Zbyněk Nádeník

O integrální geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 7 (1962), No. 2, 75--79

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137271`

[10] LADISLAV RIEGER: O teorii neuronových sítí. Aplikace matematiky 3 (1958), 243
[11] Дж. Нейман, Вычислительная машина и мозг. Кибернетический сборник 1, Изд. иностр. лит., Москва 1960
[12] D. P. GORSKIJ: Idealizace a abstrakce. Pokroky MFA 5 (1960), 741

O INTEGRÁLNÍ GEOMETRII[1])

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

Integrální geometrie je disciplína, která v sobě slučuje počet pravděpodobnosti, teorii míry, diferenciální geometrii a teorii konvexních těles. Velmi zhruba řečeno — tak jako se diferenciální geometrie zabývá studiem diferenciálních invariantů, jsou předmětem integrální geometrie vztahy mezi invarianty integrálními, třeba v euklidovském prostoru studium integrálů, které jsou invariantní při pohybu.

Integrální geometrie vznikla z geometrických pravděpodobností[2]). Od pravděpodobností počítaných kombinatoricky, kdy počty případů příznivých a možných jsou konečné, liší se tzv. geometrické pravděpodobnosti nekonečným počtem případů. Velmi známým příkladem je úloha o jehle hraběte BUFFONA z druhé poloviny XVIII. století. V sedmdesátých letech minulého století zavedl M. W. CROFTON míru pro dvouparametrovou množinu přímek v rovině, tj. jisté integrály vzaté přes všecky přímky množiny. Byl první, kdo vedle míry dvouparametrové množiny bodů v rovině (tj. obsahu rovinné plochy těmi body vyplněné) uvažoval i jinou míru. Croftonovy myšlenky, které umožňují bezprostřední řešení Buffonovy úlohy (viz pozn.[2]) pod čarou), prohloubili v posledních letech minulého století H. POINCARÉ a E. CARTAN, ale jejich plodnost se ukázala v plné šíři až v polovině třicátých let, kdy je oživil W. BLASCHKE, který se svými spolupracovníky a žáky vydal velkou sérii prací s týmž názvem Integralgeometrie.

Pokusíme se ukázat metody a částečně i dosah integrální geometrie na příkladu geometrické interpretace izoperimetrického deficitu. Má-li konvexní uzavřená křivka délku L a omezuje-li oblast o obsahu F, platí tzv. izoperimetrická nerovnost $L^2 - 4\pi F \geqq 0$, v níž rovností je charakterizována kružnice. Výraz na levé straně nerovnosti se nazývá izoperimetrický deficit.

Dejme tomu, že v rovině s pravoúhlou soustavou souřadnic x, y se pohybuje

---

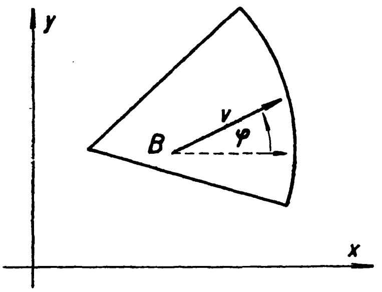
[1]) Článek je upravenou autorovou přednáškou na I. československé konferenci o diferenciální geometrii v září 1961 na Richtrových boudách v Krkonoších.

[2]) Geometrickými pravděpodobnostmi se u nás zabýval profesor teoretické fyziky na brněnské universitě B. HOSTINSKÝ (1885—1951). Vydal r. 1926 ve sbírce Kruh knížku Geometrické pravděpodobnosti a mnohem kratšeji a elementárněji o nich znovu pojednal v Počtu pravděpodobnosti v Cestě k vědění z r. 1950. Kapitoly II, III a IV první knížky jsou v podstatě úvodem do integrální geometrie. Řešení BUFFONOVY úlohy je v první knížce na str. 38 a ve druhé na str. 81 a 82.

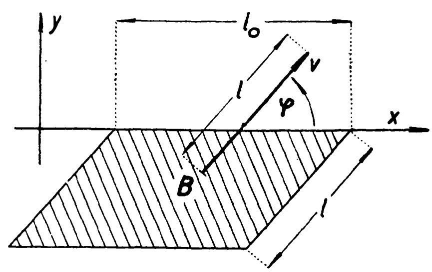
nějaký obrazec, který si můžeme myslit vystřižený z lepenky. Zvolme na tom pohybujícím se obrazci bod B a z něho vycházející vázaný vektor $\mathbf{v}$ (obr. 1). Poloha obrazce bude jednoznačně určena souřadnicemi x, y bodu B a úhlem $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ měřeným v kladném smyslu od kladné části osy x k vektoru $\mathbf{v}$. Integrál

$$\int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\varphi \quad [3] \tag{1}$$

vzatý přes všecky uvažované polohy bodu B a vektoru $\mathbf{v}$ se nazývá kinematická míra množiny poloh našeho obrazce. Snadno se zjistí, že tento integrál se nemění



Obr. 1



Obr. 2

při pohybu. Tak předně při pevném φ udává integrál $\int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ právě obsah plochy, kterou při pohybu obrazce vyplní bod B – a obsah plochy je ovšem pohybový invariant. Při prvném bodu B narůstá při otáčení úhel φ o aditivní konstantu, a tedy $\mathrm{d}\varphi$ je opět invariant.

Jako příklad, kterého hned dále využijeme, vypočítáme kinematickou míru množiny orientovaných úseček l, které protínají pevnou úsečku délky l_0 (obr. 2). Bod B ztotožníme s počátečním bodem naší pohybující se orientované úsečky, za vektor $\mathbf{v}$ vezmeme přímo tu orientovanou úsečku a osu x zvolíme v prodloužení pevné úsečky. Jde pak o výpočet integrálu (1) přes všecky možné polohy naší pohyblivé úsečky. Integrál (1) vypočítáme dvojnásobnou integrací $\int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\varphi = \int \left[\int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}\varphi$, při čemž vnější integraci je třeba provést od 0 do 2π a vnitřní integrál je třeba vzít přes všecky možné polohy bodu B při konstantním φ. Ale při konstantním φ vyplní bod B kosodélník (na obr. 2 vyšrafovaný) obsahu $ll_0|\sin \varphi|$, a to je právě vnitřní integrál. Hledaná kinematická míra je tedy

$$\int_0^{2\pi} ll_0 |\sin \varphi| \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} ll_0 \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} ll_0 \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= ll_0 [-\cos \varphi]_0^{\pi} - ll_0 [-\cos \varphi]_{\pi}^{2\pi} = 4ll_0 ,$$

[3]) Je to ovšem trojnásobný integrál. V integrální geometrii se zpravidla vícenásobný integrál nevyznačuje příslušným počtem integračních znamení.

neboť

$$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow |\sin \varphi| = \sin \varphi \quad \text{a} \quad \varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle \Rightarrow |\sin \varphi| = -\sin \varphi .$$

Uvažujme nyní množinu M všech orientovaných úseček délky l, které protínají pevnou lomenou čáru délky L_0 složenou ze dvou úseček délek l_1 a l_2. Rozdělme nejdříve množinu M ve tři: v množinu M_1, jejíž každá úsečka protíná jen první stranu lomené čáry, v množinu M_2, v níž každá úsečka protíná jen druhou stranu lomené čáry, a konečně v množinu M_{12} těch úseček, které protínají obě strany naší lomené čáry. Míra množiny $M_1 + M_{12}$, tj. množiny úseček, které protínají první stranu lomené čáry, je podle výše provedeného příkladu (pro stručnost klademe $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}K$)

$$\int_{M_1+M_{12}} \mathrm{d}K = 4l_1 l . \tag{2}$$

Kinematická míra množiny $M_2 + M_{12}$, tj. množiny úseček, které protínají druhou stranu lomené čáry, je

$$\int_{M_2+M_{12}} \mathrm{d}K = 4l_2 l . \tag{3}$$

Avšak

$$\int_{M_1+M_{12}} \mathrm{d}K = \int_{M_1} \mathrm{d}K + \int_{M_{12}} \mathrm{d}K , \quad \int_{M_2+M_{12}} \mathrm{d}K = \int_{M_2} \mathrm{d}K + \int_{M_{12}} \mathrm{d}K . \tag{4}$$

Sečtením vztahů (2) a (3) plyne vzhledem k (4)

$$4(l_1 + l_2)\, l = \int_{M_1} \mathrm{d}K + \int_{M_2} \mathrm{d}K + 2\int_{M_{12}} \mathrm{d}K = \int_{M_1} 1 \,.\, \mathrm{d}K + \int_{M_1} 1 \,.\, \mathrm{d}K + \int_{M_{12}} 2 \,.\, \mathrm{d}K$$

čili

$$4L_0 l = \int_M n \, \mathrm{d}K ,$$

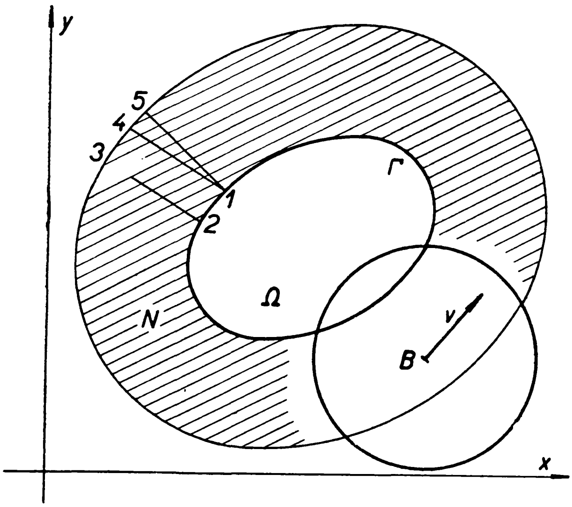
kde n znamená počet průsečíků pohybující se úsečky s pevnou lomenou čarou.

Postup lze okamžitě rozšířit na lomenou čáru celkové délky L_0 o libovolném počtu stran. A ještě víc. Podobným způsobem lze odvodit toto tvrzení: Nechť je dána pevná lomená čára o délce L_0 a pohybující se tuhá lomená čára o délce L (při pohybu se nemění její strany a úhly). Označme M množinu všech poloh pohybující se lomené čáry, v nichž protíná pevnou lomenou čáru. Pro určitou polohu pohybující se lomené čáry označme n počet průsečíků obou čar. Pak platí pro kinematickou míru množiny M

$$\int_M n \, \mathrm{d}K = 4L_0 L . \tag{5}$$

Limitním přechodem se nahlédne, že ve větě právě vyslovené lze lomené čáry nahradit libovolnými křivkami. (5) je pak POINCARÉŮV vzorec, na němž je založeno mnoho výsledků integrální geometrie.

Uvažujme pevnou konvexní oblast Ω o obsahu F; délka její hranice Γ nechť je L. Dále uvažujeme kruh o poloměru r, který se v naší rovině pohybuje tak, že stále protíná hranici Γ oblasti Ω (obr. 3). Podle Poincaréova vzorce platí pro kinematickou míru množiny M všech popsaných poloh našeho kruhu



Obr. 3

$$\int_M n \, dx \, dy \, d\varphi = \\ = 4 \,.\, L \,.\, 2\pi r \,, \tag{6}$$

kde x, y jsou – jako dříve – souřadnice jistého bodu B pevně spojeného s kruhem, φ úhel (dříve podrobně popsaný) kladné poloosy x s jistým vektorem s počátečním bodem v bodě B a pevně spojeným s kruhem, a konečně n počet průsečíků pevné čáry Γ s hraniční kružnicí pohyblivého kruhu; tento počet je ovšem – nehledíme-li ke zvláštním případům dotyku – vždycky sudý. Zvolíme-li za bod B právě střed pohyblivého kruhu, pak při pevném bodě B a měnícím se φ od 0 do 2π kruh nezmění svoji polohu, a tedy

$$\int_M n \, dx \, dy \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_N n \, dx \, dy \right] d\varphi = 2\pi \int_N n \, dx \, dy \,, \tag{7}$$

kde N znamená množinu středů B našich kruhů, protínajících hranici Γ oblasti Ω. Z (6) a (7) plyne

$$\int_N n \, dx \, dy = 4rL \,. \tag{8}$$

Integrál nalevo v (8) vyjádříme ještě jinak. Rozdělme množinu N na části N_2, N_4, N_6, ... takto definované: N_{2i} je ta část množiny N, která je vyplněna středy těch poloh našeho pohyblivého kruhu, v nichž jeho hraniční kružnice má s hranicí Γ oblasti Ω společných právě $2i$ bodů ($i = 1, 2, \ldots$). Od zvláštních případů různých dotyků můžeme zase odhlédnout, neboť je jich vždy nejvýš jednoparametrové množství a to lze při dvojnásobném integrálu zanedbat. Pak je

$$\int_N n \, dx \, dy = \int_{N_2} 2 \, dx \, dy + \int_{N_4} 4 \, dx \, dy + \int_{N_6} 6 \, dx \, dy + \ldots \tag{9}$$

Označíme-li $F_2, F_4, F_6, \dots$ obsahy množin $N_2, N_4, N_6, \dots$, máme podle (9) a (8)

$$4rL = 2F_2 + 4F_4 + 6F_6 + \dots \tag{10}$$

Sjednocení N množin $N_2, N_4, N_6, \dots$ o celkovém obsahu $F_2 + F_4 + F_6 + \dots$ je – jak jsme už výše řekli – vyplněno středy těch poloh našeho pohyblivého kruhu o poloměru r, v nichž má společné body s hranicí Γ. Obsah množiny N vypočítáme ještě jinak. Označme r_v poloměr kružnice vepsané čáře Γ (tj. největší kružnice, která nemá žádný bod vně Γ). Předpokládejme v dalším $r \geqq r_v$. Pak je množina N část roviny, která je omezena uzavřenou čarou vně paralelní k čáře Γ ve vzdálenosti r. Množina N se tedy skládá z oblasti Ω a z plochy vyšrafované na obr. 1. Obsah této vyšrafované plochy je roven obsahu obdélníka s výškou r a se základnou o délce L rovné délce čáry Γ zvětšenému o obsah kruhu poloměru r (nahlédne se to snadno z obr. 3, kde 23 a 15 jsou normály ke křivce Γ v jejích bodech 2 a 1 a 14 je rovnoběžka s 23; 1234 je přibližně obdélník a 145 je přibližně kruhová výseč). Pro obsah množiny N dostáváme tak Steinerův vzorec $F + rL + \pi r^2$, a tedy

$$F + rL + \pi r^2 = F_2 + F_4 + F_6 + \dots \tag{11}$$

Poněvadž pak $2rL - (F + rL + \pi r^2) = \left(\frac{L^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{L}{2\pi} - r\right)^2$, dostaneme, krátíme-li v (10) dvěma a odečteme-li (11), tento vztah:

$$\left(\frac{L^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{L}{2\pi} - r\right)^2 = F_4 + 2F_6 + \dots \tag{12}$$

V relaci (12) je r libovolné číslo nikoliv menší než r_v. Pro délku $2\pi r_v$ kružnice vepsané do čáry Γ o délce L jistě platí $2\pi r_v \leqq L$. Lze tedy zvolit r tak, aby $2\pi r = L$. Při této volbě vymizí dvojmoc nalevo v (12) a dostáváme

$$L^2 - 4\pi F = 4\pi(F_4 + 2F_6 + \dots)\,. \tag{13}$$

Tím je podán geometrický význam izoperimetrického deficitu. Z (12) lze též snadno dokázat, že se anuluje tehdy a jen tehdy, když čára Γ je kružnice. To však již nebudeme provádět.

Již J. Steiner se domníval, že dokázal izoperimetrickou vlastnost kružnice, a marně mu to vymlouval L. Dirichlet (chyba byla v existenční části důkazu). První ji dokázal C. Weierstrass v sedmdesátých letech minulého století, až vybudoval exaktní základy variačního počtu. Od té doby byla dokázána mnoha jinými způsoby (velmi jednoduše to provedl H. Lebesgue). Je paradoxní, že snadněji se dokáže zostření izoperimetrické nerovnosti než přímo nerovnost sama. (To platí i o výše uvedeném důkazu, viz přechod od (12) k (13) v jeho závěru). O geometrickou interpretaci izometrického deficitu se pokusil v roce 1929 Dán T. Bonnesen; ale mnohem pěkněji a jednodušeji se to podařilo o několik málo let později Argentinci L. A. Santalóovi. Jednu z jeho interpretací jsme výše uvedli.