $\frac{i}{u} = A$. Je známo, že vodivost je přímo úměrná obsahu příčného průřezu $\Delta y \cdot \Delta z$ a nepřímo úměrná vzdálenosti Δx mezi deskami 1 a 2:

$$A_{1-2} = A_0 \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x},$$

A_0 je specifická vodivost při $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$. Tímtež způsobem určíme hodnotu vodivosti mezi hranami 3—4 a 5—6:

$$A_{3-4} = A_0 \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y}, \quad A_{5-6} = A_0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z}.$$

Vztáhneme nyní hodnoty napětí k jednotlivým, diskretně rozloženým bodům prostoru, na př. k bodům 1, 2, ... 6 (obr. 2b). Při tomto předpokladu je možno vodivost A_{k-l} ,

rozdělenou po celém objemu hranolu mezi hranami, zaměnit vodivostí soustředěnou mezi body 1—2, 3—4, 5—6, ležícími na těchto hranách, t. j. dvojpóly. Je vidět, že pro tři směry (x, y, z) jsou potřeba tři dvojpóly.

Experimentálně nebo výpočtem je možno určit vlastnosti elementárního hranolu jako zdroje nebo spotřebiče energie. Tyto vlastnosti, rozdělené po celém objemu $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ mohou být též podle úmluvy nahrazeny vlastnostmi pasivních nebo aktivních (obsahujících zdroje energie) dvojpólů, spojených v jednom společném bodě — centru. Zdroje energie (elementy B) se jedním pólem připojí k centrálnímu bodu vodivosti A a druhým pólem se připojí k společnému uzemnění. Z takových elementárních hranolů je možno sestavit model složitějšího objektu spojením v jeden elektrický obvod. Tak vzniká t. zv. metoda sítí.

Uvedme některé případy elektrických modelů.

Modely z pasivních čtyřpólů (transformátorů).

Na obr. 3 je model z transformátorů pro řešení soustavy dvou algebraických rovnic.

T_1, T_2, T_0 jsou mnohavinutové transformátory; Z_{kl} — cívky s vývody; U_0 — napětí zdroje střídavého proudu, $\Phi_k \sin \omega t$ okamžité hodnoty mg. toku v jádrech transformátorů.

V jádře transformátorů T_0 se vybudí stříd. mg. tok s amplitudou Φ_0 . V dalších cívkách tohoto transformátoru se indukují elektromotorické síly, úměrné celkovému mg. toku Φ_0 a počtu závitů Z_{10} a Z_{20} :

$$Z_{10} \Phi_0, \quad Z_{20} \Phi_0.$$

Tyto síly vybudí v transformátorech T_1 a T_2 magnetické toky Φ_1 a Φ_2 , jejichž velikost může být určena pomocí Kirchhoffova zákona pro uzavřené el. obvody (\sum elektromotorických sil = 0). V uvažovaném případě existují dva uzavřené obvody, které vedou na soustavu dvou algebraických rovnic

$$\begin{aligned} Z_{11} \Phi_1 + Z_{12} \Phi_2 + Z_{10} \Phi_0 &= 0, \\ Z_{21} \Phi_1 + Z_{22} \Phi_2 + Z_{20} \Phi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Nechť je základní veličinou amplituda magnetického toku Φ_0 transformátoru T_0 , která je prakticky dána napětím sítě a cívkou z_0 .

Označme

$$x_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \quad x_2 = \frac{\Phi_2}{\Phi_0}.$$

Potom předchozí rovnice je možno přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} z_{11} x_1 + z_{12} x_2 + z_{10} &= 0, \\ z_{21} x_1 + z_{22} x_2 + z_{20} &= 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že hledané mg. toky jsou určeny soustavou lineárních algebraických rovnic. Koefficienty rovnice jsou počty závitů. Absolutními členy rovnic jsou počty závitů cívek transformátoru napájecího T_0 . Znaménka koeficientů a absolutních členů jsou určeny směrem toku v cívkách. Pro změnu znaménka je nutno zaměnit začátky a konce cívek v uzavřeném obvodu.

(Dokončení v příštím čísle)