Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

J. H. Ewing; W. H. Gustafson; Paul R. Halmos; S. H. Moolgavkar; W. H. Wheeler; W. P. Ziemer

Americká matematika od roku 1940 do předvčerejška [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 6, 326--335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138984

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1979

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

[3] KRASNOSELSKIJ, M. A., POKROVSKIJ, A. V.: *Operatory gisterezisnych nelinějností*. Ve sborníku *Teorija operatorov v funkcionalnych prostranstvach*, Nauka, Novosibirsk 1977.
[4] ZEEMAN, E. C.: *Catastrophe theory: selected papers (1972—1977)*. Addison—Wesley 1977.
[5] POSTON, T., STEWART, I. N.: *Catastrophe theory and its applications*. London and San Francisco, Pitman 1978.
[6] SUSSMAN, H., ZAHLER, R.: *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: a critique*. Synthese *37* (1978), 117—216.
[7] THOM, R.: *Stabilité structurelle et morphogénèse*. W. A. Benjamin, Reading, Mass. 1972.
[8] ZEEMAN, E. C.: *Levels of structure in catastrophe theory illustrated by applications in the social and biological sciences*. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver 1974, vol. 2, pp. 533—546; Canad. Math. Congr., Montreal 1975.
[9] KOWALSKI, O.: *Thomova věta o sedmi elementárních katastrofách*. PMFA *22* (1977), 302—316.
[10] ZEEMAN, E. C.: *Differential equations for the heartbeat and nerve impulse*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. of Bahia, Salvador 1971), pp. 683—741. Academic Press, New York, 1973.

Americká matematika od roku 1940 do předvčerejška*)

(Dokončení)

J. H. Ewing, W. H. Gustafson, P. R. Halmos,

S. H. Moolgavkar, W. H. Wheeler, W. P. Ziemer

Lieovy grupy. Již jsme řekli dost o algebře a o jejím spojení s geometrií. Tato část, která spojuje algebru s topologií, už leží na cestě k pozdějším analytickým tématům. Výsledek, který zde uvedeme, podobně jako několik jiných vynikajících matematických výsledků, budí dojem, že jsme získali něco z ničeho nebo přinejmenším, že jsme získali mnoho za neuvěřitelně nízkou cenu. Jeden z nejznámějších výsledků tohoto druhu se vyskytuje

*) Dokončení překladu článku *American Mathematics from 1940 to the Day before Yesterday*, American Mathematical Monthly *83* (1976) No. 7, pp. 503—516. První část překladu byla otištěna v minulém čísle.

Copyright © The mathematical Association of America.
Přeložil JIŘÍ VANŽURA.

v počátečních partiích kursů teorie funkcí komplexní proměnné: tvrdí, že diferencovatelná funkce na otevřené podmnožině komplexní roviny je nutně analytická.

Pátý Hilbertův problém si žádá právě výsledek takového typu: něco z ničeho. Spadá do kontextu teorie topologických grup. Topologická grupa je množina, která je současně Hausdorffovým prostorem a grupou, přičemž grupové operace

$$(x, y) \to xy \quad \text{a} \quad x \to x^{-1}$$

jsou spojité. Typickým příkladem je množina všech reálných matic typu 2×2 tvaru $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ při $x > 0$; její topologická struktura je struktura pravé poloroviny (všechny dvojice (x, y) při $x > 0$) a její multiplikativní struktura je struktura obvyklá u matic. Ekvivalentně: definujeme násobení v pravé polorovině předpisem

$$(x, y) \,.\, (x', y') = (xx', xy' + y)\,.$$

Poněvadž

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right),$$

je jasné, že jak násobení, tak inverze jsou spojitá zobrazení.

Uvedená topologická grupa má důležitou speciální vlastnost: je „lokálně eukleidovská" v tom smyslu, že každý její bod má okolí, které je homeomorfní s otevřenou koulí v (dvourozměrném) eukleidovském prostoru. (Ekvivalentně: ke každému bodu existuje „lokální souřadnicový systém".) Ještě důležitější speciální vlastností našeho příkladu je, že grupové operace, chápané jako zobrazení příslušných eukleidovských prostorů, nejsou pouze spojité, ale dokonce analytické. Je-li grupa lokálně eukleidovská, tj. je-li vůbec možné na ní „zavést souřadnice", potom to můžeme udělat mnoha způsoby; jestliže alespoň při jednom z nich budou grupové operace analytické, nazveme grupu „Lieovou grupou". Pátý Hilbertův problém byl tento: Je každá lokálně eukleidovská grupa Lieovou grupou?

Analogie tohoto problému s výše zmíněným problémem z teorie funkcí komplexní proměnné je velmi těsná. Je poměrně snadné dokázat, že dvakrát diferencovatelná funkce je analytická; *) Po dlouhou dobu bylo známo, že jestliže topologická grupa má dostatečněkrát diferencovatelné souřadnice, potom je analytickou grupou.

Ihned po objevu Haarovy míry byla tato míra použita von Neumannem (1933) k důkazu, že odpověď na Hilbertovu otázku je kladná pro kompaktní grupy. Nedlouho potom Pontrjagin (1939) rozřešil abelovský případ a Chevalley (1941) rozřešil řešitelný případ. (Omlouváme se, ale „řešitelný" je technický termín, jehož užití zde bylo nezbytné.)

Obecný případ byl vyřešen v roce 1952 Gleasonem a společně Montgomerym se Zippinem; odpověď na Hilbertovu otázku je ano. To, co udělal Gleason, byla charakterizace Lieových grup. (Definice: topologická grupa „nemá malé podgrupy", jestliže její jednotkový prvek má okolí, které neobsahuje žádou podgrupu řádu většího než 1.

*) Stačí samozřejmě jednou diferencovatelná. S výše uvedeným předpokladem je ovšem důkaz kratší. — Pozn. překl.

Charakterizace: konečně dimenzionální lokálně kompaktní grupa bez malých podgrup je Lieovou grupou.) Montgomery a Zippin použili k dosažení žádaného výsledku geometricko-topologické metody (a Gleasonovu větu).

Varování: problematiku nemůžeme považovat za uzavřenou. Otázku můžeme zobecňovat způsoby, které mají jak teoretickou, tak i praktickou cenu. Grupy mohou být nahrazeny „lokálními grupami" a abstraktní grupy můžeme nahradit grupami transformací, které operují na varietách. Nejlepší vítězství jsou ta, která ukazují kde hledat nové světy k dobývání. A vítězství nad pátým Hilbertovým problémem bylo tohoto druhu.

Literatura:

[1] A. Gleason: *Groups without small subgroups*. Ann. Math., *56* (1952) 193—212 (MR 14—135).

[2] D. Montgomery and L. Zippin: *Small subgroups of finite-dimensional groups*. Ann. Math., *56* (1952) 213—241 (MR 14—135).

[3] D. Montgomery and L. Zippin: *Topological transformation groups*. Interscience, New York, 1955 (MR 17—383).

Pozn. red.: Podrobnější poučení o historii 5. Hilbertova problému najde čtenář v článku J. Vanžury Pokroky MFA XVII (1972), str. 68—78.

Poincarého domněnka. „Varieta" je topologický prostor (přesněji separabilní Hausdorffův prostor), který je lokálně eukleidovský. Variety byly po mnoho let centrálním topologickým pojmem a stále jím zůstávají. Hilbertův pátý problém se vztahoval na grupové variety; Poincarého domněnka se týká vlastností souvislosti hladkých variet. „Diferencovatelná varieta" je varieta opatřená takovými lokálními souřadnicovými systémy, že změny souřadnic při přechodu od jednoho souřadnicového okolí k druhému s ním se překrývajícímu, jsou hladké. „Hladký" v tomto kontextu je obecně přijatou zkratkou znamenající C^∞, tj. nekonečněkrát diferencovatelný.

Eukleidovské axiomy pro rovinu úplně charakterizují tuto rovinu. Takový postup (nalézt vlastní jádro věci, abstrahovat a výsledku použít k axiomatickému popisu) je v matematice častý a užitečný. Protože sféry jsou základním pojmem velké části topologie, je přirozené pokusit se je podrobit také axiomatickému přístupu. Takovýto pokus byl učiněn a byl z velké části úspěšný.

Například 1-sféra (tj. kružnice) je kompaktní souvislá 1-varieta (tj. varieta dimenze 1) a to je vše, čím je: až na homeomorfismus je každá kompaktní souvislá 1-varieta 1-sférou.

S 2-sférou je situace složitější: jak 2-sféra S^2, tak i torus $T^2 (= S^1 \times S^1)$ jsou kompaktní souvislé 2-variety, které nejsou navzájem homeomorfní. Abychom odlišili S^2 od T^2 a obecněji od sféry s mnoha uchy, je nutné si všimnout, že i když jak S^2, tak i T^2 jsou souvislé, je S^2 více souvislá. V příslušném technickém jazyce to znamená, že S^2 je „jednoduše souvislá" a T^2 není. Příslušné definice nyní uvedeme. Předpokládejme, že X a Y jsou topologické prostory a že f a g jsou spojitá zobrazení z X do Y; I nechť označuje jednotkový interval $\langle 0, 1 \rangle$. Zobrazení f a g jsou „homotopická", jestliže existuje spojité zobrazení h z $X \times I$ do Y takové, že $h(x, 0) = f(x)$ a $h(x, 1) = g(x)$ pro všechna x. (Intuitivně: f lze spojitým způsobem deformovat v g.) Prostor Y je jednoduše souvislý, jestliže každé spojité zobrazení z S^1 do Y je homotopické konstantnímu zobrazení. (Intuitivně: každá uzavřená křivka může být stažena do bodu.) Jakmile máme tento pojem k dispozici, je už snadné uvést charakterizaci 2-sféry: až na homeomorfismus je každá kompaktní, souvislá, jednoduše souvislá 2-varieta 2-sférou.

Studium v dimenzích 1 a 2 nám ještě nedává pevný základ k odhadu obecného případu, ale alespoň objasňuje následující pojem. Existuje způsob, jak definovat „k-souvislost", která zobecňuje „souvislost" ($k = 0$) a „jednoduchou souvislost" ($k = 1$): stačí nahradit S^1 v definici jednoduché souvislosti sférami S^j, $j = 0, 1, \ldots, k$. Prostor Y je tedy k-souvislý, jestliže pro každé j mezi 0 a k včetně je každé spojité zobrazení S^j do Y homotopické konstantnímu zobrazení.

Obecná Poincarého domněnka říká, že je-li hladká kompaktní n-varieta $(n - 1)$-souvislá, potom je homeomorfní s S^n. Pro $n = 1$ a $n = 2$ bylo toto tvrzení dlouhou dobu známé; velkým krokem vpřed byl nedávný důkaz tohoto tvrzení pro $n \geqq 5$. Důkaz podal SMALE (1960). Krátce poté, když se dověděl o Smaleově úspěchu, STALLINGS podal jiný důkaz pro $n \geqq 7$ (1960); tento důkaz potom ZEEMAN rozšířil na $n = 5$ a $n = 6$ (1961). Pro $n = 3$ (původní Poincarého domněnka) a $n = 4$ není dosud nic známo.

Ve skutečnosti Smale dospěl k mnohem silnějšímu výsledku. Ukázal, že určité variety můžeme získat slepováním disků. Jeho výsledky se staly výchozím bodem ke klasifikaci jednoduše souvislých variet.

Literatura:

[1] S. SMALE: *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions.* Bull. A. M. S., *66* (1960) 373—375 (MR23 # A2220).

[2] J. R. STALLINGS: *Polyhedral homotopy-spheres.* Bull. A. M. S., *66* (1960) 485—488 (MR23 # # A2214).

[3] E. C. ZEEMAN: *The generalized Poincaré conjecture.* Bull. A. M. S., *67* (1961) 270 (MR23 # # A2215).

[4] S. SMALE: *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four.* Ann. Math., *74* (1961) 391—406 (MR25 # 580).

Exotické sféry. „Difeomorfismus" mezi dvěma diferencovatelnými varietami je takový homeomorfismus, že on sám i homeomorfismus k němu inverzní jsou hladké. Homeomorfismus je relací ekvivalence mezi varietami; třída ekvivalence (vzhledem k homeomorfismům) se skládá z variet se stejnými topologickými vlastnostmi. Podobně difeomorfismus je relací ekvivalence mezi diferencovatelnými varietami a třídy ekvivalence (vzhledem k difeomorfismům) se skládají z variet se stejnými diferenciálními vlastnostmi. Jsou ale tyto pojmy skutečně různé? Je difeomorfismus opravdu více omezující než homeomorfismus? Odpověď zní ano, dokonce pro topologicky dobře utvářené variety, ale tato skutečnost zdaleka není zřejmá. Příklad zkonstruovaný MILNOREM v roce 1956 přišel jako překvapení a podle HASSLERA WHITNEYHO, tento jediný izolovaný příklad vedl k soudobému rozkvětu diferenciální topologie.

Milnorovým příkladem je 7-sféra. Pro každé kladné celé číslo n je n-sféra S^n přirozeným způsobem vložena do eukleidovského $(n + 1)$-prostoru, a je tedy na ní přirozená diferencovatelná struktura. Milnor ukázal, že existuje diferencovatelná varieta, která je homeomorfní, ale ne difeomorfní, se sférou S^7; tuto varietu začali nazývat „exotickou" 7-sférou.

Abychom toto tvrzení dokázali, je třeba rozřešit tři problémy: (1) nalézt kandidáta, (2) dokázat, že je homeomorfní s S^7 a (3) dokázat, že není s S^7 difeomorfní. První problém byl jednoduchý (z dnešního pohledu); kandidátem byl prostor (fibrace 3-sfér nad 4-sférou), který byl topologům znám po řadu let. Druhý problém Milnor vyřešil s použitím Morseovy teorie. Morseova funkce na diferencovatelné varietě je reálná hladká funkce mající pouze nedegenerované kritické body. Na n-sféře existuje Morseova funkce s právě dvěma kritickými body (za funkci stačí vzít poslední souřadnici a uvažovat oba póly). Věta G. Reeba dává výsledkek v opačném směru: jestliže na diferencovatelné varietě existuje Morseova funkce s právě dvěma kritickými body, potom je tato varieta homeomorfní se sférou. Milnor ukázal, že na jeho prostoru takováto Morseova funkce existuje. Třetí problém byl nejobtížnější. Zde použil Milnor dvou skutečností: za prvé že S^7 je hranicí jednotkové koule v $\mathbf{R}^8$, a za druhé, že jeho kandidát vznikl jako hranice jisté 8-rozměrné variety W. Kdyby jeho kandidát byl difeomorfní s S^7, potom by s použitím tohoto difeomorfismu bylo možno přilepit jednotkovou kouli na W a získat tak 8-rozměrnou varietu, která (jak Milnor ukázal) nemůže existovat.

Když už bylo známo, že exotické sféry existují, bylo přirozené se ptát, kolik jich je, tj. kolik tříd vzhledem k difeomorfismům existuje. Milnor a KERVAIRE ukázali, že jich je 28. A jak to vypadá s ostatními sférami? Opětně Milnor a Kervaire ukázali, že na množině diferencovatelných sfér (modulo difeomorfismus) je možno zavést strukturu konečné abelovské grupy s „přirozenou" sférou jakožto nulovým prvkem; grupovou operací je „souvislá suma", což je přirozené slepování variet. Tato grupa je triviální pro $n < 7$; má řád 28 pro $n = 7$, řád 2 pro $n = 8$, řád 8 pro $n = 9$, řád 6 pro $n = 10$ a řád 992 pro $n = 11$. Pro $n = 31$ existuje více než šestnáct miliónů tříd (vzhledem k difeomorfismům) exotických sfér.

Na konstruování exotických sfér existují dvě systematické metody. První je Milnorova konstrukce nazývaná „plumbing" (spojování děr pomocí uch), která předkládá exotické sféry jako hranice variet vznikajících pomocí rozřezávání a slepování. Druhá metoda (pocházející od BRIESKORNA, PHAMA a dalších) dává předem rozklasifikované příklady. Pro každou konečnou posloupnost $(a_1, \ldots, a_n)$ kladných celých čísel buď $\sum(a_1, \ldots, a_n)$ množina nulových bodů polynomu $z_1^{a_1} + \ldots + z_n^{a_n}$, které leží na jednotkové sféře v komplexním n-prostoru. Milnor zformuloval přesná kritéria pro uvažovanou n-tici, která zaručují, že uvedená varieta je homeomorfní sféře určité dimenze (je to mimochodem $2n - 3$). Například když k probíhá od 1 do 28, dávají nám variety $\sum(3, 6k - 1, 2, 2, 2)$ reprezentanty ve všech 28 třídách (vzhledem k difeomorfismům) 7-sfér.

Literatura:

[1] J. W. MILNOR: *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.* Ann. Math., *64* (1956) 399—405 (MR 18—498).

[2] J. W. MILNOR: *Differential topology.* Lectures on Modern Mathematics vol. II, pp. 165—183, Wiley, New York, 1964 (MR31 # 2731).

Diferenciální rovnice. Diferenciální pojmy hrají důležitou roli všude včetně čisté algebry a topologie, jak jsme viděli výše. Diferenciální rovnice jsou tím, co hýbe světem, a každý, kdo chce chod světa předvídat nebo částečně měnit, musí znát diferenciální rovnice a jejich řešení.

Diferenciální rovnice se klasifikují pozoruhodně primitivním způsobem podle počtu nezávislých proměnných, které se vyskytují v derivacích a podle způsobu, jakým se objevují v rovnicích neznámé funkce. Klasifikace je „jedna“ a „mnoho“ v prvním případě a „dobrý“ a „ne tak dobrý“ v případě druhém. Jinak s použitím adjektiv běžných u rovnic můžeme říci „obyčejné“ a „parciální“ v prvním případě a „lineární“ a „nelineární“ v případě druhém. Tento oddíl se týká pouze lineárních rovnic, a to rovnic parciálních; obyčejné rovnice se objevují pouze stručně na začátku, aby nám pomohly objasnit situaci.

Počátky teorie obyčejných lineárních diferenciálních rovnic jsou jednoduché a uspokojivé; lze je najít v elementárních učebnicích. Je-li p polynom

$$p(\xi) = \sum_{j=0}^{k} a_j \xi^j$$

a $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$, je $P = p(D)$ diferenciální operátor a $Pu = g$ (s daným g a neznámým u) je typická lineární obyčejná diferenciální rovnice s konstatními koeficienty. Je-li g spojité (což je rozumný, užitečný, ale příliš speciální předpoklad), potom má rovnice vždy řešení. Toto tvrzení platí i v případě nekonstatních koeficientů (tj. když a_j jsou funkce proměnné x), jestliže o nich něco málo předpokládáme. Stačí například, když a_j jsou spojité a „hlavní“ koeficient a_k se nikde neanuluje.

U parciálních rovnic už začátky jsou netriviální a nové a například dokonce teorie rovnic s konstatními koeficienty patří do zcela nedávné etapy výzkumu. Formulace problému je dosti jednoduchá: uvažujeme polynom v proměnných $\xi_1, \ldots, \xi_n$ a vytvořme diferenciální operátor P nahrazením proměnné ξ_j derivací $\partial/\partial x_j$; cílem je řešit rovnici $Pu = g$ s neznámou funkcí u.

Abychom se vyhnuli ε – detailům, které nám toho moc neobjasní, ani nám nejsou příliš užitečné, stalo se běžným brát g (a hledat u) v nejvíce nebo nejméně omezující třídě objektů přicházejících v úvahu. Nejvíce omezující třída objektů sestává z hladkých (nekonečně diferencovatelných) funkcí bez ohledu na to, co je jejich definičním oborem ($\mathbf{R}^n$, otevřená podmnožina v $\mathbf{R}^n$, varieta); druhým extrémem jsou potom distribuce LAURENTA SCHWARTZE. (Motivace teorie distribucí je tato: Funkce f indukuje lineární funkcionál $\phi \to \int \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$ na C^∞. „Distribuce“ je, definujeme-li vhodně topologii, spojitý lineární funkcionál, který však nemusí být nutně indukován funkcí. Analogie mezi tímto zobecněním a funkcemi ihned nabízí vhodnou definici derivace pro distribuce. S použitím této definice potom lze budovat fungující teorii parciálních diferenciálních rovnic.)

Parciální diferenciální rovnice jsou starou a široce aplikovanou disciplínou a je udivující, že základní věta o nich pochází z nedávné doby; zdá se, že to bylo předevčírem, když EHRENPREIS (1954) a MALGRANGE (1955) dokázali, že každá lineární parciální diferenciální rovnice s konstatními koeficienty má řešení. Jestliže její pravá strana je hladká, existuje hladké řešení; dokonce i když připustíme na pravé straně libovolnou distribuci, existuje distribuce, která je řešením. Toto téma je vyčerpávajícím způsobem probráno v Ehrenpreisově knize (1962) a může být považováno za uzavřené.

Až sem to jde dobře; důkazy jsou sice obtížnější než v případě obyčejných diferenciálních rovnic, ale výsledky jsou pěkné. Teorie rovnic s proměnnými koeficienty (tj. s koeficienty, které jsou funkcemi) je mnohem obtížnější, ví se toho mnohem méně a v žádném směru není blízko svému zakončení. Dva pozoruhodné příspěvky z konce padesátých let našeho století ukázaly, že staré představy a staré metody byly značně nesprávné.

Ke starým představám: Hans Lewy nalezl (1957) inspirující a pozoruhodně jednoduchý příklad parciální diferenciální rovnice s proměnnými (ale hodně hladkými) koeficienty, která nemá vůbec žádné řešení. Lewyho polynom má stupeň 1,

$$p(x, \xi) = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 ,$$

kde koeficienty a_1, a_2, a_3 jsou funkcemi tří proměnných, přičemž první dva jsou konstantní:

$$a_1 = -\mathrm{i}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -2(x_1 + \mathrm{i}x_2) .$$

Příslušný diferenciální operátor má samozřejmě tvar

$$P = -\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - 2(x_1 + \mathrm{i}x) \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Lewy dokázal, že pro skoro všechna g z C^∞ (ve smyslu Baireovy kategorie) nevyhovuje rovnici $Pu = g$ vůbec žádná distribuce.

V přibližně stejné době (1958) studoval Calderón jednoznačnost řešení jistých důležitých parciálních diferenciálních rovnic (s vhodnými počátečními podmínkami). Podařilo se mu dokázat, že když $Pu = 0$ a $u = 0$ pro $t \leqq 0$ (pro představu nechť „t“ označuje čas), potom lokálně u zůstává rovno nule i v kladném čase. Calderónovy metody jsou převzaty z harmonické analýzy; zavedly do této oblasti singulární integrály a odtamtud, o něco později, přišly pseudo-diferenciální a Fourierovy integrální operátory. Tyto myšlenky od té doby ovládly celou tuto oblast.

Hörmander analyzoval a zobecnil Lewyho příklad (1960). Poukázal na to, že rovnice má uvedené vlastnosti proto, že její koeficienty jsou komplexní; to, co je podstatné, je chování komutátoru P a $\bar{P}$. Operátor $\bar{P}$ dostaneme jednoduše nahrazením každého koeficientu koeficientem komplexně sdruženým. (V jazyce operátorů: $\bar{P}u = (\overline{P\bar{u}})$.) Přesněji: uvažujeme pro každý polynom v proměnných $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jeho „hlavní část“, tj. tu část, která obsahuje pouze členy nejvyššího stupně. (V Lewyho příkladu jiná část vůbec není.) Je-li $p(x, \xi)$ takováto hlavní část, označme symbolem $b(x, \xi)$ „Poissonovu závorku“

$$b(x, \xi) = \sum_j \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_j} \right).$$

Tvrzení: jestliže v některém bodě (x_0, ξ_0) je hlavní část $p(x^0, \xi^0)$ rovna nule, ale Poissonova závorka $b(x^0, \xi^0)$ je nenulová, potom rovnice příslušná p není řešitelná v Lewyho smyslu v žádné otevřené množině obsahující x^0. Je snadno patrné, že Lewyho příklad spadá do této Hörmanderovy kategorie. Dostáváme

$$p = -\mathrm{i}\,\xi_1 + \xi_2 - 2(x_1 + \mathrm{i}x_2)\,\xi_3\,,$$

$$\bar{p} = \mathrm{i}\,\xi_1 + \xi_2 - 2(x_1 - \mathrm{i}x_2)\,\xi_3$$

a snadno vypočteme

$$b = 8\mathrm{i}\,\xi_3\,,$$

takže je jasné, že pro každé $x = (x_1, x_2, x_3)$ existuje $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ takové, že $p(x, \xi) = 0$ a $b(x, \xi) \neq 0$.

Literatura:

[1] L. Ehrenpreis: *Solution of some problems of division.* Amer. J. Math., *76* (1954) 883—903 (MR 16—834).

[2] B. Malgrange: *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, *6* (1955) 271—355. (MR 19—280).

[3] H. Lewy: *An example of a smooth linear partial differential equation without solution.* Ann. Math., *66* (1957) 155—158 (MR 19—551).

[4] A. P. Calderón: *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations.* Amer. J. Math., *80* (1958) 16—36 (MR 21 # 3675).

[5] L. Hörmander: *Differential operators of principal type.* Math. Ann., *140* (1960) 124—146 (MR 24 # A434).

[6] L. Hörmander: *Linear partial differential equations.* Springer, New York, 1969 (MR 40 # 1687).

[7] L. Ehrenpreis: *Fourier analysis in several complex variables.* Wiley, New York, 1970 (MR 44 # # 3066).

Věta o indexu. Atiyahova-Singerova věta o indexu (1963) spojuje dvě matematické disciplíny, topologii a analýzu, přičemž toto spojení není náhodný jev, nýbrž je v samotné podstatě věci. Prostě: spojení je právě to, o co tu jde. Věty s takto širokým dosahem patří obvykle k nejužitečnějším a nejelegantnějším a věta o indexu zde není žádnou výjimkou. A právě hloubka této věty si vyžaduje, že chceme-li ji vyložit a přiblížit musíme postupovat nepřímo. V dalším proto v první řadě popíšeme jejího historického a koncepčního předchůdce – Riemannovu-Rochovu větu a potom stručně naznačíme, jakým způsobem ji Atiyahova-Singerova věta zobecňuje.

Klasická Riemannova-Rochova věta se zabývá dvěma aspekty (topologickým a analytickým) Riemannovy plochy. Každá kompaktní Riemannova plocha je homeomorfní s (dvourozměrnou) sférou s uchy. Počet těchto uch, tzv. „rod“, topologicky plně charakterizuje plochu; tato část je snadná. Analytická struktura je složitější. Sestává z pokrytí plochy konečným počtem otevřených množin spolu se zadáním homeomorfismů z komplexní roviny na každou z těchto otevřených množin, přičemž na jejich překrytích vznikají holomorfní funkce. (Je vhodné, když pomocí těchto homeomorfismů ztotožníme každou otevřenou množinu pokrytí s některou otevřenou množinou v $\mathbf{C}$; v dalším to budeme mlčky dělat.) Je-li plocha například sférou (bez uch), mysleme si, že $\mathbf{C}$ prochází rovníkem a užijme stereografické projekce (ze severního a jižního pólu) jakožto homeomorfismy. Máme tak dvě otevřené množiny, doplněk severního a doplněk jižního pólu; holomorfní funkce na překrytí je $w(z) = \frac{1}{z}$.*

Hladkou funkci na Riemannově ploše můžeme chápat jakožto množinu funkcí definovaných řekněme na otevřeném jednotkovém kruhu v $\mathbf{C}$ (po jedné pro každou otevřenou množinu pokrytí), které jsou hladké (C^{∞}) a přecházejí jedna v druhou při transformacích souřadnic vznikajících na překrytích; (tj. jsou-li f a g dvě z těchto funkcí a je-li w zobrazení v jednotkovém kruhu, které vznikne tak, že vezmeme homeomorfismus na otevřenou množinu příslušnou f a na překrytí s otevřenou množinou příslušnou g ho složíme s inverzním homeomorfismem příslušným této otevřené množině, potom $((z) = g(w(z))$. Funkce na Riemannově ploše se nazývá holomorfní (nebo meromorfní), jestliže každá z uvedených funkcí na jednotkovém kruhu je holomorfní (nebo meromorfní). Dalším nezbytným pojmem k analytickému studiu Riemannovy plochy je pojem hladkého diferenciálu: je to výraz tvaru $p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y$, (kde p a q jsou hladké funkce s komplexními hodnotami), který se na překrytích transformuje podle známých pravidel o substituci. Holomorfní diferenciál je diferenciál tvaru $f(z)\,\mathrm{d}z$, kde $f(z)$ je holomorfní funkce a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$. (S použitím výše zavedeného značení můžeme transformační rovnice pro tyto diferenciály zapsat ve tvaru $f(z)\,\mathrm{d}z = g(w)\,\mathrm{d}w = g(w(z))\,w'(z)\,\mathrm{d}z$.)

Analytické vlastnosti Riemannovy plochy jsou vlastnosti holomorfních (a meromorfních) funkcí a diferenciálů, které na ní existují. Známá věta nám říká, že jediné holomorfní funkce na kompaktní Riemannově ploše jsou konstanty: to je v podstatě obsah Liouvilleovy věty. Mnohem víc nám říká Riemannova-Rochova věta. Ve své nejjednodušší formě se zabývá kompaktní Riemannovou plochou S rodu g a n body $z_1, \ldots, z_n$ na S. Buď F vektorový prostor meromorfních funkcí na S s póly nejvýše 1. řádu v každém z bodů z_i (a nikde jinde); buď D vektorový prostor holomorfních diferenciálů s nulovými body alespoň 1. řádu v každém z bodů z_i (a popř. kdekoli jinde). Potom

$$\dim F - \dim D = 1 + n - g\,.$$

Ve speciálním případě klasické Liouvilleovy věty $g = 0$, $n = 0$ a $\dim D = 0$.) Důležitým aspektem tohoto tvrzení je, že veličina, která je úplně popsaná v *analytických* pojmech může být vypočtena pomocí údajů čistě *topologických*.

Ve speciálních případě $n = 0$ je F vektorový prostor funkcí holomorfních na S (takže $\dim F = 1$) a D je prostor všech holomorfních diferenciálů. Existuje lineární zobrazení obvykle označované $\bar{\partial}$, z vektorového prostoru všech hladkých funkcí na S do vektorového prostoru všech hladkých diferenciálů: pišme

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$$

---

*) Situace je nepatrně složitější. Aby vyšlo $w(z) = \frac{1}{z}$, je nutno jednu projekci složit se symetrií podle osy reálných čísel. Pozn. překl.

na každé otevřené množině z uvažovaného pokrytí. Zobrazení $\bar{\partial}$ je příkladem diferenciálního operátoru. Do jeho jádra patří právě funkce vyhovující Cauchyovým-Riemannovým rovnicím; jinými slovy

$$\ker \bar{\partial} = F.$$

Kojádro zobrazení $\bar{\partial}$ (faktorprostor prostoru všech hladkých diferenciálů podle obrazu zobrazení $\bar{\partial}$) můžeme zase ztotožnit s prostorem D. V tomto případě Riemannova-Rochova věta dává vztah

$$\dim \ker \bar{\partial} - \dim \operatorname{coker} \bar{\partial} = 1 - g.$$

Atiyahova-Singerova věta je zobecněním věty Riemannovy-Rochovy v tom smyslu, že rovněž ukazuje, že určité analytickým způsobem definované číslo („analytický index") může být nalezeno pouze s pomocí topologických charakteristik. Které aspekty byly zobecněny? Všechny. Riemannova plocha je nahrazena libovolnou kompaktní hladkou varietou jakékoliv dimenze. Vektorové prostory hladkých funkcí a hladkých diferenciálů jsou nahrazeny vektorovými prostory hladkých řezů komplexních vektorových fibrací nad M (fakticky komplexů vektorových fibrací). Konečně zobrazení $\bar{\partial}$ je nahrazeno diferenciálním operátorem Δ, který vyhovuje určité podmínce invertibility (nazývané eliptičnost). Z ní vyplývá, že jak $\ker \Delta$, tak i $\operatorname{coker} \Delta$ jsou konečně dimenzionální; rozdíl těchto dvou dimenzí se nazývá analytický index. Atiyahova-Singerova věta říká, že analytický index můžeme vypočíst s použitím výlučně topologických invariantů („topologického indexu"), které jsou velmi hlubokým zobecněním pojmu rodu.

Za dobu její dosud krátké existence byly z Atiyahovy-Singerovy věty odvozeny důležité a zajímavé důsledky a ona sama už byla dokázána přinejmenším třemi různými instruktivními způsoby. Poslední z nich vychází ze studia rovnice vedení tepla na varietě.

Literatura:

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer: *The index of elliptic operators on compact manifolds.* Bull. A. M. S. *69* (1963) 422—433 (MR 28 # 626).

[2] R. S. Palais: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* Ann. Math. Studies, No 57, Princeton University Press, Princeton, 1965 (MR 33 # 6649).

Závěr. Stále jsou objevovány nové pojmy, příklady i metody a zjišťovány nové skutečnosti; problémy dostávají nové formulace, jsou zařazovány do nového kontextu, hlouběji do nich pronikáme a každým dnem nalézáme jejich řešení. Doufáme, že deset výše uvedených příkladů ukázalo alespoň částečně šířku, hloubku, zajímavost a sílu matematiky naší doby. Matematika je živá, matematika zůstává.

Hlboké štúdium prírody je najplodnejším prameňom matematických objavov.

J. Fourier

Ludia, ktorí si osvojili princípy matematiky, majú o jeden zmysel viac než obyčajní smrtelníci.

Ch. Darwin