

Jiří Kobza

Interpolace — vývoj formulace problému a jeho řešení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 4, 273--294

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141006>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Interpolace — vývoj formulace problému a jeho řešení

Jiří Kobza, Olomouc

1. Úvod

Cílem článku je stručně shrnout poznatky o vývoji formulace úlohy o interpolaci, metodách jejího řešení a otázkách existence a jednoznačnosti řešení takových úloh v jedné, dvou a případně více proměnných. V závěru je uvedena obecná formulace takové úlohy a dvou základních algoritmů jejího řešení v termínech funkcionální analýzy.

Úloha o interpolaci představuje jeden z klasických problémů, řešených v nejjednodušších formách (lineární interpolace) již ve starověku (Řecko, Orient) a středověku (Briggs — kvadratická interpolace v tabulkách logaritmů, Wallis, Gregory), v širším rozsahu zakladateli matematiky proměnných veličin (Newton, Lagrange, Euler, Hermite, Ampère). Od těchto dob vešly základní poznatky o interpolaci funkcí jedné proměnné do většiny učebnic aplikované matematiky, neboť interpolace dává jednu z nejjednodušších aproximací zadané funkce nebo diskrétních dat. Daleko méně se zatím dočteme v těchto učebnicích o interpolaci funkcí více proměnných. Ta by měla popisovat metody a techniky pro jednoduchou aproximaci dat a funkcí s více proměnnými, kde aproximace (*interpolant*) nabývá v daných bodech předepsaných hodnot. Takové úlohy se dnes vyskytují v teorii i v praxi poměrně často při diskretizaci spojitých úloh a interpretaci výsledků numerických výpočtů v grafické podobě. Proto se podrobněji s tímto problémem setkáme zpravidla jen ve speciálních monografiích, v pracích o metodě konečných prvků, počítačové geometrii a grafice. Prostředky pro uživatelsky snadné řešení základních úloh interpolace najdeme v rozšířených matematických programových systémech MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB.

V našem článku uvedeme klasickou formulaci a řešení úlohy o interpolaci a ukážeme stručně na některé problémy a další vývoj při jejím řešení pro funkce více proměnných. V průběhu posledních dvou století se studovaly a řešily některé problémy v klasickém pojetí této úlohy a formulovala se jejich zobecnění v souladu s celkovým vývojem matematiky. Přes dlouhou dobu od klasické formulace úlohy o interpolaci existují i v jedné proměnné dosud nevyřešené problémy; řada základních problémů polynomické interpolace ve více proměnných byla řešena v nedávné době — po roce

Doc. RNDr. JIŘÍ KOBZA, CSc. (1940), katedra matematické analýzy a aplikované matematiky, Přírodovědecká fakulta UP, Tomkova 40, 779 00 Olomouc.

Práce byla podporována GA ČR, grant č. 201/96/0665.

1970. Vlivem rozšiřujících se aplikací matematiky a tendence zobecňování konkrétních řešení a poznatků dostává problém interpolace stále širší rámec. V úvodu encyklopedie *Handbook of Numerical Analysis III* (C. Brezinski [3], str. 15) najdeme formulaci úlohy interpolace v konečněrozměrných vektorových prostorech s obecnými lineárními funkcionaly. V posledním vydání ruské *Matematické encyklopedie* ([24], T. II, str. 619) najdeme tuto ještě obecnější formulaci úlohy o interpolaci:

$$(\text{IP}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť jsou dány neprázdné množiny } X, Y \text{ a dále množina zobrazení} \\ \\ \{f_a : X \rightarrow Y, a \in A\}. \\ \\ \text{Jsou-li dány prvky } \{y_a : a \in A\} \subset Y, \text{ hledají se prvky } x \in X \text{ splňující podmínky} \\ \text{interpolace} \\ \\ f_a(x) = y_a, \quad \forall a \in A. \end{array} \right.$$

Tato obecná formulace v sobě obsahuje několik okruhů problémů:

1. Pro které množiny prvků $\{y_a\}$ existuje alespoň jedno řešení?
2. Pro zadané prvky y_a najít všechna řešení.
3. Charakterizovat podmínky jednoznačnosti řešení.
4. Najít konstrukci (konstruktivní charakteristiku, algoritmus) interpolantu x pro různá data y_a .
5. V případech, kdy interpolant aproximuje složitější objekt, vyjádřit a odhadnout chybu interpolace.

V této formulaci jsou už zahrnuty problémy interpolace různých funkcionalů a operátorů, interpolace pomocí ploch zachovávajících okraje a podobně.

Dále se budeme snažit sledovat vývoj problému interpolace od jeho klasických počátků až k takovým moderním formulacím v jazyku funkcionální analýzy, jak jsou uvedeny ve jmenovaných encyklopediích a jaké lze najít v monografiích [1], [3], [19], [20].

2. Interpolace polynomy v jedné proměnné

2.1. Interpolace funkčních hodnot

Polynomy představovaly a dodnes představují nejsnazší vyčíslitelné funkce; proto jsou velmi často používány k aproximaci složitějších funkcí nebo dat. Pro periodické děje mají analogický význam trigonometrické polynomy, které jsou ovšem náročnější při výpočtu funkčních hodnot. V matematice je známa úzká souvislost mezi algebraickými a trigonometrickými polynomy v oblasti komplexní proměnné — o interpolaci trigonometrickými polynomy se přesto zmíníme jen okrajově, protože jde o poněkud specifickou a rozsáhlou problematiku.

Ve speciálním případě, kdy všechna informace o zadané funkci $f(x)$ je ve formě $\{f^{(j)}(x_0), j = 0, 1, \dots, n\}$ zadána v jediném bodě x_0 , dává konstrukci polynomu se stejnými hodnotami těchto parametrů *Taylorův polynom* (o Taylorově vícebodové formuli viz např. článek [7] z roku 1971; málo známá je varianta trigonometrického polynomu, interpolujícího analogická data).

Klasická úloha o interpolaci byla formulována pro konečný počet bodů interpolace takto:

$$(FVI) \left\{ \begin{array}{l} \text{Je dána rostoucí posloupnost uzlů interpolace } \{x_i \in R, i = 0, 1, \dots, n\} \text{ a dále} \\ \text{čísla } \{y_i \in R, i = 0, 1, \dots, n\}; \text{ hledá se polynom co nejnižšího stupně } m, \\ P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j, \text{ který splňuje podmínky interpolace} \\ P_m(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1)$$

Jsou-li hodnoty $y_i = f(x_i)$ funkčními hodnotami funkce $f(x)$, vzniká také otázka chyby interpolace $R(x) = f(x) - P_n(x)$, $x \neq x_i$, nebo problém konvergence interpolačního procesu při zvyšování počtu předepsaných hodnot.

Zřejmě *první cestou k řešení problému interpolace* (FVI) bylo dosažení podmínek interpolace do předpokládaného tvaru interpolantu. Odpovídající soustava lineárních algebraických rovnic pro výpočet koeficientů a_i při $n = m$ má za uvedeného předpokladu vzájemné různosti uzlů interpolace nenulový determinant soustavy (*Vandermondův determinant*)

$$\det [x_i^j]_{i,j=0}^n = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0. \quad (2)$$

Odtud plyne jednoznačnost řešení této úlohy a je dána i metoda výpočtu koeficientů interpolačního polynomu. Byla v ní použita obvyklá báze $\{1, x, \dots, x^n\}$ prostoru všech polynomů stupně nejvýše n .

Newton při řešení úlohy interpolace použil jinou soustavu báze polynomů

$$1, \quad \omega_0(x) = x - x_0, \quad \dots, \quad \omega_{n-1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (3)$$

Při řešení trojúhelníkové soustavy podmínek interpolace pro určení neznámých koeficientů interpolantu v této bázi asi dospěl k definici *poměrných diferencí*, jejichž rekurentní a explicitní definice (tento termín se ale vyskytuje poprvé u De Morgana) v dnešním zápisu je

$$\begin{aligned} [x_i]f &= f(x_i), \\ [x_0, x_1, \dots, x_i]f &= ([x_1, \dots, x_i]f - [x_0, \dots, x_{i-1}]f) / (x_i - x_0) = \\ &= \sum_{j=0}^i \left[f(x_j) / \prod_{k \neq j} (x_j - x_k) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Tyto lineární funkcionály v proměnné f se vyskytují jako koeficienty u báze polynomů v *Newtonově tvaru interpolačního polynomu*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ \cdots + [x_0, \dots, x_n]f \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \end{aligned} \quad (5)$$

Ten umožňuje snadno přejít k interpolačnímu mnohočlenu s menším nebo větším počtem bodů interpolace ubráním nebo přidáním odpovídajících členů. Pro speciální případ ekvidistantních uzlů byla odvozena celá řada jednodušších variant s použitím přímých, centrálních či zpětných diferencí (Newton, Gauss, Stirling, Bessel). Různé způsoby použití hodnot z tabulky diferencí jsou popisovány v tzv. *Frazerově diagramu*.

Lagrange našel jinou — velmi rozšířenou a v teorii užitečnou — techniku řešení problému interpolace, která vyjadřuje výsledný interpolant jako lineární kombinaci jiné báze prostoru všech polynomů stupně n . Tuto novou bázi tvoří tzv. *Lagrangeovy koeficienty* $l_i(x)$, odpovídající jednotlivým uzlům interpolace x_i . *Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu* je pak

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)f(x_i), \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} [(x - x_j)/(x_i - x_j)]. \quad (6)$$

V něm jako koeficienty v lineární kombinaci vystupují nejjednodušší lineární funkcionály — funkční hodnoty interpolované funkce. Uvedený tvar Lagrangeova koeficientu je odvozen z podmínek

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (\text{vlastnosti lagrangeovské báze}). \quad (7)$$

Důsledkem této vlastnosti je pak identita $\sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1$, která ukazuje, že Lagrangeovy koeficienty tvoří tzv. *rozklad jednotky*.

Vzhledem k jednoznačnosti řešení úlohy o interpolaci lze pro různé interpolační formule použít stejný výraz pro chybu interpolace, odvozený Cauchym, nebo různé jeho varianty (zejména v komplexním oboru — viz např. [2], [3], [25]).

Úloha trigonometrické interpolace je formulována takto:

$$(TI) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pro zadané uzly } \{x_i \in \langle 0, 2\pi \rangle, i = 0, 1, \dots, 2n\} \text{ a hodnoty } \{y_i \in R, i = 0, 1, \\ \dots, 2n\} \text{ najít trigonometrický polynom} \\ \\ T_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \\ \\ \text{který splňuje podmínky interpolace} \\ \\ T_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n. \end{array} \right. \quad (8)$$

Tato úloha se dá řešit podobnými postupy jako úloha interpolace algebraickým polynomem. Dosazením podmínek interpolace do předpokládaného tvaru (8) interpolantu dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro koeficienty trigonometrického polynomu. Její determinant je pro vzájemně různé uzly nenulový a úloha má proto jediné řešení. Můžeme také hledat lagrangeovskou bázi problému (TI) — lze (jen poněkud pracněji) prověřit, že potřebné vlastnosti mají lagrangeovské koeficienty $t_i(x)$ a interpolační trigonometrický polynom $T_n(x)$ definované vztahy

$$t_i(x) = \prod_{j \neq i} \sin[\frac{1}{2}(x - x_j)] / \sin[\frac{1}{2}(x_i - x_j)], \quad T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} t_i(x)y_i. \quad (9)$$

Ty mají podobnou strukturu jako v algebraickém případě; k jejich úpravě do tvaru trigonometrického polynomu se používají trigonometrické identity (proto se častěji používá uvedený algoritmus výpočtu koeficientů z podmínek interpolace). V případě ekvidistantních uzlů je i v úloze trigonometrické interpolace možno najít zjednodušený výraz pro koeficienty $t_i(x)$ a s využitím ortogonality použitého systému báзовých funkcí dostat zde formule *diskrétní Fourierovy transformace*, které poukazují na souvislost úlohy interpolace s *metodou nejmenších čtverců*. To ovšem platí i v případě algebraickém — interpolace je speciálním případem aproximace dat ve smyslu metody nejmenších čtverců: při dostatečném počtu báзовých funkcí je možno dosáhnout interpolací nulové středněkvadratické odchylky (takto je možno řešit úlohu interpolace např. v prostředí MATLABu).

Přes svou jednoduchost a názornost má lagrangeovská báze pro úlohu interpolace jistou nevýhodu v tom, že při změně v počtu uzlů interpolace se mění všechny členy interpolačního mnohočlenu. Proto byly ve třicátých letech dvacátého století studovány různé varianty iteračních algoritmů interpolace (Aitken, Neville, Richardson), které postupně rozšiřováním sítě uzlů počítají hodnoty jistých interpolantů od lineárních až po žádaný stupeň a umožňují také průběžný odhad chyby interpolace.

Jiným problémem, jehož řešení nalezl *Čebyšev*, bylo nalezení tzv. *optimálních uzlů interpolace*, které by pro daný interval a zvolený stupeň interpolačního polynomu svým rozmístěním v daném intervalu zajišťovaly minimální odchylku interpolantu a interpolované funkce měřenou v C -normě. Pro daný interval $\langle -1, 1 \rangle$ a daný stupeň n jsou takovými optimálními uzly kořeny *Čebyševova polynomu*

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)] \quad (T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1; \quad \dots).$$

Na jiný konečný interval je přeneseme lineárním zobrazením.

Postupně byly studovány také úlohy o interpolaci systému exponenciálních funkcí, racionálních lomených funkcí (Padé, Thiele, Nörlund) a analogické úlohy v komplexním oboru. V knize [25] najdeme např. pro interpolaci v komplexním oboru pomocí racionálních funkcí s póly v bodech $\{a_j, j = 1, 2, \dots, n-1\}$ a různými uzly interpolace $\{b_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ s předepsanými hodnotami $\{c_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ interpolant lagrangeovského tvaru

$$R(z) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{\omega(z)}{(z - b_i)\omega'(b_i)}, \quad \omega(z) = \prod_{j=0}^n (z - b_j) / \prod_{j=1}^n (z - a_j). \quad (10)$$

Při rozšíření formulace úlohy o interpolaci na lineární prostor generovaný obecnými funkcemi $\{f_i(x), i = 0, 1, \dots, n\}$ se kromě požadavku jejich lineární nezávislosti dostane tzv. *Haarova podmínka jednoznačné řešitelnosti úlohy interpolace*

$$\det [f_i(x_j)]_{i,j=0}^n \neq 0 \quad \forall \{x_j\}_{j=0}^n \quad (11)$$

(jiný používaný termín — *funkce $\{f_i(x)\}$ tvoří Čebyševův systém*).

V případě, že úloha o interpolaci má více řešení, je možno mezi nimi hledat řešení splňující další podmínky (nezáporná řešení, monotónní či konvexní řešení) nebo hledat

řešení, které např. minimalizuje vhodný funkcionál charakterizující jistou geometrickou či fyzikální vlastnost (křivost křivky, energii, rychlost).

2.2. Interpolace funkčních hodnot a derivací

Úloha o interpolaci funkčních hodnot byla postupně rozšířena tak, že v každém uzlu se kromě funkční hodnoty předepíše i hodnoty derivací.

Úlohou *Hermiteovy interpolace* se pak rozumí tento problém:

(HIP) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť v každém ze vzájemně různých uzlů } x_i, i = 0, 1, \dots, n \text{ máme} \\ \text{předepsány i hodnoty derivací } \{y_i^j = f^{(j)}(x_i), j = 0, 1, \dots, k_i - 1\}; \text{ je třeba} \\ \text{najít polynom co nejnižšího stupně, který v bodech interpolace nabývá těchto} \\ \text{předepsaných hodnot.} \end{array} \right.$

Jedním z možných přístupů k řešení této úlohy je metoda neurčitých koeficientů — po odhadu stupně interpolačního polynomu (podle pravidla: *počet parametrů polynomu = počet podmínek interpolace*) můžeme hledat jeho koeficienty ve zvolené bázi dosazením do podmínek interpolace. Bylo dokázáno, že takto zformulovaná úloha má pro libovolně zadaná data (uzly, hodnoty derivací) vždy právě jedno řešení (viz [2], [3], [4], [13]). Postupně byl propracován (Hermitem a dalšími) algoritmus výpočtu lagrangeovské báze pro řešení této úlohy — v ní každému uzlu odpovídá tolik tzv. Hermiteových koeficientů $h_i^j(x)$ této úlohy, kolik parametrů je v něm předepsáno. Jejich analytický tvar se dá odvodit z typických podmínek na lagrangeovskou bázi odpovídající tomuto problému:

$$(h_i^j)^{(m)}(x_i) = \delta_{jm}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j, m = 0, 1, \dots, k_i - 1. \quad (12)$$

Výsledný Hermiteův interpolační polynom pak zapíšeme ve tvaru

$$H(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{k_i-1} h_i^j(x) y_i^j, \quad (13)$$

kde pro koeficienty lagrangeovské báze platí

$$h_i^j(x) = \frac{1}{j!} \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{k_i-j}} \sum_{m=0}^{k_i-j-1} \frac{1}{m!} \left[\frac{(x-x_i)^{k_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(m)} (x-x_i)^m \quad (14)$$

s polynomem $\Omega(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)^{k_i}$.

V úloze Hermiteovy interpolace ale můžeme chápat předepsání více hodnot v jednom uzlu jako jeho násobnost — tedy splynutí více původně vzájemně různých uzlů. Vzhledem k některým výhodám Newtonova přístupu byla proto studována i zobecnění poměrných diferencí a Newtonův tvar interpolačního polynomu pro násobné uzly. Jedna z možných definic se opírá o uvedenou jednoznačnou řešitelnost úlohy hermitovské interpolace:

Poměrná diference funkce $f(x)$ — označovaná symbolem $[x_i, \dots, x_{i+k}]f$ — je rovna koeficientu u nejvyšší mocniny interpolačního polynomu, který v zadaných uzlech nabývá hodnot $f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, podle jejich násobnosti.

V této definici mohou některé uzly splývat — poznáme to v jejich výčtu v symbolu diference, kde jako poslední je uveden symbol funkce (nebo dat) — v souladu se značením podobných operací. Jiné definice vycházejí ze zadaných hodnot a geometrie sítě a definují poměrné diference rekurzivně — ty se zpravidla používají v algoritmech pro výpočet. Newtonův tvar interpolačního mnohočlenu pro úlohu hermitovské interpolace je pak formálně naprosto stejný jako v případě jednoduchých uzlů. Speciálním případem je pak i Taylorův polynom funkce $f(x)$, jestliže množina bodů interpolace je představována jediným bodem.

Podrobněji je možno se dočíst o poměrných diferencích, výrazech pro chybu interpolace a konvergenci interpolačního procesu v reálném i komplexním oboru v monografiích ([2], [4], [8], [9], [13], [20], [25]).

2.3. Lakunární interpolace (Hermite-Birkhoff)

Při studiu úloh interpolace, kde v posloupnosti derivací zadaných v některém uzlu interpolace jsou mezery (odtud použitý název), byly objeveny první jednoduché úlohy, které neměly řešení nebo měly více řešení v závislosti na geometrické struktuře sítě uzlů interpolace a mezer v posloupnostech předepsaných hodnot. Ilustrujme situaci na úlohách se třemi uzly a různými daty

$$\begin{aligned} & (x_i, y_i, y_i''), \quad i = 1, 2, 3; \\ & (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2'), \quad (x_3, y_3); \\ & (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2', y_2''), \quad (x_3, y_3). \end{aligned} \tag{15}$$

První z nich nemá obecně řešení, jestliže střední uzel je kořenem jistého polynomu šestého stupně (nulovost determinantu soustavy podmínek). Druhá úloha nemá řešení v případě, že platí $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$; třetí úloha má jediné řešení. Při studiu těchto problémů, kdy v posloupnosti derivací zadaných v daném uzlu interpolace jsou mezery (některé z derivací jsou vynechány — tzv. *lakunární interpolace*, *Hermiteova-Birkhoffova úloha interpolace* (HBIP)) — byla zavedena řada pojmů, které umožňují kratší formulace některých tvrzení o řešitelnosti této úlohy při libovolném rozložení bodů interpolace.

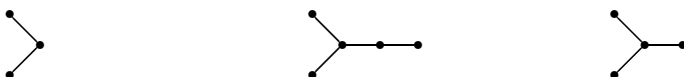
Incidenční matice $E = [e_{ij}]$ úlohy (HBIP) nepřihlíží ke geometrii sítě uzlů; má počet řádků rovný počtu vzájemně různých uzlů a v nich jedničky nebo nuly podle pravidla: $e_{ij} = 1$ (0), *je-li (není-li) v uzlu x_i předepsána hodnota j -té derivace* ($i = 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots$).

Incidenční matice uvedených tří úloh tedy jsou např.

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Incidenční matice E se nazývá

- *normální*, jestliže počet jejích sloupců je roven celkovému počtu jedniček (viz naše příklady),
- *vyvážená* (*poised*), jestliže příslušná úloha má jediné řešení pro každá vstupní data,
- *konzervativní* (*conservative*), neobsahují-li její prvky obsazené jedničkami strukturu podobnou té, kterou vidíme v prvních dvou z uvedených příkladů v podobě bloku lichého počtu po sobě jdoucích jedniček v jednom řádku s „vidličkovou“ grafovou strukturou v podobě, kterou ukazují první dvě schémata na následujícím obrázku.



Obecně je pro konzervativnost incidenční matice nepřípustný lichý počet (např. jedna, tři v prvním a druhém obrázku) po sobě jdoucích jedniček v centrálním vodorovném bloku. Třetí obrázek odpovídá uvedené třetí incidenční matici (sudý počet jedniček ve druhém řádku).

Nutná podmínka řešitelnosti úlohy (HBIP) s incidenční maticí E o r sloupcích byla zformulována (Pólya–Schoenberg, 1966) takto:

$$\sum_{i,j \leq k} e_{ij} \geq k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, r \quad (\text{Pólyova podmínka}). \quad (16)$$

Tato podmínka není postačující pro jednoznačnou řešitelnost problému (HBIP) — takovou však udává následující věta (Atkinson–Sharma–Fergusson, 1969):

Je-li incidenční matice úlohy (HBIP) normální, konzervativní a splňuje Pólyovu podmínku, pak je vyvážená.

Pro případ dvou uzlů je Pólyova podmínka nutnou i postačující podmínkou vyváženosti incidenční matice. Kompletní charakteristika jednoznačné řešitelnosti tohoto problému pro obecný počet uzlů interpolace je dodnes otevřeným problémem.

2.4. Interpolace středních hodnot a derivací

V klasické teorii interpolace se málo setkáváme s úlohou interpolace středních hodnot (lokálních integrálů) nebo jiných lineárních funkcionalů. Tomu je věnována pozornost až v poslední době, stejně jako hledání optimálních řešení v úlohách s více řešeními. Úloha *interpolace středních hodnot* je spojena s praktickou úlohou interpolace (aproximace) histogramu hladší funkcí — zde polynomem.

$$(MVI) \left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť je dána síť uzlů } \{x_i, i = 0, 1, \dots, n+1\} \text{ a hodnoty } \{g_i, i = 0, 1, \dots, n\}. \\ \text{Hledáme polynom } P_m \text{ co nejnižšího stupně takový, že jeho lokální střední} \\ \text{hodnoty} \\ \\ \frac{1}{r_i - l_i} \int_{l_i}^{r_i} P_m(x) dx = g_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i \leq l_i < r_i \leq x_{i+1}, \\ \\ \text{nabývají na zadaném intervalu (nebo jeho části) předepsaných hodnot.} \end{array} \right.$$

Tato úloha souvisí s úlohou (FVI): podle věty o střední hodnotě integrálního počtu platí $g_i = P_m(t_i)$, $t_i \in (x_i, x_{i+1})$, a proto existuje jediný polynom stupně nejvýše n , který řeší tuto úlohu. Mohli bychom také kombinovat úlohy (FVI), (MVI) — zadávat někde funkční, jinde střední hodnoty. Pokud bychom předepsali ve všech uzlech jen hodnoty derivací, pak taková *úloha interpolace derivací* (DVI) nemá jediné řešení: to — až na aditivní konstantu — dostaneme jako řešení úlohy (FVI) pro derivaci hledaného polynomu. Kombinací úloh (FVI), (DVI) je také uvedená úloha (HBIP).

3. Úloha interpolace ve dvou a více proměnných

3.1. Interpolace funkčních hodnot

Polynomická interpolace ve dvou a více proměnných přináší řadu nových problémů souvisejících s vlastnostmi sítě uzlů interpolace. Definice dvou odlišných pojmů pro stupeň polynomu (*total degree — celkový stupeň, coordinate degree — souřadnicový stupeň*) odpovídají dvěma nejpoužívanějším typům souřadnicových sítí: *síť trojúhelníkové* (pravidelné, nebo vzniklé triangulací oblasti s nepravidelně rozloženými vrcholy) a *síť obdélníkové*, vzniklé kartézským součinem jednodimenzionálních sítí. Základní odpověď na otázku o řešitelnosti úlohy o interpolaci funkčních hodnot ve dvou proměnných i její hlavní praktický problém najdeme v následující větě (viz [3]):

$$(IPD2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť jsou v rovině dány body } Q_i = (x_i, y_i), \text{ kde } i = 0, 1, \dots, M, \\ M = \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - 1, \text{ které neleží na algebraické křivce řádu } m. \\ \text{Pak ke každé funkci } f = f(x, y) \text{ existuje jediný polynom } P_m = P_m(x, y) \\ \text{celkového stupně nejvýše } m, \text{ který splňuje podmínky interpolace} \\ \\ P_m(x_i, y_i) = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, M. \end{array} \right.$$

Zmíněný praktický problém spočívá v kontrole podmínky o rozložení bodů interpolace. Při dosazení podmínek interpolace do předpokládaného tvaru interpolantu poznáme jejich splnění či nesplnění podle řešitelnosti vzniklé soustavy rovnic pro výpočet koeficientů interpolačního polynomu, jejich rozměry rychle rostou s počtem bodů interpolace. Věta nás zároveň upozorňuje na neexistenci čebyševovských systémů funkcí, se kterými by se problém interpolace dal řešit pro libovolné rozložení uzlů interpolace. Je známo, že míra množin bodů, pro které je úloha o interpolaci neřešitelná, je nulová.

Pro různá seskupení uzlů interpolace se vždy dá najít takový podprostor polynomů, ve kterém má úloha o interpolaci řešení. V metodě konečných prvků (kde se často používá hermitovská interpolace) se pro systém lokálních parametrů (lineárních forem, funkcionalů) na zvoleném prvku (se stanoveným rozložením uzlů interpolace), které jednoznačně určují interpolant zvoleného typu, používá termín *unisolvantní* — viz [5], [6]. V následujících odstavcích uvedeme některá známá rozložení uzlů interpolace, jim odpovídající typy interpolačních polynomů a také odpovídající báze funkce ve zvoleném podprostoru.

3.3.1. Síť typu kartézského součinu

Jestliže obdélníková síť $\{(x_i, y_j)\}$ je kartézským součinem jednorozměrných sítí $\{x_i, i = 0, 1, \dots, n\} \times \{y_j, j = 0, 1, \dots, m\}$ s obecně neekvidistantními kroky sítí, pak k interpolaci je možno použít polynom *souřadnicových stupňů* n, m

$$P_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j. \quad (17)$$

Jeho koeficienty můžeme najít dosazením do podmínek interpolace. Můžeme také využít znalosti konstrukce jednodimenzionálních Lagrangeových koeficientů a toho, že jejich tenzorovým součinem dostáváme lagrangeovskou bázi $l_{ij}(x, y)$ pro interpolaci na obdélníkové síti a Lagrangeův interpolační polynom

$$\begin{aligned} l_{ij}(x, y) &= l_i^x(x) l_j^y(y), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m, \\ L_{m,n}(x, y) &= \sum_{i,j} l_{ij}(x, y) f(x_i, y_j) = \\ &= [l_0^y(y), \dots, l_m^y(y)] [f_{ij}]_{i,j=0}^{n,m} [l_0^x(x), \dots, l_n^x(x)]^T \end{aligned} \quad (18)$$

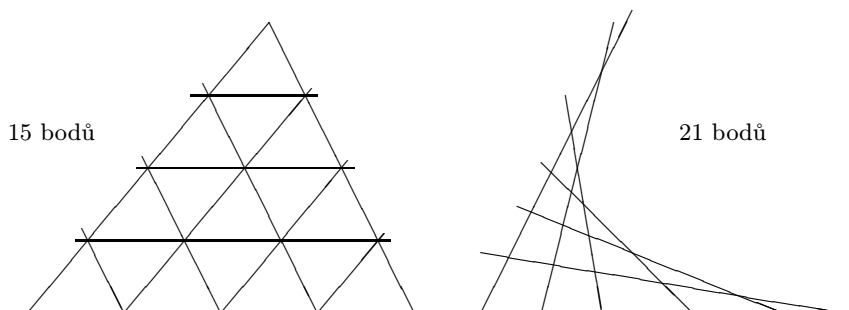
s tzv. *mapovací maticí* (*mapping matrix*) $[f_{ij}] = [f(x_i, y_j)]$. Pro tuto matici funkčních hodnot můžeme zcela analogickým způsobem na jednotlivých souřadnicových přímkách definovat a spočítat tabulky poměrných diferencí (jejich rozměry se postupně zmenšují o jedničku v každé dimenzi) a zapsat interpolační polynom v Newtonově tvaru

$$P_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \cdot \prod_{k=0}^{j-1} (y - y_k) \right) \cdot [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j] f. \quad (19)$$

Při použití *celkového stupně* interpolačního polynomu (daného maximálním součtem exponentů v jednotlivých členech) bychom mohli pracovat lagrangeovskou i newtonovskou technikou, ovšem data by byla zadána jen na trojúhelníkové části této obdélníkové sítě (ta nepředpokládá ekvidistantní dělení).

3.1.2. Trojúhelníkové a obecnější sítě

Při rozvíjení základů teorie a praxe metody konečných prvků (MKP) v šedesátých letech (Zienkiewicz, Zlámal, Ženíšek, Ciarlet) se začaly systematicky používat trojúhelníkové sítě a zvýšil se zájem matematiků o rozvíjení teorie interpolace na obecných sítích. Pracovníci v MKP se zabývali hlavně studiem vhodných konfigurací uzlů interpolace a příslušných bázeových funkcí ve vytvářených podprostorech polynomů, které by zajistily jednoznačnou řešitelnost problému lagrangeovské nebo hermitovské interpolace. Z povahy úlohy plyne, že na trojúhelníkových sítích se používá k interpolaci podmnožin polynomů s celkovým stupněm polynomu. Po analýze kvadratického interpolantu (Zlámal, 1968) dokázal Nikolaides (1972) v práci [21] jednoznačnou řešitelnost úlohy o interpolaci funkčních hodnot na síti, vzniklé pravidelným dělením na simplexu v R^n (*principal lattice*) — příklad takového pravidelného dělení trojúhelníka v rovině je na následujícím obrázku vlevo.



V práci je použito tzv. *barycentrických souřadnic*, které přivádějí do problému vhodnou symetrii. Tyto výsledky rozšířili v roce 1977 Chung a Yao v práci [15], kde byly zformulovány podmínky *geometrické charakterizace rozložení uzlů interpolace* (*geometric characterization of the distribution of points*), zajišťující jednoznačnost řešení úlohy interpolace v následujícím tvaru:

$$(GC) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sít' uzlů } X = \{x_1, \dots, x_N\} \in R^n, \quad N = \binom{n+k}{k}, \quad k \in N \text{ splňuje podmínku} \\ \text{(GC), jestliže ke každému uzlu } x_i \text{ existuje } k \text{ vzájemně různých nadrovin} \\ \{G_{i1}, \dots, G_{ik}\} \text{ takových, že} \\ \text{(i) } x_i \text{ neleží v žádné z těchto nadrovin,} \\ \text{(ii) všechny ostatní uzly z } X \text{ leží v alespoň jedné z těchto nadrovin.} \end{array} \right.$$

V této práci je také definován obecnější typ sítě, který splňuje podmínku (GC) — tzv. *přirozená síť* (*natural lattice*):

$$(NL) \left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť } k \text{ je přirozené číslo. Předpokládejme, že existuje } M = k + n \text{ různých} \\ \text{nadrovin } H_1, \dots, H_M \text{ v } R^n \text{ takových, že průnikem } n \text{ různých těchto nadrovin} \\ \text{je bod a rozdílné } n\text{-tice nadrovin se protínají v rozdílných bodech. Pak mno-} \\ \text{žina všech takových bodů tvoří přirozenou síť } k\text{-tého řádu v } R^n \text{ generovanou} \\ \text{nadrovinami } H_1, \dots, H_M. \end{array} \right.$$

Příklad popisované sítě bodů v rovině je na předchozím obrázku vpravo (průsečíky sítě přímkami). Dále jsou v uvedené práci dokázána následující tvrzení:

Pro každá přirozená čísla n, k vždy existuje množina $n+k$ nadrovin v R^n , které generují přirozenou síť k -tého řádu.

Pravidelná síť na simplexu v R^n splňuje podmínku (GC).

Existují i jiné sítě s N uzly, které splňují podmínku (GC) (vznikají vhodnou transformací předchozích).

Další autoři (Chui, Lorentz) se pak zabývali i jinými možnostmi vhodných konfigurací uzlů interpolace a lokálních parametrů (lineárních funkcí), které jednoznačně určují interpolant zvoleného typu na studované síti (prvku). Pro ilustraci právě citovaných výsledků uveďme jako první příklad analytický tvar Lagrangeova interpolačního polynomu na rovnoměrné trojúhelníkové síti v tzv. *barycentrických souřadnicích*. Rozdělíme-li každou stranu trojúhelníka na n stejných dílů a vedeme jimi rovnoběžky s ostatními stranami, dostaneme rovnoměrné dělení trojúhelníka s uzly t o barycentrických souřadnicích $t_s, s = (s_1, s_2, s_3)$:

$$t = (t_1, t_2, t_3) = (s_1, s_2, s_3)/n = t_s, \quad s_i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \sum_i s_i = n.$$

Interpolační polynom *celkového stupně* n , který v bodech sítě o souřadnicích t_s nabývá hodnot p_s , je pak dán vztahem

$$P(t) = \sum_{|s|=n} p_s l_s^n(t), \quad |s| = \sum_{i=0}^n s_i, \quad (20)$$

kde vektor t představuje barycentrické souřadnice bodu trojúhelníka a lagrangeovské koeficienty jsou definovány vztahy

$$l_s^n(t) = \frac{n^n}{s!} \prod_{i=0}^{s_1-1} \prod_{j=0}^{s_2-1} \prod_{k=0}^{s_3-1} \left(t_1 - \frac{i}{n}\right) \left(t_2 - \frac{j}{n}\right) \left(t_3 - \frac{k}{n}\right). \quad (21)$$

Newtonovský i lagrangeovský typ konstrukce interpolačního polynomu pro podobně strukturovanou síť uzlů s odpovídající konstrukcí poměrných diferencí lze najít v práci [23], kde je použit termín *interpolace po blocích* (*interpolation in block*). Jako další příklad lokálního parametru, který má interpolant reprodukovat (interpolovat), uveďme *lokální střední hodnoty* interpolované funkce $f(x, y)$ na zadaných podoblastech D_i (intervalech, obdélkách, trojúhelnících) o délce či ploše $m(D_i)$:

$$g_i = \frac{1}{m(D_i)} \iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$

Tak například na obdélku v rovině je pro funkci zde definovanou devět parametrů bikvadratického polynomu jednoznačně určeno čtyřmi funkčními hodnotami ve vrcholech, čtyřmi jednodimenzionálními středními hodnotami podél stran a jednou dvoudimenzionální střední hodnotou interpolované funkce na celém obdélku (viz [16]–[18]).

Lineární element na trojúhelníku můžeme určit také jeho hodnotami ve středech stran, což jsou vlastně střední hodnoty interpolantu na odpovídajících stranách. Podrobněji se o úloze interpolace středních hodnot dočteme v monografii [4] (kap. XII a násl.), kde je uvedena Newtonova i Lagrangeova technika řešení takových úloh.

3.2. Hermitovská interpolace

Vzhledem k potřebám úsporného uchovávání informací o síti, o lokálních parametrech a kontrole hladkosti spojovaných elementů se v metodě konečných prvků volí především parametry soustředěné do bodů sítě — tedy kromě funkčních hodnot i hodnoty parciálních nebo směrových derivací odpovídajících řádů. Tím se vlastně dostáváme do oblasti hermitovské nebo ještě obecnější interpolace — podle druhu použitých parametrů. Tak např. bikubický polynom (souřadnicový stupeň) je na obdélníku jednoznačně určen 16 parametry — v každém vrcholu čtyřmi hodnotami $\{f^{i,j}, i, j = 0, 1\}$ funkce, prvních derivací a smíšené derivace. Na trojúhelníku je deset parametrů kubického polynomu (celkový stupeň) jednoznačně určeno funkčními hodnotami ve třech vrcholech, hodnotami parciálních derivací ve směrech z nich vycházejících stran a funkční hodnotou v těžišti. V MKP jsou studovány také speciální interpolanty pro sítě vzniklé triangulací čtvercové sítě rozdělením každého čtverce na dva nebo čtyři trojúhelníky.

V tzv. *Morleyho elementu* na trojúhelníku je kvadratický polynom definován šesti lokálními parametry — třemi funkčními hodnotami ve vrcholech a třemi středními hodnotami derivací podél normály k jednotlivým stranám. Takové typy lokálních parametrů (Kergin, Micchelli–Milman aj.) jsou také zahrnuty v teorii obsažené v monografii [4]. Další zobecnění některých výsledků najdeme v pracích autorů Gevorgiana, Hakopiana a Sahakiana z posledních let.

Mnoho úsilí bylo věnováno také rozvoji techniky poměrných diferencí ve dvou a více proměnných pro interpolaci na obou základních typech sítí. Klasický přístup najdeme v knize [2], poněkud technicky náročnější přístup s integrálním tvarem definice poměrných diferencí v R^n najdeme v knihách [4], [9], [14], [19], [20], v řadě časopiseckých prací (velmi pěkná je verze z práce [22]). Tento aparát se využívá při práci se speciálním typem interpolantů — splajny. Těm se budeme poněkud podrobněji věnovat v následující kapitole.

V závěru se stručně zmíníme o dalších speciálních typech interpolantů, které byly studovány v poslední době.

Sheppardova metoda „metrické interpolace“ (Gordon–Wixom, 1976) pro interpolaci na chaotické síti bodů $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ s předepsanými hodnotami F_i pracuje s interpolantem $U(P)$, který v bodě $P(x, y)$ se vzdálenostmi $d_i = \|P - P_i\|$ od jednotlivých bodů (v normě odpovídající použité metrice — často euklidovské) je definován bázovými funkcemi f_i a výsledným předpisem pro interpolant

$$f_i(P) = \prod_{j \neq i} d_j / \left[\sum_{k=0}^n \prod_{j \neq k} d_j \right], \quad U(P) = \sum_{i=0}^n F_i f_i(P). \quad (22)$$

Nevýhodou tohoto interpolantu je nespojitost jeho derivací v bodech interpolace. Tuto nevýhodu částečně odstraňuje *Hardyho metoda (multiquadric method)*, která ke vzdálenosti d_i přidává kladný parametr a pracuje s modifikovanými vzdálenostmi $b_j(P) = (d_j + r^2)^{1/2}$; tím se dosáhne spojitosti derivací.

Další skupinou speciálních interpolantů pro centrálně symetrická data jsou *radiální funkce (radial functions)* s interpolantem tvaru

$$S(x) = \sum_i a_i g(\|x - x_i\|) + P_m(x) \quad (23)$$

s polynomem $P_m(x)$ a funkcí g definovanou na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

4. Interpolační splajny

Doposud jsme používali k interpolaci funkce, které byly na celém definičním oboru definovány jediným funkčním předpisem. Už dávno však byly v matematice používány funkce, definované po částech konstantní funkcí (histogramy), lineární funkcí (polygon), kvadratickou funkcí (v Simpsonově metodě numerické integrace). Stejně tak technika ve svých modelech a konstrukcích dávno používá složené křivky a plochy sestávající z plátů. Tento způsob dnes využívá při zobrazování numerických dat počítačová grafika.

Polynomické splajny $s_{kd}(x)$ stupně k s defektem d jsou definovány pomocí sítě uzlů splajnu $\{x_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ na reálné ose. Na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je takový splajn polynomem stupně k ; jednotlivé segmenty splajnu jsou pak spojeny tak, aby derivace až do řádu $k - d$ byly v uzlech splajnu spojitě.

Spojíme-li např. sousední segmenty Hermiteových kubických polynomů interpolujících na naší síti předepsané funkční hodnoty a první derivace, dostáváme příklad tzv. lokálního splajnu s defektem $d = 2$. Zcela nový objekt, kubický (globální) splajn s defektem $d = 1$, dostaneme, když nepředepíšeme v uzlech libovolně první derivace, ale spočítáme je tak, aby po spojení segmentů byly spojitě i jejich druhé derivace. Tedy vlastně s menším počtem dat dosáhneme větší hladkosti! Tento požadavek spojitosti klade jisté podmínky na lokální parametry splajnu použité v jeho lokální reprezentaci — ty mají tvar rekurencí, které jsou základem algoritmů pro výpočet těchto lokálních parametrů z podmínek interpolace. Například pro kubické splajny s defektem jedna a s funkčními hodnotami s_i předepsanými v uzlech splajnu se na ekvidistantní (resp. obecné) síti uzlů dají tyto podmínky (*continuity conditions*) v uzlech x_i napsat jako rekurence mezi zadanými hodnotami s_j a neznámými hodnotami první derivace $m_j = s'_{31}(x_j)$ (viz např. [8], [16]) tvaru

$$\frac{1}{6}(m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1}) = \frac{1}{2h}(s_{i+1} - s_{i-1}), \quad (24)$$

resp. $a_{i-1}m_{i-1} + a_i m_i + a_{i+1}m_{i+1} = f_i$,

kde koeficienty a_j pro obecnou síť jsou závislé jen na geometrii sítě uzlů a koeficienty f_i dále na předepsaných okolních hodnotách s_{i-1} , s_i , s_{i+1} . Navíc platí, že podmínkami interpolace není takový splajn jednoznačně určen — k tomu je třeba předepsat

další podmínky, často ve tvaru dvou předepsaných okrajových hodnot jeho derivací. Podmínky spojitosti, interpolace a okrajové podmínky, vyjádřené pomocí vhodných lokálních parametrů ve tvaru soustavy lineárních rovnic, umožňují pak spočítat tyto neznámé parametry. Také aproximační vlastnosti splajnů (velikost chyby interpolace) se podle očekávání ukázaly být velice příznivé, a proto najdeme splajny v interpolačních procedurách řady programových produktů (MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, grafické systémy).

U splajnů sudých stupňů je často účelné oddělit síť uzlů splajnu a bodů interpolace; tím se dostanou další volné parametry, kterých je možno využít k dosažení požadovaných vlastností interpolantu. Podrobněji je možno se seznámit s elementárními konstrukcemi splajnů nižších stupňů pomocí jejich lokálních parametrů např. v [16] až [18], [23].

Uvedená technika lokálních parametrů je odlišná od technik používaných v klasických interpolačních postupech — nepoužívá totiž báze prostoru výsledných funkcí — tedy splajnů. Po delším hledání takových vhodných bází (mocniny x^j a tzv. „useknuté mocniny“ x_+^j) se v sedmdesátých letech (Cox, De Boor) podařilo najít vhodnou bázi tzv. *B-splajnů*. Ty představují splajny na zvolené síti, nezáporné a s konečným kompaktním nosičem (např. u splajnů kubických sestává ze sousedních čtyř intervalů sítě); na síti uzlů y_i (které mohou být i násobné) je takový B-splajn stupně $k - 1$ (používá se také termín „splajn řádu k “) vyjádřen pomocí poměrných diferencí funkce $(t - x)_+^{k-1}$ vzhledem k proměnné t předpisem

$$B_i^k(x) = (y_{i+k} - y_i)[y_i, \dots, y_{i+k}](t - x)_+^{k-1}, \quad (25)$$

který umožňuje pro danou síť uzlů rekurzivně spočítat hodnoty B-splajnu zvoleného stupně. Tyto funkce jsou takto každá přiřazena k jistému uzlu, tvoří rozklad jednotky a mají proto jednu z důležitých vlastností Lagrangeových koeficientů. K výraznému posunu v jejich užívání ve výpočtech došlo však až tehdy, když byl nalezen jiný rekurentní vztah pro výpočet hodnot B-splajnů (Cox, 1972)

$$B_i^k(x) = \frac{x - y_i}{y_{i+k-1} - y_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{y_{i+k} - x}{y_{i+k} - y_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x), \quad (26)$$

který umožňuje pro danou síť snadno spočítat funkční hodnotu B-splajnu pro danou hodnotu x a zvolený stupeň splajnu rekurzí, začínající B-splajny stupně nula (stupňovitými funkcemi). Každý splajn $s(x)$ je pak možné vyjádřit v této bázi B-splajnů (pro její konstrukci je ovšem třeba odpovídajícím způsobem rozšířit síť uzlů) ve tvaru

$$s(x) = \sum_j b_j B_j^k(x). \quad (27)$$

Hodnoty koeficientů b_j se spočítají z podmínek interpolace — ty představují soustavu lineárních rovnic s pásovou strukturou. Je zde možno volit body interpolace v rozsahu nosiče příslušného B-splajnu (Schoenberg–Whitney), na okrajích případně s jejich pomocí zformulovat příslušné okrajové podmínky. Jsou základem Spline Toolboxu

v MATLABu. B-splajny se staly také vhodnouází pro aplikaci metody nejmenších čtverců — jejich relativně malý nosič vede i zde k pásovým maticím odpovídajících soustav lineárních rovnic pro koeficienty takové aproximace.

Kromě polynomických splajnů sestavených z polynomických segmentů byla rozpracována také teorie *trigonometrických splajnů*, jejichž segmenty tvoří trigonometrické polynomy (viz např. [23]). Další zobecnění vyšla ze snahy spojovat segmenty, které jsou v jednotlivých intervalech řešením téže diferenciální rovnice (nebo rovnice s různými hodnotami parametru diferenciálního operátoru — tzv. *L-splajny*) — stručně je o nich pojednáno v [23].

Volných parametrů splajnů bylo využito ve *variační teorii splajnů*, která je hledá tak, aby minimalizovala vhodný funkcionál (charakterizující zpravidla jistou geometrickou vlastnost interpolantu — oscilace, křivost) na širší třídě všech takových interpolantů (Atteia, Laurent). Takové splajny se ukázaly být užitečnými při řešení řady úloh (optimální kvadraturní vzorce, algoritmy); byly použity také ke konstrukci *vyhlazujících splajnů*, které představují jistý kompromis mezi interpolací (měřeno středněkvadratickou odchylkou) a hladkostí (měřeno odpovídajícím funkcionálem $\|f^{(p)}\|$). Jinou cestou k využití volných parametrů splajnů je snaha zachovat některé tvarové vlastnosti interpolovaných dat (nezápornost, monotónnost, konvexnost–konkávnost).

Vzhledem k jisté analogii mezi B-splajny a Lagrangeovými koeficienty se potvrdilo, že techniku interpolace z jedné proměnné lze pomocí tenzorového součinu přenést snadno na obdélníkové sítě, kde bazové funkce tvoří součiny odpovídajících jednodimenzionálních B-splajnů. Na trojúhelníkových sítích byla v té době už známa řada výsledků z metody konečných prvků, která také spojuje polynomické funkce na triangulované oblasti tak, aby výsledná funkce měla jistou hladkost (jde o analogii lokálních reprezentací splajnů). Zde byla např. známa tato věta (Ženišek, 1974):

K tomu, abychom dosáhli po spojení polynomických interpolantů na trojúhelníkové síti spojitosti m -tých derivací, je nutné ve vrcholech trojúhelníků předepsat všechny derivace alespoň do řádu $2m$.

Nejnižší stupeň polynomů, který zajistí spojitost m -tých derivací celkového interpolantu, je $4m + 1$.

Spojitosti m -tých derivací při zadání funkčních hodnot a derivací do řádu m bylo dosaženo ve složitějších konstrukcích polynomického interpolantu na trojúhelníku (*split triangle interpolants*), kde je trojúhelník dále rozdělen na jednotlivé části a body interpolace jsou i na středech stran a podobně (Clough–Tocher, Powell–Sabin, Heindel, Sablonniere).

Bylo vyvinuto mnoho úsilí také ve snaze najít vhodnou vícerozměrnou analogii B-splajnů pro obecnější tvary oblastí a jejich dělení. V řadě z nich bylo použito různých zobecnění poměrných diferencí a vznikaly tak *simplex*-, *box*-, *vertex splines*, o kterých je možno se dočíst v monografiích [4], [9], [14].

5. Interpolace se zachováním křivek

V dosavadních formulacích úlohy o interpolaci jsme uvažovali konečný počet uzlů interpolace a předepsaných hodnot. Při studiu otázek konvergence interpolačního procesu pro analyticky zadanou funkci při zvyšování počtu uzlů interpolace bylo nutno uvažovat již spočetnou množinu uzlů a hodnot. Při interpolaci funkce $f = f(x, y)$ na obdélníkové síti *technikou tenzorového součinu* můžeme výsledek první fáze algoritmu — konstrukci interpolantů v jedné z proměnných při fixované hodnotě druhé proměnné, s lagrangeovskými koeficienty $l_i(x)$, $l_j(y)$ —

$$P_x f(x, y) = \sum_i f(x_i, y) l_i(x), \quad P_y f(x, y) = \sum_j f(x, y_j) l_j(y) \quad (28)$$

interpretovat jako funkce, které na celé přímce $x = x_i$ ($y = y_j$) nabývají stejných hodnot jako funkce $f(x, y)$. Sestrojíme-li proto nový interpolant pomocí předpisu (s použitím symbolu pro *booleovský součet*)

$$Bf = (P_x \oplus P_y)f = P_x f + P_y f - P_x P_y f, \quad (29)$$

kde poslední výraz představuje klasický interpolant, zachová tento interpolant čtyři okrajové křivky každého „plátu“ (*blended interpolation, transfinite interpolation*). V počítačové geometrii jsou tímto způsobem definovány (Birkhoff, Gordon, Coons, Hall, Fergusson) *parametrické pláty, plochy určené okrajem*. Například *přímková plocha s okrajovými křivkami* $c_1(u)$, $c_2(u)$ (*ruled surface*) je určena vztahem

$$r(u, v) = (1 - v)c_1(u) + vc_2(u), \quad u, v \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (30)$$

Bilineární Coonsův plát s okrajovými křivkami $r(u, 0)$, $r(u, 1)$, $r(0, v)$, $r(1, v)$ je popsán parametrickými rovnicemi

$$r(u, v) = [1 - u, u] \begin{bmatrix} r(0, v) \\ r(1, v) \end{bmatrix} + [r(u, 0), r(u, 1)] \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix} - \\ - [1 - u, u] \begin{bmatrix} r(0, 0), & r(0, 1) \\ r(1, 0), & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Tyto pláty po svém spojení zachovávají okrajové křivky „drátěného modelu plochy“; výsledná plocha je tedy (při zachování jistých pravidel pro parametrizaci) spojitá, ale na hranici plátů nejsou obecně spojitě první derivace — je tedy druhem splajnu interpolujícího funkční hodnoty.

Spojitosť prvních derivací zajistí až složitější konstrukce *Coonsova bikubického plátu* s okrajovými křivkami $r(0, v)$, $r(1, v)$, $r(u, 0)$, $r(u, 1)$, kde se používá hermitovské interpolace s bázovými funkcemi h_i^0 , h_i^1 (viz odst. 2.2) a s hodnotami interpolované funkce a příslušných parciálních derivací na hranici plátu. Označíme-li symbolem

$H(t) = [h_0^0(t), h_1^0(t), h_0^1(t), h_1^1(t)]$ vektor hermitovských koeficientů v krajních bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, můžeme pak Coonsův bikubický plát zapsat v parametrickém tvaru

$$r(u, v) = H(u) \cdot [r(0, v), r(1, v), r_u(0, v), r_v(1, v)]^T + \\ + [r(u, 0), r(u, 1), r_u(u, 0), r_v(u, 1)] \cdot [H(v)]^T - \\ - H(u) \cdot \begin{bmatrix} r(0, 0), & r(0, 1), & r_v(0, 0), & r_v(0, 1) \\ r(1, 0), & r(1, 1), & r_v(1, 0), & r_v(1, 1) \\ r_u(0, 0), & r_u(0, 1), & r_{uv}(0, 0), & r_{uv}(0, 1) \\ r_u(1, 0), & r_u(1, 1), & r_{uv}(1, 0), & r_{uv}(1, 1) \end{bmatrix} \cdot [H(v)]^T$$

s vektory okrajových křivek a *mapovací maticí* rozměrů $(4, 4)$, kde jsou zobrazena všechna data použitá v konstrukci tohoto plátu (viz [10], [11], [12]). Formální zápis s použitím symbolů pro booleovský součet je opět možno psát ve tvaru

$$Pr(u, v) = (P_1 \oplus P_2) r(u, v) = (P_1 + P_2 - P_1 P_2) r(u, v). \quad (32)$$

Tento plát zajišťuje spojitost prvních derivací a interpoluje předepsané hodnoty funkce a jejich derivací na hranici plátu — jde tedy o druh Hermiteovy interpolace. K dosažení spojitosti druhých derivací je třeba ještě složitější konstrukce s použitím hermitovských koeficientů pátého stupně (*Gregoryho čtverec*).

Analogické konstrukce jsou dnes známy i pro funkce tří proměnných.

Podobná problematika byla studována i pro trojúhelníkové sítě křivek. V některých grafických systémech je trojúhelníkový plát chápán jako degenerovaný obdélníkový plát, kde splynou dva vrcholy. Například přímkovou kuželovou plochu s řídicí křivkou $r(0, v)$ a vrcholem Q lze popsat parametrickou rovnicí (v literatuře se setkáme s termíny *ruled*, *lofted surface*)

$$r(u, v) = (1 - u)r(0, v) + uQ. \quad (33)$$

Mnoho trojúhelníkových prvků vzniklo v metodě konečných prvků použitím hermitovských interpolantů na společných stranách. Pomocí analogie techniky booleovského součtu pro trojúhelníky dostal Coons (1973) *spojitý trojúhelníkový plát*; spojitost prvních derivací zajišťuje složitější *BBG plát* (Barnhill–Birkhoff–Gregory, 1983), kde se objevuje symbol $(P_1 \oplus P_2 \oplus P_3)f$. Spojitost druhých derivací na takto konstruovaných plátech studovali Alefeld–Barnhill (1984). Trojúhelníkové pláty zajišťující spojitost tečných rovin na hranici studoval Nielson (1987), spojitou křivost (*visual continuity* VC²) Hagen–Pottmann (1989). Jde o problematiku s dynamickým rozvojem poznatků a aplikací — lze ji sledovat např. v časopise [CAGD]. Tam a v publikacích [11], [12] se dočteme o křivkách a plochách určených kontrolní sítí bodů (*Bernštejnovy–Bézierovy křivky, plochy*), se kterými můžeme řešit úlohu interpolace tak, že z podmínek interpolace spočítáme kontrolní síť odpovídajícího interpolantu.

6. Abstraktní formulace úlohy interpolace

Matematika ve svém vývoji přechází obvykle od speciálních a konkrétních úloh k jejich abstraktní formulaci. Společným jazykem mnoha matematických disciplín se stala

ve dvacátém století funkcionální analýza. V ní se už v šedesátých letech objevily práce a monografie o interpolaci lineárních operátorů — to je však problematika poněkud specifická, kterou se v tomto přehledu nebudeme zabývat. V monografii [1] Atteia (jeden ze zakladatelů variační teorie splajnů) formuluje úlohu interpolace v lineárních a Banachových prostorech. Ukazuje tam opět na dva odlišné přístupy k jejímu řešení (Lagrange, Newton) a demonstruje, že tato formulace obsahuje některé z předchozích uváděných problémů. Ukážeme v následujícím textu zjednodušený tvar tam uvedených výsledků (s jistými nepřesnostmi).

(IP) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nechť } E, F \text{ jsou vektorové prostory, } M \subset E \text{ a } E^*, F^* \text{ prostory k nim duální;} \\ v : E \rightarrow F \text{ je lineární zobrazení, } z_0 \in \text{Im } v. \text{ Úlohou interpolace spojenou s ob-} \\ \text{jekty } \{E, F, M, v, z_0\} \text{ je charakterizovat množinu prvků } H = M \cap v^{-1}(z_0). \end{array} \right.$

Pokud existuje prvek $x_0 \in M$ takový, že $v(x_0) = z_0$, pak množina řešení (IP) je

$$H = (\text{Ker } v \cap M) + x_0;$$

jestliže $z_0 \notin v(M)$, je H prázdná množina a úloha nemá řešení.

Duální úlohou je pak charakterizovat množinu $(\text{Ker } v \cap M)^\circ = \overline{\text{Im } {}^t v + M^\circ}$ (symbolem A° je označena polára množiny A , ${}^t v$ je transponované zobrazení $F^* \rightarrow E^*$).

6.1. Lagrangeova interpolace

Pro úlohu interpolace v Banachově prostoru B se skalárním součinem označeným symbolem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je pak úloha interpolace formulována takto:

Pro $(n+1)$ -dimenzionální podmnožinu $M \subset B$, vektor $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in R^{n+1}$ a prvky y_0^*, \dots, y_n^* z duálního prostoru B' lineárních funkcionalů na B charakterizovat množinu

$$H(\alpha) = M \cap C(\alpha), \quad \text{kde } C(\alpha) = \{y \in B : \langle y, y_j^* \rangle = \alpha_j, j = 0, 1, \dots, n\}. \quad (34)$$

Lagrangeova konstrukce interpolantu:

K prvkům $\{y_i^*, i = 0, 1, \dots, n\}$ je třeba najít jejich restrikcí $\{z_i^*, i = 0, 1, \dots, n\}$ na podmnožinu M a biortogonální systém prvků $\{z_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ s vlastností $\langle z_i, z_j^* \rangle = \delta_{ij}$; pak pro prvek $y \in B$ je

$$\sum_{i=0}^n \langle y, y_i^* \rangle z_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i z_i = M \cap v^{-1}(\alpha) = H(\alpha) \quad (35)$$

Lagrangeovým interpolantem prvku y vzhledem k předepsaným funkcionalům $\{y_i^*\}$. Máme-li jinou bázi $\{w_j\}$ v podprostoru M a jí odpovídající biortogonální systém

$\{w_j^*\}$ v B' , pak ze vztahu $H(\alpha) = \sum_i \alpha_i z_i = \sum_j \beta_j w_j$ plyne pro vztah mezi těmito bázemi a odpovídajícími koeficienty

$$\alpha_i = \sum_j \langle w_j, z_i^* \rangle \beta_j; \quad \beta = [\langle w_j, z_i^* \rangle]_{i,j=0,1,\dots,n}^{-1} \alpha \quad (36)$$

(je to analogie vztahu mezi Lagrangeovými koeficienty a koeficienty interpolačního polynomu v bázi $\{x^k\}$ v klasické úloze — vztahy mezi koeficienty pro polynomy stupňů $n, n+1$ nejsou jednoduché).

Podobně se dají interpretovat jako úlohy Lagrangeovy interpolace klasická úloha o trigonometrické interpolaci a Fourierův rozvoj periodické funkce.

Řešení duální úlohy pak lze charakterizovat takto:

$$y^* \in (\text{Ker } v \cap M)^\circ \iff y^* = \sum_{i=0}^n \gamma_i y_i^* + z^*, \quad \forall z \in M \text{ taková, že } \langle z, z^* \rangle = 0 \quad (37)$$

nebo také takto:

k prvku $y^ \in B'$ najděte koeficienty $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in R$ tak, že platí*

$$\langle z, y^* \rangle = \left\langle z, \sum_{i=0}^n \gamma_i y_i^* \right\rangle, \quad \forall z \in M; \quad y^*, y_i^* \in B'. \quad (38)$$

6.2. Newtonova interpolace

Tento abstraktní postup modeluje klasický Newtonův algoritmus interpolace. Je-li $\{w_0, \dots, w_n\}$ jistou bází v podprostoru M a systém funkcionalů $\{z_0^*, \dots, z_n^*\}$ představuje bázi v prostoru B' , pak existují trojúhelníkové systémy skalárů

$$\{\alpha_{ij} : 0 \leq j \leq i-1, 1 \leq i \leq n, \alpha_{ii} = 1\}, \quad \{\beta_{ij} : 0 \leq j \leq i, 0 \leq i \leq n, \beta_{ii} \neq 0\} \quad (39)$$

takové, že pro nové báze $\{\bar{w}_i\}, \{\bar{z}_j^*\}$ určené vztahy

$$\bar{w}_0 = w_0; \quad \bar{w}_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} w_j + w_i, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \bar{z}_i^* = \sum_{j=0}^i \beta_{ij} z_j^*, \quad 0 \leq i \leq n \quad (40)$$

platí vztahy biortogonality $\langle \bar{w}_i, \bar{z}_j^* \rangle = \delta_{ij}$. Pro každý prvek $z \in M$ a zadaný vektor α pak platí

$$z = \sum_{i=0}^n \langle z, \bar{z}_i^* \rangle \bar{w}_i, \quad H(\alpha) = \left\{ \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \beta_{ij} \alpha_j \right) \bar{w}_i \right\}. \quad (41)$$

Mějme nyní báze $\{w_0, \dots, w_m\}$ v M a $\{z_0^*, \dots, z_n^*\}$ v B' ; uvedeným ortogonalizačním postupem utvořme v B' k nim báze $\{\bar{w}_i\}, \bar{y}_i^* = \sum_{j=0}^i \beta_{ij} y_j^*, \quad i = 0, 1, \dots, n$. Pak *Newtonovým interpolantem odpovídajícím prvku $y \in B$, systému funkcionalů $\{z_i^*\}$ a bázi $\{w_i\}$* nazveme prvek $\sum_i \langle y, \bar{y}_i^* \rangle \bar{w}_i$.

Například v klasické Newtonově formuli (5) s uzly interpolace $\{x_0, \dots, x_n\}$ jsou uvedenými objekty

$$\bar{w}_i = \prod_{j=0}^i (x - x_j), \quad \bar{y}_i^* = [x_0, \dots, x_i]y.$$

Snadno ověříme platnost vztahů biortogonalit

$$\bar{w}_i(x_j) = 0, \quad [x_k, \dots, x_l]\bar{w}_i = 0, \quad 0 \leq k, l \leq i; \quad [x_0, \dots, x_i, x_{i+1}]\bar{w}_i = 1.$$

Atteia v citované monografii [1] také rozširuje problém interpolace na spočetnou množinu uzlů interpolace. V topologickém vektorovém prostoru A s duálním prostorem A' a Schauderovou bází definuje interpolant jako limitní prvek interpolantů konečněrozměrných, sestavených předchozím způsobem. Tato konstrukce tedy zatím neobsahuje úlohu o interpolaci se zachováním křivek. Obsahuje však i obecnější modely, kde se používá zobecnění pojmu báze prostoru (frames).

L i t e r a t u r a

- [1] ATTEIA, M.: *Hilbertian Kernels and Spline Functions*. North Holland, 1992.
- [2] BEREZIN, I. S., ŽIDKOV, N. P.: *Metody vyčíslení I, II*. Moskva 1959, 1966.
- [3] BREZINSKI, C.: *Handbook of Numerical Analysis, III*. North Holland, 1994.
- [4] BOJANOV, B. D., HAKOPIAN, H. A., SAHAKIAN, A. A.: *Spline Functions and Multivariate Interpolations*. Kluwer, Dordrecht 1993.
- [5] CIARLET, P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, 1978.
- [6] CIARLET, P. G., RAVIART, P. A.: *General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with Applications to FEM*. Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 177–199.
- [7] CIARLET, P. G., WAGSCHAL, C.: *Multipoint Taylor Formulas*. Numer. Math. 17 (1971), 84–100.
- [8] DE BOOR, C.: *A Practical Guide to Splines*. Springer Verlag, 1978.
- [9] DE BOOR, C., HÖLLIG, K., RIEMENSCHNEIDER, S.: *Box Splines*. Springer Verlag, 1993.
- [10] DRS, L.: *Plochy ve výpočetní technice*. SNTL, Praha 1984.
- [11] FARIN, G.: *Curves and Surfaces for CAGD*. Acad. Press, 1990.
- [12] FAUX, I. D., PRATT, M. J.: *Computational Geometry*. E. Horwood, 1979.
- [13] GELFOND, A. O.: *Isčíslenije konečnych raznostěj*. Nauka, Moskva 1967.
- [14] CHUI, CH.: *Multivariate Splines*. SIAM, Phil. 1988.
- [15] CHUNG, K. C., YAO, T. H.: *On lattices admitting unique Lagrange interpolation*. SIAM J. Numer. Anal. 14 (1977), 735–743.
- [16] KOBZA, J.: *Splajny*. Vydavatelství UP, Olomouc 1993.
- [17] KOBZA, J.: *Computing local parameters of biquartic interpolatory splines*. J. Comput. Appl. Math. 63 (1995), 229–236.
- [18] KOBZA, J.: *Quadratic and quartic splines in MATLAB*. Folia Fac. Sci. UM Brunensis, Math. 5 (1997), 47–65.
- [19] LORENTZ, R. A.: *Multivariate Birkhoff Interpolation*. Springer Verlag, 1992.
- [20] LORENTZ, G. G., JETTER, K., RIEMENSCHNEIDER, S.: *Birkhoff Interpolation*. Springer, 1983.
- [21] NIKOLAIDES, R. A.: *On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation*. SIAM J. Numer. Anal. 9 (1972), 435–445.
- [22] SAUER, T., XU, Y.: *On multivariate Lagrange interpolation*. Math. Comp. 64 (1995), 1147–1170.

- [23] SCHUMAKER, L.: *Spline Functions. Basic Theory*. Wiley, 1981.
- [24] VINOGRADOV, I. M. (ed.): *Matematičeskaja enciklopedija I–V*. Moskva 1982.
- [25] WALSH, J. H.: *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. AMS Colloquium Publications, 1960.
- [26] Časopisy s častějším výskytem problematiky interpolace: Computer Aided Geometric Design (CAGD), Journal of Approximation Theory, Constructive Approximation, East Journal on the Approximations, Numerische Mathematik, Mathematics of Computation, SIAM Journal on Numerical Analysis.

Wavelets

Petr Holman a Karel Najzar, Praha

Moderní teorie waveletů (doslova přeloženo teorie vlnek) se jako taková začala bouřlivě rozvíjet až v osmdesátých letech 20. století. Vycházela přitom z nezávislých prací mnoha vědců, kteří po celé století nevědomky připravovali půdu pro tento silný nástroj k řešení mnoha nejen matematických problémů. Rozkvět této teorie je významně svázán s teorií signálů, v současné době je však přesněji zařadit wavelety mezi matematiku, teorii signálů a zpracování obrazu a zvuku, fyziku a computer science. Teorie se navíc dále zobecňuje a prohlubuje, a tak se dá očekávat, že v brzké době najde uplatnění i v dalších vědních oborech.

Z laického pohledu můžeme představit wavelety jako funkce s určitými vlastnostmi, pomocí kterých je možné popisovat (podobně jako pomocí Fourierovy trigonometrické báze) nejrůznější prostory funkcí. Proti Fourierovým řadám je však waveletová teorie obecnější a její použití také často přináší přesnější a silnější výsledky. Její vznik vychází z myšlenky použít ke konstrukci ortonormální báze daného prostoru všechny celočíselné translace a určité celočíselné (nejčastěji dyadické) dilatace jedné jediné funkce (tzv. mother-waveletu). Ukázalo se, že takových funkcí existuje nekonečně mnoho a že k jejich konstrukci je možné využít nejrůznější matematické postupy. Právě tento nový způsob nalezení ortonormální báze ostře odlišuje wavelety od Fourierova trigonometrického systému. Jedním z důležitých požadavků na mother-wavelet je totiž rychlý pokles v nekonečnu. Jsou známy také velmi podstatné wavelety s kompaktním nosičem. Na rozdíl od sinu a kosinu jsou tedy wavelety lokalizovány v prostoru. Provedeme-li pak dilataci takové funkce, její nosič se úměrně zmenšuje. Je tedy zřejmé, že jestliže

Mgr. PETR HOLMAN (1975), Veronské nám. 334, Praha 10, absolvent katedry numerické matematiky MFF UK (1998), člen Symfonického orchestru Českého rozhlasu.

Doc. RNDr. KAREL NAJZAR, CSc. (1939), docent na katedře numerické matematiky MFF UK, Malostranské nám. 25, Praha 1, e-mail: knaj@ms.mff.cuni.cz

Práce vznikla v rámci grantu č. 201/97/0217 a grantu VZ MŠMT CEZ J13/98:113200007.