[6] FRIEDEL, J.: *Dislocations.* Oxford, Pergamon Press 1964.
[7] MC CLINTOCK, F. A., ARGON, A. S.: *Mechanical behaviour of materials.* Reading, Addison-Wesley Publ. 1966.
[8] *Fracture* (vydavatel H. LIEBOWITZ), svazek 1 až 7. New York, Academic Press 1968—1972.
[9] REGEL, V. R., SLUCKER, A. I., TOMAŠEVSKIJ, E. J.: *Kinetičeskaja priroda pročnosti tverdych tel.* Moskva, Nauka 1974.
[10] SODOMKA, L.: *Pevnost materiálu.* Pokroky mat. fyz. a astr. *17* (1972), 331—339.
[11] *Modern composite materials* (vydavatelé L. J. BROUTMAN a R. H. KROCK). Reading, Addison-Wesley Publ. 1967.
[12] GILMAN, J. J.: *Kovová skla.* Čs. čas. fyz. A26 (1976), 368—378.

Šrínivása Rámanudžan a svět krásných formulí

Jiří Fiala, Praha

Začátkem roku 1913 dostal už tehdy slavný anglický matematik G. H. HARDY dopis, datovaný v Madrásu 16. ledna 1913:

Vážený pane,

dovoluji si představit se Vám: jsem úředníkem v účtárně v přístavu v Madrásu a můj roční plat činí pouze dvacet liber. Je mi 23 let. Nemám univerzitní vzdělání, avšak prošel jsem základními školami. Když jsem opustil školu, věnoval jsem veškerý svůj volný čas práci v matematice. Nenastoupil jsem obvyklý směr jako na univerzitách, nýbrž jsem si našel svou vlastní cestu. Zabýval jsem se speciálními výzkumy divergentních řad a výsledky, kterých jsem dosáhl, byly označeny místními matematiky jako „překvapující". (...)

Nedávno jsem nalezl ve Vaší knize Orders of Infinity na str. 36 tvrzení, že dosud nebyl nalezen žádný určitý výraz pro počet prvočísel menších než zadané číslo. Nalezl jsem výraz, který velmi přesně aproximuje skutečný počet, přičemž je chyba zanedbatelná. Dovoluji si Vás požádat o prohlédnutí připojených listů. Jsem chudý a kdybyste nalezl v nich něco cenného, rád bych to publikoval. (...) Protože jsem nezkušený, velmi ocením každou Vaši radu. Prosím za prominutí, že Vás obtěžuji.

Váš Šrínivása Rámanudžan.

K dopisu byl přiložen svazek listů, pokrytých rozličnými formulemi. Hardy vzpomíná v knize o Rámanudžanovi [4], jakým dojmem na něj příloha působila. První reakce byla ovšem záporná – podobných dopisů od různých „fermatistů" dostával jako slavný matematik hodně. V tomto případě však příloha obsahovala některé formule, které zaujaly na první pohled.

Hardy rozdělil formule do několika skupin; uvedeme zde ukázky každé z nich:*)

(1) $$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}|}{|2a} + \frac{1|}{|a} + \frac{2|}{|2a} + \frac{3|}{|3a} + \dots$$

(2) $$4\int_0^\infty \frac{x\,e^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}\,dx = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \frac{3^2|}{|1} + \dots$$

(3)
$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\dfrac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{a+1}\right)^2}\dots dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(b+\frac{1}{2})\,\Gamma(b-a-\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\,\Gamma(b+\frac{1}{2})\,\Gamma(b-a+1)}$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\dots)}$$

(5) $$1 - 5(\tfrac{1}{2})^3 + 9\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

(6) $$1 + 9(\tfrac{1}{4})^4 + 17\left(\frac{1\,.\,5}{4\,.\,8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\,.\,5\,.\,9}{4\,.\,8\,.\,12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{(\pi)}\,\Gamma(\frac{3}{4})^2}\,.$$

Když

(7) $$u = \frac{x|}{|1} + \frac{x^5|}{|1} + \frac{x^{10}|}{|1} + \frac{x^{15}|}{|1} + \dots,$$

$$v = \frac{\sqrt[5]{x}|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{x^2|}{|1} + \frac{x^3|}{|1} + \dots,$$

pak

$$v^5 = u\,\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}\,.$$

(8) $$\frac{1|}{|1} + \frac{e^{-2\pi}|}{|1} + \frac{e^{-4\pi}|}{|1} + \dots = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{(5)}+1}{2}\right)e^{2\pi/5}\,.$$

*) V příkladech 1, 2, 7, 8 jde o řetězové zlomky. (Pozn. red.)

Když

(9) $$F(k) = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 k + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^2 + \ldots$$

a

$$F(1 - k) = \sqrt{(210)}\, F(k)\,,$$

pak

$$k = (\sqrt{(2)} - 1)^4 (2 - \sqrt{3})^2 (\sqrt{7} - \sqrt{6})^4 (8 - 3\sqrt{7})^2 \,.$$
$$. (\sqrt{(10)} - 3)^4 (4 - \sqrt{15})^4 (\sqrt{15} - \sqrt{14})^2 (6 - \sqrt{35})^2 \,.$$

(10) *Koeficient u x^n v rozvoji*

$$(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \ldots)^{-1}$$

je celé číslo, nejbližší k číslu

$$\frac{1}{4n}\left(\cosh \pi \sqrt{(n)} - \frac{\sin 4\pi \sqrt{n}}{\pi \sqrt{n}}\right).$$

(11) *Počet čísel mezi A a B, které jsou samy čtverci nebo jsou součtem čtverců, je*

$$K \int_A^B \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\lg t}} + \Theta(B)\,,$$

kde $K = 0{,}764 \ldots$ a $\Theta(B)$ je velmi malé ve srovnání s integrálem.

Do první skupiny patřily formule, které Hardymu připadaly známé. Tak (1) pochází od Laplacea a byla přesně dokázána Jacobim; formuli (2) objevil Rogers. Formule typu (3) a (4) sice Hardy neznal, ale připadaly mu snadné. Jak ale sám přiznal, daly mu více práce, než předpokládal. Obecně se zdály být integrály uvedené v příloze méně zajímavé.

Zajímavější byly některé formule s nekonečnými řadami, jako např. (5) a (6). Ve formuli (5) Hardy ale rozpoznal Bauerovu formuli z teorie hypergeometrických řad, formule (6) byla mnohem těžší, než se na první pohled zdálo. Nicméně prostředky pro důkaz těchto formulí se daly zjistit v soudobé literatuře o hypergeometrických funkcích.

Úplně něco jiného byly formule typu (7) až (9). Hardy přiznal, že ještě nic takového neviděl a že neměl ani ponětí, jak by se takové formule daly dokázat. Prohlásil současně, že musely být napsány skvělým matematikem a že nutně musí být správné, protože nikdo by si nemohl něco takového jen tak vymyslet.

V poslední skupině byla tvrzení, která současně poukázala na omezení Rámanudžanových schopností a metod. Tak (10) se ukázalo být nesprávným. Byla to sice výborná aproximace koeficientů, ale ne tak dobrá, jak si Rámanudžan myslel. Toto tvrzení se však stalo později velmi podnětným a vedlo ke spolupráci Rámanudžana s Hardym v oblasti asymptotických formulí pro rozklady čísel na sčítance.

Formule (11) představuje vlastně hluboký výsledek, dokázaný E. LANDAUEM v r. 1908, avšak v této Rámanudžanově formulaci byla zavádějící. Integrální vyjádření není o nic lepší než jednodušší Landauovo vyjádření ve tvaru

$$K \frac{x}{\sqrt{\lg x}} .$$

Poznamenejme zde hned, že Rámanudžan znal i přesnou formuli pro K, totiž

$$K = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \prod \frac{1}{1 - r^{-2}}\right)},$$

kde r probíhá prvočísla tvaru $4m + 3$.

Hardy rozpoznal hned, že jde o skvělého matematika. Jejich korespondence pokračovala a každý dopis Rámanudžana obsahoval další překvapivé formule. Hardy usiloval o Rámanudžanův pobyt v Anglii, což se nakonec podařilo. Tím byla zahájena jedna z nejzajímavějších a nejromantičtějších spoluprací matematiků, která vydala – i přes to, že trvala krátce – nádherné ovoce.

Úplné znění dopisů a jejich příloh je uvedeno v Rámanudžanových sebraných spisech [1]. Věk, který udal Rámanudžan v citovaném dopisu, nebyl správný; fakticky byl o dva roky starší.

Pozoruhodné svědectví vydal anglický spisovatel a přítel Hardyho C. P. SNOW v předmluvě k 3. vydání Hardyho knihy *A mathematician's apology* (1967): Rámanudžan se už před tím obrátil na dva významné anglické matematiky, kteří však jeho dopisy vrátili bez komentáře.

Sebrané spisy Rámanudžana vyšly v roce 1927 [1]. Na jednotlivé práce budeme odkazovat pořadovým číslem v těchto sebraných spisech. Zápisníky vyšly faksimilované až v roce 1957 [2] a jeden „ztracený" sešit až v r. 1979 [3]. Už předtím však některé části zápisníků zpracoval a otiskl HARDY s LITTLEWOODEM a potom WATSON a PEERCE v rozsáhlé sérii článků v Journal of the London Mathematical Society v letech 1928 až 1931 dokázali řadu tvrzení z těchto zápisníků.

G. H. Hardy napsal o Rámanudžanovi knihu [4], která obsahuje také rozsáhlou bibliografii.

Život

Rámanudžan, plným jménem ŠRÍNIVÁSA RÁMANUDŽAN AIJANGAR, se narodil v chudé brahmínské rodině 22. prosince 1887 v městečku Éroda, nedaleko města Kumbakónam v jižní Indii. Po vychození základní školy začal r. 1894 studovat na městské střední škole v Kumbakónamu. Zde se poprvé projevily jeho mimořádné schopnosti: ve čtvrtém ročníku začal studovat samostatně trigonometrii, o rok později objevil Eulerovu formuli, spojující exponenciální a trigonometrické funkce. Byl na tento objev velmi pyšný, a o to bylo větší zklamání, když se dozvěděl, že jde o dávno známý vztah.

V šestém ročníku si vypůjčil knihu, která probudila jeho génia: *A synopsis of ele-*

mentary results in pure and applied mathematics, kterou napsal úplně zapomenutý matematik George Shoobridge Carr (2 sv., 1880, 1886). Kniha obsahovala 6165 vět, vesměs bez důkazů a představovala jakési repetitorium matematiky. Styl této knihy se stal Rámanudžanovi vzorem.

V r. 1903 udělal Rámanudžan přijímací zkoušky na univerzitu v Madrásu a získal stipendium. Veškerý svůj čas věnoval výhradně matematice a vše ostatní zanedbal. Neudělal další zkoušky, zvláště kvůli angličtině, a ztratil stipendium. Pokusil se sice ještě jednou zkoušky udělat (v r. 1906), ale opět neuspěl a tím skončila úplně jeho studia.

Rámanudžan pokračoval v nezávislé matematické práci. Své výsledky ukládal do zápisníků, které si pak vedl celý život. V r. 1909 se oženil a musil si najít nějaké trvalé zaměstnání. Obrovské nadání Rámanudžana rozpoznal zakladatel Indické matematické společnosti Rámasvámi Aijar, který ho poslal do Madrásu a současně s jinými matematiky (Šéšu Aijar, Rámačandra Rao) se pokoušel získat pro něj stipendium, avšak marně.

Proto nastoupil Rámanudžan v r. 1912 jako účetní v přístavu v Madrásu. V té době otiskl první práce v časopise Indické matematické společnosti (Journal of the Indian Mathematical Society). V lednu 1913 napsal Rámanudžan první, výše citovaný dopis Hardymu. Hardy pak usiloval prostřednictvím sekretáře pro indické studenty v Londýně o to, aby Rámanudžan přijel do Cambridže. Rámanudžan však tuto nabídku z kastovních důvodů odmítl.

Mezitím Rámanudžanovy práce viděl v Madrásu také T. G. Walker, vedoucí meteorologického oddělení v Indii a vymohl Rámanudžanovi stipendium na dva roky. Tak se dnem 1. 3. 1913 stal Rámanudžan profesionálním matematikem a zůstal jím celý život.

Hardy byl Rámanudžanovým odmítnutím zklamán. Naléhal v pokračující korespondenci a využil i cesty E. H. Nevilla do Madrásu. To už Rámanudžan sám ustoupil, ale obtíž byla ještě s matčiným souhlasem. Řešení přišlo náhle: jednoho rána matka sdělila, že měla sen, ve kterém viděla syna sedět ve skupině Evropanů a bohyně Námagiri jí přikázala, aby synovi nestála v cestě. Neville pak zajistil ihned na univerzitě v Madrásu stipendium a 17. března 1914 odjel Rámanudžan lodí do Anglie, kde nastoupil v Trinity College.

V Anglii pomáhali Rámanudžanovi v publikování prací Hardy a Littlewood. Oba ho chtěli také naučit moderní matematiku. Rámanudžan totiž z jedné strany ovládal např. řetězové zlomky jako nikdo na světě, ale z druhé strany měl jen mlhavé představy o tom, co je to Cauchyho věta nebo co je to vlastně důkaz. Hardy se z jedné strany obával, aby nenarušil jeho inspiraci, z druhé strany však ho nemohl nechat v úplné nevědomosti. Napsal: *Pokoušel jsem se ho učit a v jistém smyslu jsem byl úspěšný. Avšak nakonec jsem se naučil od něho víc já než on ode mne.* V dopisu universitě v Madrásu pak napsal: *Rámanudžan byl značně postižen válkou. Littlewood, který by se byl přirozeně spolu se mnou podílel na výuce Rámanudžana, byl ve válce a jeden učitel — to bylo příliš málo pro tak znamenitého žáka.* (...) *Je to nepochybně nejlepší indický matematik moderní doby.* (...) *Vždy byl spíše výstřední ve výběru problémů a metod jejich řešení.* (...) *Avšak jeho mimořádné nadání je nepochybné; v určitém smyslu je nejpozoruhodnějším matematikem, jakého jsem kdy znal.* (Citováno podle stati Šéšu Aijara a Rámačandry Rao v Rámanudžanových sebraných spisech.)

V květnu 1917 se u Rámanudžana objevila nevyléčitelná nemoc. Vzhledem k válečným událostem byla cesta do Indie nemožná, takže zůstal v Anglii. Pobýval v několika sanatoriích a teprve na podzim r. 1918 se jeho stav poněkud zlepšil. Znovu se pustil do práce. Velmi ho potěšilo zvolení do Královské společnosti a pak Trinity Fellowship. Po mírném zlepšení zdravotního stavu opustil Rámanudžan Anglii v únoru 1919. Přes veškerou lékařskou péči zemřel 26. dubna 1920 v Čétput, předměstí Madrásu.

Rané práce

Rámanudžanovy výsledky, získané ještě v Indii před příchodem do Anglie, jsou poznamenány jeho takřka naprostou izolovaností od soudobé matematiky a evropské matematické literatury. Hardy odhaduje, že asi dvě třetiny všech těchto výsledků jsou znovuobjevy. Rámanudžan ukládal všechny své výsledky do zápisníků, jen nepatrnou část z nich publikoval v časopise Indické matematické společnosti. Zde uvedeme jen několik ukázek z publikovaných prací raného období.

První tištěná práce ([1], 1) byla věnována Bernoulliovým číslům a obsahovala mimo jiné i známou krásnou Staudtovu větu

$$(-1)^n B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{r},$$

kde $p, q, \ldots$ jsou taková lichá prvočísla, že $p - 1, q - 1, \ldots$ dělí $2n$ a G_n je celé číslo.

Mezi nejkrásnější otištěné práce tohoto období patří články [1] 5, 6 věnované různým aproximacím čísla π a přibližným kvadraturám kruhu. Pozoruhodná jsou např. tato přiblížení:

$$\pi \sim \frac{63}{25} \frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}},$$

$$\pi \sim \frac{12}{\sqrt{130}} \lg \frac{(2 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{13})}{\sqrt{2}}.$$

První je přesné na 9, druhé na 15 desetinných míst. Zajímavé je také následující, které Rámanudžan získal empiricky:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = 3{,}14159265262\ldots$$

Na základě aproximací π předložil Rámanudžan v citovaných článcích dvě pozoruhodně přesné přibližné konstrukce pro kvadraturu. Jedna z nich dává např. při kružnici o poloměru 6000 km chybu jen 2 mm. Ostatní rané práce byly věnovány většinou různým formulím pro nekonečné řady.

Rozklady čísel

Počet všech různých rozkladů čísla n na nezáporné sčítance budeme označovat $p(n)$. Např. $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, a tedy $p(4) = 5$. Definitoricky se klade $p(0) = 1$.

Rámanudžan byl první, kdo odhalil některé z aritmetických vlastností $p(n)$. Pozorováním v tabulkách $p(n)$, sestavených MacMahonem pro $n = 1, 2, \ldots, 200$, objevil zvláštní kongruence:

$$\begin{aligned} p(5m + 4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ p(7m + 5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ p(35m + 19) &\equiv 0 \pmod{35}, \\ p(25m + 24) &\equiv 0 \pmod{25}, \\ p(11m + 6) &\equiv 0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

vše pro $m = 0, 1, 2, \ldots$ a další a formuloval obecnou hypotézu: když $\delta = 5^a 7^b 11^c$ a $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$, pak $p(\lambda + m\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}$.

Zde však zobecnil příliš. Gupta a Chowla v roce 1937 ukázali nesprávnost této hypotézy: $p(243) = 133\,978\,259\,344\,888$ není dělitelno 7^3, přičemž $24 \,.\, 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$.

V hledání dalších kongruencí – speciálních případů Rámanudžanovy hypotézy se pokračovalo: Krečmar dokázal, že

$$p(125m + 99) \equiv 0 \pmod{5^3}.$$

Watson pak dokázal obecné věty pro 5^a a 7^b. D. H. Lehmer ověřoval hypotézu ve speciálních případech; největší číslo, které zkoumal, bylo $p(14\,031)$ (má 127 číslic) – je dělitelné 11^4.

Čísla $p(n)$ vystupují jako koeficienty v mocninných rozvojích řady funkcí; vytvořující funkce pro $p(n)$ znal už Euler. Rámanudžan objevil dvě mimořádně krásné formule tohoto typu:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(5m + 4)\, x^m = 5\, \frac{[(1 - x^5)(1 - x^{10})(1 - x^{15})\ldots]^5}{[(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots]^6}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(7m + 5)\, x^m = 7\, \frac{[(1 - x^7)(1 - x^{14})(1 - x^{21})\ldots]^3}{[(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots]^4} + {}$$

$$+ 49x\, \frac{[(1 - x^7)(1 - x^{14})\ldots]^7}{[(1 - x)(1 - x^2)\ldots]^8}$$

a v souvislosti s tím další krásné formule, např.

$$1 + \frac{q}{1 - q} + \frac{q^4}{(1 - q)(1 - q^2)} + \ldots = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^9)(1 - q^{11})\ldots}.$$

Neuměl však tyto formule dokázat; to se podařilo až Darlingovi a Mordellovi.

Rámanudžan objevil tyto formule někdy před r. 1913. Při pobytu v Anglii při náhodném listování časopisem Proceedings of the London Mathematical Society z r. 1894, nalezl Rámanudžan tyto formule v článku málo známého matematika ROGERSE. Nyní se tyto formule označují jako *Rogersovy-Rámanudžanovy*. Poznamenejme zde ještě, že nezávisle objevil tytéž formule v r. 1917 i známý I. SCHUR a že nyní existuje celá řada různých důkazů těchto formulí a jejich pozoruhodných kombinatorických interpretací.

Dalším problémem, kterým se Rámanudžan – spolu s Hardym – zabýval, byla otázka asymptotických formulí pro $p(n)$. Nejjednodušší formule je

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{(2n/3)}}\,.$$

Základní myšlenky přivezl Rámanudžan už z Indie (viz např. výše uvedená formule (10) z prvního dopisu). Zajímavé svědectví, jak se přišlo k následujícím obecným formulím, podává J. E. LITTLEWOOD v knize *A Mathematician's Miscellany*. Nejsilnější výsledek, který Rámanudžan a Hardy dostali, zní takto:

Označíme-li

$$\Theta_q(n) = \frac{\sqrt{q}}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{C\lambda_n/q}}{\lambda_n}\right),$$

kde

$$C = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}, \quad \lambda_n = \sqrt{\left(n - \frac{1}{24}\right)},$$

pak

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\nu} A_q(n)\, \Phi_q(n) + O(n^{-1/4}),$$

kde $\nu = [\alpha\sqrt{n}]$ a $\alpha > 0$ *libovolné.*

A_q jsou dány explicitním vzorcem, který zde pro značnou složitost nebudeme uvádět. Rámanudžan s Hardym tabelovali vzorce A_q pro $q = 1, 2, \ldots, 18$. Začátek explicitního vyjádření této formule zní:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{C\lambda_n}}{\lambda_n}\right) + \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{C\lambda_n/2}}{\lambda_n}\right) + \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{2}{3}n\pi - \frac{1}{18}\pi\right)\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{C\lambda_n/3}}{\lambda_n}\right) + \ldots$$

Zde by se byli autoři patrně zastavili, nebýt Rámanudžanovy vášně pro numerické počítání. Vyzkoušel si totiž tuto formuli s šesti členy pro $p(200) = 3972999029388$ a byl výsledkem úplně ohromen: chyba byla pouze 0,004! Vše tedy vypadalo na to, že půjde nejen o asymptotickou, nýbrž přesnou formuli a že řada bude konvergovat k hodnotě $p(n)$. Nepodařilo se však jim to dokázat, dokonce ani konvergenci řady.

LEHMER dokázal v r. 1937 falešnost tohoto předpokladu: řada diverguje. V tomtéž roce RADEMACHER ve snaze zjednodušit celou analýzu i důkazy nahradil funkce Φ_q „skoro ekvivalentními" funkcemi

$$\Psi_q(n) = \frac{\sqrt{q}}{\pi\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{\sinh(C\lambda_n/q)}{\lambda_n}\right)$$

a tato záměna se ukázala být velice šťastnou. V tomto případě totiž řada

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q(n)\, \Psi_q(n)$$

konverguje a její součet je $p(n)$. Lehmer použil tohoto výsledku k určení hodnoty $p(14\,031)$, o které se hovořilo výše.

Teorie čísel

Rámanudžan začal s prací v teorii čísel už dávno v Indii. Mnoho z toho, co objevil, bylo už známo. Některé z těchto znovuobjevů byly však až neuvěřitelné. Tak např. samostatně přišel na funkcionální rovnici pro ζ-funkci, objevil větu o rozdělení prvočísel (včetně Riemannovy řady i řady blízké Gramově a navíc dostal ještě další dvě integrální vyjádření, do té doby neznámá).

Rámanudžan vůbec neznal teorii funkcí komplexní proměnné. S tím souvisely také některé jeho omyly a nedostatky. Hardy řekl, že Rámanudžanova teorie čísel vypadala tak, jak by vypadala, kdyby ζ-funkce neměla komplexní kořeny. Z toho také usuzuje na naprostou originalitu Rámanudžanovy práce: kdyby totiž byl znal nějaké práce z analytické teorie čísel, nebyl by mu jistě tento fakt unikl.

Přesto všechno Rámanudžan dosáhl řady znamenitých nových výsledků, které stimulovaly další výzkumy a které jsou i samy o sobě velmi krásné. Zmíníme se podrobněji jen o dvou: první se týká vyjádření čísel ve tvaru součtů mocnin a druhý počtu prvočíselných faktorů čísel.

Rámanudžan s velkou pravděpodobností samostatně objevil klasické formule (Euler, Jacobi, Liouville, Eisenstein, Glaisher) pro $r_{2s}(n)$ – počet vyjádření n ve tvaru součtu $2s$ čtverců, pro $2s = 2, 4, \ldots, 18$; sám doplnil tyto výsledky formulemi pro $2s = 20$, 22 a 24. Základní myšlenka, později propracovaná s Hardym, byla tato: Klasické formule pro větší $2s$ obsahují funkce, které nemají žádnou „teoreticko-číselnou" interpretaci a jsou to většinou koeficienty rozvojů modulárních funkcí. Rámanudžan chtěl přepsat r_{2s} ve tvaru $r_{2s}(n) = \delta_{2s}(n) + e_{2s}(n)$, kde δ_{2s} by byla teoreticko-číselná funkce typu „součet mocnin dělitelů" apod., a e_{2s} by bylo mnohem menší než δ_{2s} pro velká n. Tak např. dokázal formuli

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\,\sigma_{11}^{*}(n) + e_{24}(n)\,,$$

kde

$$e_{24}(n) = \frac{128}{691}\left((-1)^n\, 259\tau(n) - 512\tau\left(\frac{n}{2}\right)\right)$$

a

$$\sigma^*_{11}(n) = \begin{cases} \sigma_{11}(n) & \text{pro} \quad n \text{ liché} \\ \sigma^s_{11}(n) - \sigma^l_{11}(n) & \text{pro} \quad n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Zde $\sigma_{11}(n)$ je součet 11. mocnin dělitelů n, $\sigma^l_{11}(n)$ totéž pro liché dělitele, $\sigma^s_{11}(n)$ pro sudé. O funkci τ budeme hovořit níže. Zde je $\sigma^*_{11}(n)$ větší než konstantní násobek n^{11} a řád $\tau(n)$ je mnohem menší.

Velmi mnoho úsilí věnoval Rámanudžan prozkoumání vlastností funkce τ, definované vztahem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n = x((1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots)^{24}.$$

Rámanudžanovu hypotézu, že τ je multiplikativní, dokázal MORDELL. Rámanudžan dokázal řadu pozoruhodných kongruencí, zvlášť zajímavá je např.

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}.$$

Vyslovil při tom domněnku, že pro skoro všechna n je $\tau(n)$ dělitelné 691. Zde se „pro skoro všechna n" rozumí asymptoticky, tj. že limita podílu těch, pro které platí k počtu všech, je jedna při n jdoucím do nekonečna. Zmíněná domněnka je pozoruhodná zvlášť proto, že současně Rámanudžan dokázal, že $\tau(n)$ není dělitelné 691 pro n až do 5000 s výjimkou 1381. Rámanudžanovu hypotézu dokázal WATSON. WALFISZ dokázal v r. 1938, že pro skoro všechna n je $\tau(n)$ dělitelné $2^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 691$. LEHMER pak dokázal, že pro všechna n menší než 214 928 640 je $\tau(n)$ různé od nuly.

Důležité bylo také získat nějaké *asymptotické odhady pro tuto funkci* τ. Rámanudžan dokázal pouze, že $\tau(n) = O(n^8)$ a vyslovil hypotézu, že

$$\tau(n) = O(n^{(11/2)+\varepsilon})$$

pro každé ε kladné. Existuje ještě silnější Rámanudžanova hypotéza, totiž že

$$|\tau(n)| \leqslant n^{11/2}\, d(n)$$

kde $d(n)$ je počet dělitelů n. Protože dokázal současně, že $\tau(n) \geqq n^{11/2}$ pro nekonečně mnoho n, dokázal, že tento odhad by nebylo možno zlepšit. Hardymu se podařilo dokázat, že $\tau(n) = O(n^6)$. Postupně se odhady zlepšovaly. Nejlepší, známý autorovi, je RANKINŮV z r. 1939; $\tau(n) = O(n^{29/5})$.

Další práce, o které se zmíníme, je věnována následujícímu problému: Čísla, která mají rozklad na prvočísla složený z „velkého počtu poměrně malých prvočísel" jsou, jak ukazuje zkušenost, velmi řídká. Rámanudžan spolu s Hardym našli objasnění tohoto úkazu touto větou:

Skoro všechna čísla (rozumí se asymptoticky jako výše) n jsou složena z více než

$$\lg \lg n - \Phi(n) \sqrt{\lg \lg n}$$

a z méně než

$$\lg \lg n + \Phi(n) \sqrt{\lg \lg n}$$

prvočíselných faktorů. Při tom Φ je libovolná funkce jdoucí k nekonečnu spolu s argumentem. Na způsobu počítání faktorů (zda jednoduše nebo s násobnostmi) při tom vůbec nezáleží. Protože $\lg \lg n$ jde k nekonečnu velmi pomalu, objasňuje to zmíněný jev. Důkaz tohoto tvrzení byl zjednodušen v r. 1934 P. TURÁNEM; podobnou problematikou se později zabývali HARDY, ERDÖS a PILLAI.

Další práce

Mnoho dalších otištěných prací Rámanudžanových je věnováno problémům teorie čísel. Mezi pozoruhodné výsledky patří věty o maximálních počtech dělitelů – odhady funkce $d(n)$. Další zajímavý problém se týkal tzv. vysoce složených čísel. To jsou taková čísla, u kterých počet dělitelů přesahuje tyto počty u všech předcházejících čísel.

Mnoho práce věnoval Rámanudžan různým formulím pro ζ-funkci a pro další funkce používané v teorii čísel. V této souvislosti napsal také práce věnované eliptickým modulárním funkcím. Zde uvedeme jen dvě krásné formule pro ζ-funkci:

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s} \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\,\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

($\sigma_a(n)$ je součet a-tých mocnin dělitelů čísla n). První dokázal WILSON. Druhou použil v r. 1930 INGHAM k novému důkazu toho, že ζ-funkce splňuje nerovnost $\zeta(1 + it) \neq 0$, což je fakt, prakticky ekvivalentní větě o rozdělení prvočísel.

Rámanudžan věnoval také mnoho pozornosti výpočtům určitých integrálů. Pozoruhodné ukázky i s rozborem jsou obsaženy v Hardyho knize [4].

Závěr

Rámanudžanův život a dílo vyvolávají celou řadu otázek: jak přicházel Rámanudžan ke svým výsledkům, byly všechny skutečně originální, jak by asi vypadalo toto dílo, kdyby se Rámanudžanovi dostalo včas řádného matematického vzdělání, atd.

Na řadu z těchto otázek nebude dána nikdy odpověď. Na některé z nich se pokusil odpovědět sám Hardy, který měl nejvíce příležitosti sledovat Rámanudžana při práci. Hardy však sám přiznává s lítostí, že se nikdy pořádně na tyto otázky Rámanudžana nezeptal.

Rámanudžan sám říkával žertem, že mu výsledky našeptává ve snu bohyně Námagiri. Večer si psával do svých zápisníků problémy a ráno po snídani k nim připisoval řešení.

Měl Rámanudžan nějaké tajemství, nebo byl nějak abnormální ve svém způsobu uvažování? Hardy nemůže odpovědět spolehlivě, avšak nevěří tomu. Rámanudžan měl mimořádnou paměť, zvláště na čísla. Snad to byl Littlewood, který řekl: Každé přirozené číslo bylo jedním z jeho osobních přátel. V této souvislosti vypráví Hardy tuto historku: Jel navštívit Rámanudžana do nemocnice v Putney. V rozhovoru se pak zmínil o tom, že jel taxi s číslem 1729, které mu připadalo hloupé $(= 7 \cdot 13 \cdot 19)$. Na to odpověděl Rámanudžan, že naopak jde o číslo pozoruhodné, neboť je to nejmenší číslo, které se dá vyjádřit jako součet třetích mocnin dvěma různými způsoby $(12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3)$. Hardy se ho pak ptal, zda zná také odpověď na podobný problém, avšak se čtvrtými mocninami. Rámanudžan chvíli přemýšlel a pak řekl, že nevidí žádný zřejmý příklad a že si myslí, že první takové číslo musí být velice veliké. (Poznamenejme k tomu, že Euler uvedl takový příklad: $158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$.)

Rámanudžan měl skvělou schopnost počítat. Nejúžasnější však byl Rámanudžanův vhled do algebraických formulí, transformací nekonečných řad a řetězových zlomků. Hardy říká, že neviděl nikoho s podobnými schopnostmi a že může Rámanudžana srovnat jen s Eulerem a Jacobim.

Paměť, trpělivost, schopnost počítat, schopnost zobecňovat, cit pro formy, rychlá modifikace hypotéz – to vše dohromady tvořilo Rámanudžana.

Poděkování: Za pomoc s transkripcí vlastních jmen a objasnění některých reálií jsem zavázán indologovi P. Vavrouškovi.

Literatura

[1] *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan.* Edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson. Cambridge University Press 1927.

[2] *Notebooks of Srinivasa Ramanujan.* Facsimile edition in 2 volumes, 744 pp. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1957.

[3] Andrews G. E.: *An introduction to Ramanujan's „lost" notebook.* Am. Math. Monthly *86* (1979) 89–108.

[4] Hardy G. H.: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work.* Cambridge University Press 1940.

Říká se, že K. S. Stanislavskij byl po seznámení s V. P. Minakovem překvapen jeho hereckým nadáním a lákal ho k práci v MCHATu. Podle jiné verze prý taková žádost vyšla od Minakova, ale Stanislavskij se bránil: „Ne, nevezmu vás do svého divadla. ... Založte si své vlastní." To jsou zřejmě anekdoty vytvořené posluchači A. P. Minakova, ale založené na reálných skutečnostech – vzájemné známosti dvou vynikajících osobností a na mimořádných hereckých schopnostech A. P. Minakova, které mu umožňovaly přednášet tak oslnivě.

K tomu, aby člověk byl dobrým vysokoškolským pedagogem, musí být vědcem, filozofem, umělcem (hercem), vychovatelem a *člověkem.*

Pedagog musí velmi usilovně pracovat, aby se zdokonalil jako přednášející, k tomu musí stále studovat nejen svůj předmět, jeho historii a filozofii, ale zdokonalovat techniku přednášení. Činnost pedagoga je v tomto ohledu velmi blízká práci herce.