[23] SCHUMAKER, L.: *Spline Functions. Basic Theory.* Wiley, 1981.
[24] VINOGRADOV, I. M. (ed.): *Matematičeskaja enciklopedija I–V.* Moskva 1982.
[25] WALSH, J. H.: *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* AMS Colloquium Publications, 1960.
[26] Časopisy s častějším výskytem problematiky interpolace:
Computer Aided Geometric Design (CAGD), Journal of Approximation Theory, Constructive Approximation, East Journal on the Approximations, Numerische Mathematik, Mathematics of Computation, SIAM Journal on Numerical Analysis.

Wavelets

Petr Holman a Karel Najzar, Praha

Moderní teorie waveletů (doslova přeloženo teorie vlnek) se jako taková začala bouřlivě rozvíjet až v osmdesátých letech 20. století. Vycházela přitom z nezávislých prací mnoha vědců, kteří po celé století nevědomky připravovali půdu pro tento silný nástroj k řešení mnoha nejen matematických problémů. Rozkvět této teorie je významně svázán s teorií signálů, v současné době je však přesnější zařadit wavelety mezi matematiku, teorii signálů a zpracování obrazu a zvuku, fyziku a computer science. Teorie se navíc dále zobecňuje a prohlubuje, a tak se dá očekávat, že v brzké době najde uplatnění i v dalších vědních oborech.

Z laického pohledu můžeme představit wavelety jako funkce s určitými vlastnostmi, pomocí kterých je možné popisovat (podobně jako pomocí Fourierovy trigonometrické báze) nejrůznější prostory funkcí. Proti Fourierovým řadám je však waveletová teorie obecnější a její použití také často přináší přesnější a silnější výsledky. Její vznik vychází z myšlenky použít ke konstrukci ortonormální báze daného prostoru všechny celočíselné translace a určité celočíselné (nejčastěji dyadické) dilatace jedné jediné funkce (tzv. mother-waveletu). Ukázalo se, že takových funkcí existuje nekonečně mnoho a že k jejich konstrukci je možné využít nejrůznější matematické postupy. Právě tento nový způsob nalezení ortonormální báze ostře odlišuje wavelety od Fourierova trigonometrického systému. Jedním z důležitých požadavků na mother-wavelet je totiž rychlý pokles v nekonečnu. Jsou známy také velmi podstatné wavelety s kompaktním nosičem. Na rozdíl od sinu a kosinu jsou tedy wavelety lokalizovány v prostoru. Provedeme-li pak dilataci takové funkce, její nosič se úměrně zmenšuje. Je tedy zřejmé, že jestliže

---

Mgr. PETR HOLMAN (1975), Veronské nám. 334, Praha 10, absolvent katedry numerické matematiky MFF UK (1998), člen Symfonického orchestru Českého rozhlasu.

Doc. RNDr. KAREL NAJZAR, CSc. (1939), docent na katedře numerické matematiky MFF UK, Malostranské nám. 25, Praha 1, e-mail: knaj@ms.mff.cuni.cz

Práce vznikla v rámci grantu č. 201/97/0217 a grantu VZ MŠMT CEZ J13/98:113200007.

například pro aproximaci funkcí s nespojitostmi nebo ostrými hroty můžeme použít takto dilatovanou funkci s malým nosičem, získáme daleko přesnější výsledky než při použití trigonometrických funkcí. Tato vlastnost waveletů přináší i další výhodu: při reprezentaci funkce nebo obecně při reprezentaci dat je často díky kompaktnosti nosiče matice waveletových koeficientů řídká, a tím se výrazně zjednodušují veškeré operace s koeficienty a šetří se čas potřebný ke zpracování problému. (Waveletovými koeficienty rozumíme koeficienty lineární kombinace jednotlivých translací a dilatací mother-waveletu.) Také wavelety, které nemají kompaktní nosič, vykazují tento efekt. Vzhledem k jejich rychlému poklesu v nekonečnu stačí položit rovny nule koeficienty menší než určitý práh.

Zmiňme se ale nyní trochu o historii této teorie. Jak již bylo řečeno, matematické základy obecné teorie jsou jen několik let staré. Ale podíváme-li se zpět do historie matematiky, objevíme alespoň sedm různých původů či zdrojů waveletové analýzy. Největší část této práce byla uskutečněna ve třicátých letech. V té době se vůbec nezdálo, že by spolu tehdejší výsledky nějakým způsobem souvisely. Neobjevovalo se tehdy ani slovo wavelet, ani celková koncepce odpovídající současné teorii waveletů. Teprve dnes víme, že všechna tato práce dnešní teorii waveletů předznamenávala.

Vůbec první myšlenku, která se stala nejdůležitějším podnětem pro vznik waveletové teorie, přinesl v roce 1807 Joseph Fourier v podobě svých známých Fourierových řad. Ukázal totiž, že pomocí určité „malé“ množiny funkcí (tj. ortonormálního systému složeného z trigonometrických funkcí) lze popsat celé prostory funkcí. Fourier tehdy tvrdil, že takto lze rozložit každou spojitou 2π-periodickou funkci. Před rokem 1807 se pro funkce a práci s nimi používal polynomiální rozvoj a nejobecnější funkce, které bylo vůbec možné tenkrát sestrojit, měly velmi málo obecné vlastnosti. Proto měla Fourierova práce ve své době velký význam právě při zkoumání dalších, do té doby neznámých prostorů funkcí.

Již v roce 1873 ale Paul Du Bois-Reymond zkonstruoval spojitou 2π-periodickou reálnou funkci, jejíž Fourierova řada v daném bodě diverguje. Začalo se tedy zkoumat, jakým způsobem by bylo možné Fourierovy řady vylepšit. A právě jednou očividnou možností tehdy bylo nalézt nějaký jiný ortonormální systém funkcí, který by sloužil k popisu funkcionálních prostorů. Tato cesta vedla právě k objevu A. Haara. Ten v roce 1909 nalezl jiný možný ortonormální systém. V jeho objevu je navíc poprvé představena další základní myšlenka waveletové teorie: popisovat prostory funkcí pomocí celočíselných translací a dyadických dilatací jedné jediné funkce. (Dyadickou dilatací funkce rozumíme násobení argumentu této funkce nějakou mocninou čísla 2.) Haar definoval nejdříve funkci

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle 0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle \frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(tzv. Haarův wavelet) a následně pak pro $n \geqq 1$ definoval funkce

$$h_n(x) = 2^{-j/2}\, h(2^j x - k), \quad \text{kde} \quad n = 2^j + k, \quad j \geqq 0, \quad 0 \leqq k < 2^j, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

(Symbolem $\mathbb{R}$ rozumíme množinu reálných čísel, symbol $\mathbb{Z}$ pak označuje čísla celá.)

Je snadné ukázat, že spolu s funkcí $h_0(x) = 1$ je tento systém ortonormální bází prostoru $L^2(\langle 0,1\rangle)$. Tuto konstrukci je také snadné převést na prostor $L^2(\mathbb{R})$ — viz níže. Ve své době znamenal tento přístup zcela nové pojetí, po jehož stopách se vydávali další a další vědci nejen z matematického oboru.

Již od počátku bylo zřejmé, že Haarova konstrukce má některé nedostatky. Základní funkce h_n nejsou samy ani spojité, a pokud by navíc bylo třeba aproximovat funkci například spojitě diferencovatelnou, byl by takový způsob zcela nevhodný. To vedlo Fabera a Schaudera k tomu, že se v roce 1910 pokusili nahradit funkce h_n jejich primitivními funkcemi. Definovali nejprve „trojúhelníkovou funkci“

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle 0, \frac{1}{2}), \\ 2(1-x) & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle \frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Její dyadické dilatace a translace Δ_n pak spolu s funkcemi 1 a x tvoří bázi prostoru $L^2(\langle 0,1\rangle)$.

V roce 1927 napadlo P. Franklina, že by mohl vytvořit z Faberovy-Schauderovy báze ortonormální bázi prostoru $L^2(\langle 0,1\rangle)$ použitím Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu. Získal tak posloupnost funkcí f_n, kde $f_{-1}(x) = 1$, $f_0(x) = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$, …, která je ortonormální bází prostoru $L^2(\langle 0,1\rangle)$. Tato množina funkcí má první dva momenty rovny nule, tj. $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pro $n \geqq 1$. Spojuje přitom výhody Haarovy i Faberovy-Schauderovy báze, její nevýhodou je však to, že nemá jednoduchou algoritmickou strukturu, tj. není možné ji odvodit translacemi a dilatacemi jedné funkce. Proto byl Franklinův systém téměř čtyřicet let opomíjen. V roce 1963 jej však oživil Z. Ciesielski, když ukázal celkem „rozumné“ chování funkcí f_n a jejich derivací. Dnes jsou již spočteny i asymptotické odhady funkcí f_n, které ukazují, že ve Franklinově systému byla v jistém smyslu ukryta Strömbergova ortonormální waveletová báze z roku 1980.

Ve třicátých letech pokročil v tomto směru výzkum o notný kus vpřed. Významný fyzik té doby Paul Lévy se snažil zkoumat některé vlastnosti Brownova pohybu. Přitom zjistil, že pro reprezentaci některých komplikovaných detailů je Fourierův trigonometrický systém nepoužitelný. Když za stejnými účely zkoušel uplatnit reprezentaci pomocí Haarovy báze, ukázalo se, že výpočty jsou daleko přesnější a že takto je možné získat korektní výsledky. Mohlo by se snad říci, že právě toto uplatnění Haarova systému bylo prvním významným využitím waveletové báze v praxi. Jiného pokroku dosáhli vědci Littlewood, Paley a Stein při řešení problémů, na které narazili při výpočtech energie funkcí. V souvislosti s Fourierovými řadami objevili nové možnosti reprezentace funkcí, přičemž značný význam měla právě možnost libovolné dilatace jedné dané funkce.

Výzkumy pokračovaly s neztenčenou intenzitou dál. V šedesátých letech přišli s dalším důležitým poznatkem G. Weiss s R. Coifmanem. Ti se snažili nalézt obecnou teorii „atomů“, tj. nějakých nejjednodušších součástí prostorů funkcí, ze kterých by bylo možné pomocí určitých jednoduchých pravidel pro rozklad funkcí tyto prostory popsat. Využili například práce Luzina, který se zabýval reprezentací Hardyho prostorů pomocí komplexních funkcí a který přitom vůbec netušil, jakým způsobem je také možné jeho výsledky interpretovat.

Zde je třeba zdůraznit jedno: mezi všemi těmito skupinami tehdy neexistoval velký kontakt, a proto všechny tyto výsledky, ač velmi podobné a ubírající se stejným směrem, byly objeveny nezávisle na sobě vědci z různých kontinentů a zemí a z různých vědních oborů. Až moderní teorie waveletů dokázala v osmdesátých letech tyto výsledky sjednotit a poměrně obecně popsat.

Pojem wavelet se poprvé objevil v práci A. Grossmanna a J. Morleta z roku 1980. Fyzik a inženýr, kteří se zajímali obzvláště o kvantovou fyziku, zavedli v tomto kontextu první ucelenou waveletovou teorii a ukázali, jakým způsobem wavelety souvisí s fyzikální praxí. Vycházeli přitom z výzkumů matematika A. Calderóna z šedesátých let, který se naopak věnoval rozkladům operátorů a který když zjistil, jak také může být jeho teorie interpretována, označil takové pojetí za naprosto irelevantní. Kolem roku 1980 se také objevila práce J. O. Strömberga, který využil Franklinův systém ke konstrukci jiné, ovšem v základu obdobné waveletové teorie. Ještě další definice waveletů vznikla navázáním na Littlewoodovu-Paleyho teorii. Tyto definice se v jednotlivých detailech lišily, ale celkově vývoj jasně směřoval k obecné definici waveletu a teorii, která by dokázala jednoduchým způsobem shrnout většinu doposud objevených výsledků.

Po roce 1980 získaly wavelety další impuls od S. Mallata, který přišel s aplikací některých definic waveletů při digitálním zpracování signálů. Wavelety se začali zabývat mnozí odborníci jak z matematického, tak fyzikálního hlediska, a jelikož komunikace mezi všemi byla již snadnější, byla tak postupně vytvořena jednotná moderní teorie waveletů. Byla ustálena definice pojmu wavelet, byla určena základní pravidla pro práci s ním a také odvozeny veškeré jeho základní vlastnosti. Zároveň s tím se postupně objevovaly nové a nové konkrétní příklady waveletů vycházející z různých typů funkcí. Jmenujme zde alespoň některé vědce, kteří se významným způsobem zasloužili o vznik a obrovský rozvoj této teorie od osmdesátých let do současnosti: R. Coifman, J. O. Strömberg, S. Mallat, Y. Meyer, I. Daubechies, G. Beylkin, P. Wojtaszczyk a mnoho dalších.

Popišme si nyní o něco přesněji současnou definici pojmu wavelet. Omezme se zde pro jednoduchost pouze na prostory $L^2(\mathbb{R})$. Řekneme, že waveletem je každá funkce ψ z prostoru $L^2(\mathbb{R})$ taková, že systém jejích translací a dyadických dilatací

$$\{\psi_{jk}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$. A jelikož $L^2(\mathbb{R})$ je Hilbertův prostor, užívá se zde k dalšímu odvozování také známá teorie ortonormálních bází v Hilbertových prostorech.

Waveletová transformace zpracovává daný signál pomocí translací a dilatací jisté základní funkce. Podle použitých koeficientů lze tyto translace a dilatace hierarchicky uspořádat do stromové struktury. V tomto uspořádání pak vynikne schopnost waveletové transformace analyzovat signál na různých úrovních rozlišení. Tato struktura však především umožňuje velmi rychle provádět výpočty přímé i inverzní waveletové transformace. Vezmeme-li v úvahu hierarchický charakter transformace, zjednoduší se rovněž praktická konstrukce nových waveletů.

Přirozeným základem teorie waveletů je tzv. multirozklad (*multiresolutin analysis*). Multirozkladem prostoru $L^2(\mathbb{R})$ rozumíme posloupnost do sebe vnořených podprostorů $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, které splňují následující podmínky:

(1) uzávěr jejich sjednocení je celý prostor $L^2(\mathbb{R})$, tzn. každou funkci z $L^2(\mathbb{R})$ lze libovolně přesně aproximovat posloupností funkcí $f_j \in V_j$;

(2) průnik všech prostorů V_j obsahuje pouze nulovou funkci;

(3) pro každou funkci f platí vztahy

$$f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1} \quad \text{a} \quad f(x) \in V_0 \iff f(x+1) \in V_0;$$

(4) existuje funkce $\varphi \in V_0$ (tzv. *škálová funkce*) taková, že systém funkcí $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru V_0.

Definujme nyní pro všechna $j \in \mathbb{Z}$ prostor W_j jako ortogonální doplněk prostoru V_j v prostoru V_{j+1}, tedy $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$. Prostor W_j tak reprezentuje rozdíl mezi prostory V_{j+1} a V_j. Na základě této konstrukce pak lze dokázat, že prostory W_j jsou navzájem ortogonální a že existuje funkce $\psi \in W_0$ tak, že systém $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru W_0. Vzhledem ke konstrukci lze snadno ukázat, že tato podmínka je ekvivalentní s výše uvedenou definicí waveletu. Funkce ψ je tedy hledaným waveletem vzhledem k multirozkladu $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a škálové funkci φ. Tento wavelet ovšem nemusí být k danému multirozkladu a škálové funkci určen jednoznačně, vždy je tedy možné vybrat takový z nich, který bude dobře použitelný pro praktické výpočty.

Základní vlastností škálové funkce a příslušného waveletu je skutečnost, že obě tyto funkce splňují tzv. dilatační rovnice

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, \varphi(2x-k), \qquad \psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\, \varphi(2x-k),$$

s nějakými koeficienty h_k, g_k. Právě tyto škálové a waveletové koeficienty jsou pak základním nástrojem při tvorbě všech waveletových algoritmů. Tuto teorii však v tomto článku dále rozvíjet nebudeme. Případné zájemce odkazujeme například na [3] nebo [4].

Aby algoritmy byly co nejefektivnější a nejpřesnější, na wavelet jsou vždy kladeny tři základní požadavky, snadno vyplývající z dilatačních rovnic a také z požadavků jednotlivých konkrétních problémů — hladkost, rychlý pokles v nekonečnu a co možná nejvyšší počet nulových momentů. Konkrétní příklady waveletu ψ jsou pak odvozovány mnoha různými způsoby. V [3] je možné se setkat s Haarovými, Strömbergovými, Meyerovými nebo daubechiesovskými wavelety, wavelet je možné definovat také pomocí splinů nebo goniometrických funkcí. Ukažme si nyní nejjednodušší možný příklad waveletu — tzv. Haarův wavelet na prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Zde je škálovou funkcí funkce

$\varphi(x) = \chi_{\langle 0,1\rangle}(x)$ (charakteristická funkce intervalu $\langle 0, 1\rangle$) a příslušný wavelet je pak definován jako $\psi(x) = h(x)$, kde $h(x)$ je právě Haarův wavelet definovaný jako

$$\psi(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle 0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{pro } x \text{ z intervalu } \langle \frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Systém funkcí $h_{jk}(x) = 2^{j/2}\, h(2^j x - k)$, kde $j, k \in \mathbb{Z}$, je pak ortonormální bází prostoru $L^2(\mathbb{R})$ (důkaz snadný) a každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ lze napsat jako součet

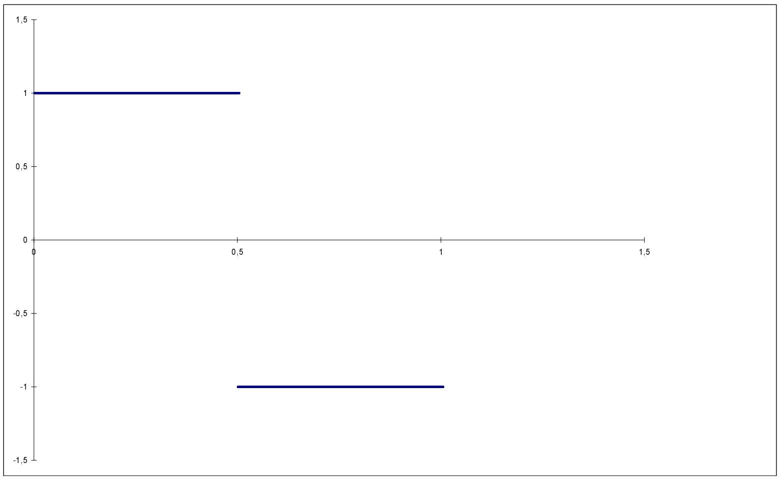
$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, h_{jk}\rangle h_{jk},$$

kde $\langle f, h_{jk}\rangle$ značí skalární součin v $L^2(\mathbb{R})$. Díky ostatním vlastnostem tohoto systému a také díky jeho jednoduchosti jsou pak waveletové algoritmy, které jej využívají, velmi přehledné a rychlé. Nevýhodou je ale (opět díky jednoduchosti Haarova systému) jejich velmi malá přesnost, například je zřejmé, že při aproximaci funkcí není pomocí Haarova waveletu možné dosáhnout takové přesnosti jako pomocí hladších waveletů. Haarův systém má sice kompaktní nosič, ale není ani spojitý a má pouze jeden nulový moment. Proto se v praxi nikdy nepoužívá, je však dobrý pro názorné předvádění konstrukce veškerých algoritmů.

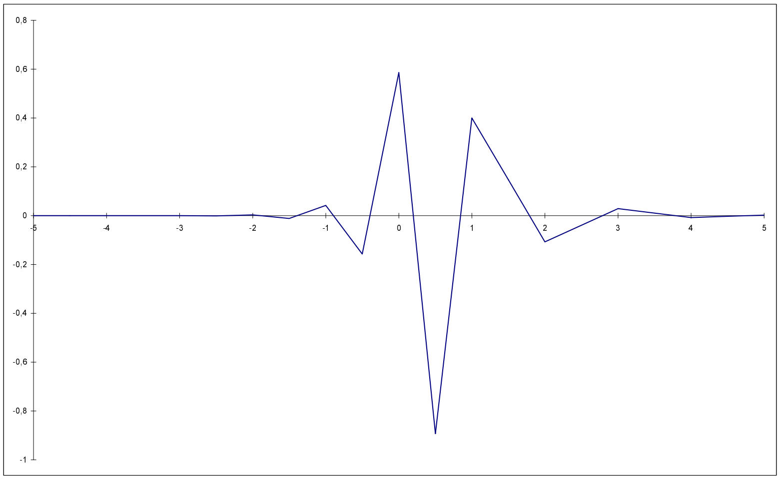
Jedním z nejdůležitějších typů waveletů jsou daubechiesovské wavelety — wavelety s kompaktním nosičem. Tyto wavelety zkonstruovala v osmdesátých letech Ingrid Daubechies na základě Haarovy a posléze Mallatovy práce. Základním požadavkem pro ni byl právě kompaktní nosič škálové funkce a waveletu, ke kterému se pak snažila přidat maximální možnou hladkost a také počet nulových momentů. Podařilo se jí tak objevit skupinu waveletů, která má v současné době snad největší uplatnění v praxi. Použitím jejího postupu je možné zkonstruovat wavelety s kompaktním nosičem, které mají poměrně velkou hladkost a s tím související počet nulových momentů. Je třeba si ale uvědomit, že velká hladkost s sebou nese o mnoho složitější vyjádření waveletu a výrazně komplikovanější algoritmy. V praxi je proto vždy třeba volit kompromis mezi požadovanou přesností a časovou náročností algoritmu.

Podívejme se nyní, jakým způsobem mohou být wavelety využívány v praxi. První oblastí, kterou je třeba zmínit, je samotná matematika. Pro nejrůznější numerické výpočty (aproximace, řešení diferenciálních rovnic, ...) je někdy třeba užít nějakou ortonormální bázi. Právě tady můžeme vzít některou waveletovou bázi. Algoritmy jsou pak často rychlejší a mnohdy také přesnější. Pro řešení těchto základních numerických problémů pak sama waveletová teorie dává možnosti i k sestrojování zcela nových algoritmů.

Jednou z nejpoužívanějších aplikací waveletů je práce s daty (velmi často se signály nebo s dvojrozměrnými a trojrozměrnými obrazy). Wavelety se používají převážně ke dvěma důležitým činnostem — ke kompresi dat a k čištění dat. Stejně jako u Fouriera je možné reprezentovat data maticí koeficientů. Ale díky specifickým vlastnostem waveletů je možné jednoduchým, tzv. pyramidovým algoritmem počet těchto koeficientů

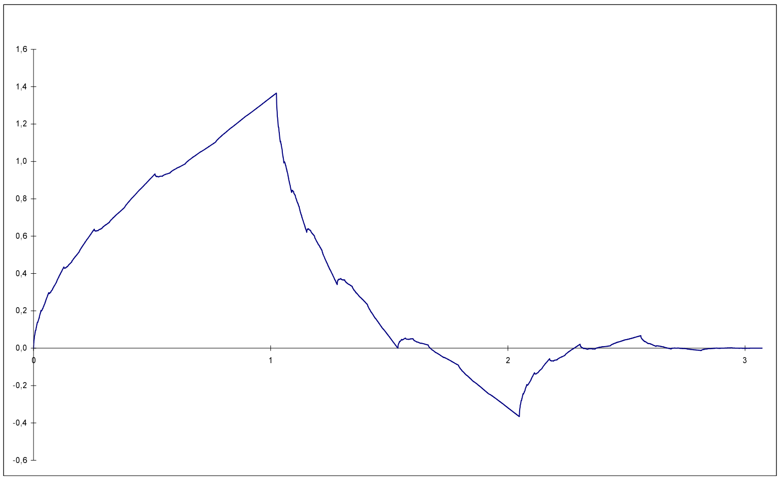


Obr. 1. Haarův wavelet.

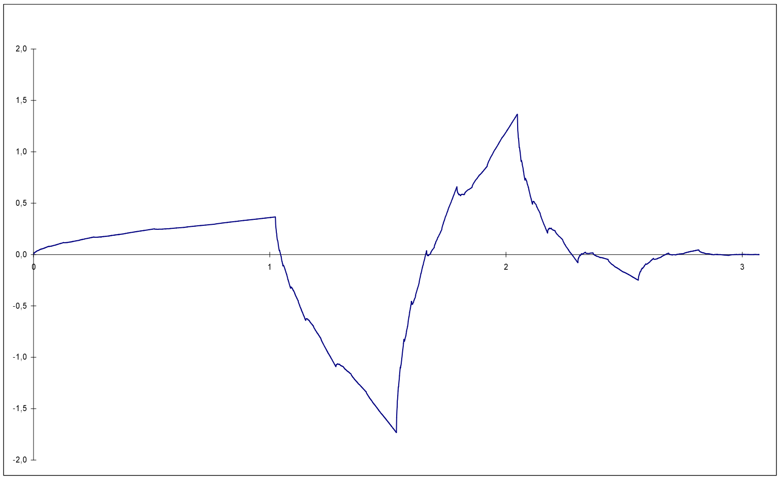


Obr. 2. Strömbergův wavelet — nemá kompaktní nosič.

významně snížit, aniž se ztratí podstatná součást dat. Například přenos takovýchto dat je pak nesporně jednodušší a méně náročný na čas i paměť. Inverzním algoritmem se potom z koeficientů rekonstruuje zpět původní množina dat. Pro čištění dat je snadné si představit například starší LP desku, kde na původní hudbu je nabaleno velké množství okrajových šumů. Ty jsou pak reprezentovány vysokofrekvenčními složkami daného signálu s malou amplitudou. Abychom se jich zbavili, stačí tedy díky vlastnostem waveletů během pyramidového algoritmu vždy zanedbávat ty koeficienty,



Obr. 3. Daubechiesovské wavelety (základní typ) — škálová funkce φ.



Obr. 4. Daubechiesovské wavelety (základní typ) — wavelet ψ (dva nulové momenty).

které budou menší než určitý práh. Ze zbylých koeficientů se pak zpět rekonstruuje původní signál. Podobný proces pak probíhá i u trojrozměrných obrazů. Je zřejmé, že takové a další obdobné operace najdou uplatnění v mnoha oborech.

Kompresi dat pomocí waveletů využila například FBI, když se v roce 1993 rozhodla digitalizovat svůj archiv otisků prstů. V archivu se od roku 1924 shromáždily otisky asi třiceti milionů osob. Pokud by byly zpracovány standardním postupem, spotřebovala by jedna osoba asi 6 MB počítačové paměti. Je tedy jasné, že prostorové (a tím

Obr. 5. Původní obraz a obraz rekonstruovaný pomocí daubechiesovských waveletů (převzato z článku autorů V. Strely, P. N. Hellera, G. Stranga, P. Topiwaly a C. Heila *The Application of Multiwavelet Filter Banks to Image Processing*, uveřejněno v časopise IEEE Trans. on Image Processing a rovněž na internetové adrese `http://www-math.mit.edu/~gs/papers/recent_wt_papers.html`)

i finanční) nároky na takovouto akci by i pro FBI byly více než neúnosné. Použitím waveletů pro kompresi se však podařilo tyto nároky výrazně snížit.

Na začátku osmdesátých let se D. Marr začal zabývat otázkou, jakým způsobem by bylo možné digitalizovat lidské vidění. Důvod byl zřejmý — začali se objevovat první roboti a dosud nebylo jasné, jak digitálně popsat jejich „zrak“. Marr založil svou teorii na tom, že se snažil popsat změny intenzity světla v různých místech obrazu. Tyto změny podle něj probíhaly v mnoha úrovních, bylo tedy třeba používat nějaký operátor, který by byl schopen libovolně změnit měřítko. Marr zároveň tvrdil, že náhlé změny intenzity bezprostředně souvisí s první derivací obrazu. Proto chtěl, aby používaný operátor byl také dostatečně hladký. Z dnešního pohledu se zdá více než jasné, že výsledkem jeho snažení byl wavelet — tzv. Marrův wavelet.

Zastavme se ještě u jednoho možného využití waveletů. V. Wickerhauser přišel s myšlenkou, že by bylo přirozené analyzovat zvuk (ať už hudební tóny nebo mimohudební zvuky) právě pomocí waveletů. Rekonstrukce například jednoho tónu vydaného na hudebním nástroji probíhá tak, že jeho digitalizovaný záznam se rozloží pomocí waveletů, čímž získáme waveletové koeficienty vzhledem k nějaké bázi. Ze známých koeficientů je pak okamžitě možné tón zpětně rekonstruovat. Díky kompaktnosti nosiče některých waveletů je přitom možné zvlášť zpracovat začátek a konec noty (ostré akcentované nasazení tónu nebo naopak jeho měkký začátek). S takto zpracovaným tónem je pak samozřejmě možné dále pracovat. Všimněme si rovněž, že právě tak je možné reprezentovat lidskou řeč. Právě to již také bylo využito v mnoha dalších počítačových programech.

Co říci závěrem? Snad jen to, že waveletové teorii se již podařilo proniknout do nejrůznějších oborů lidského snažení. Díky její univerzálnosti, přehlednosti a spolehlivosti byl její nástup po osmdesátých letech doslova raketový. Základní teorie je již vytvořena, další práce nyní spočívá v zobecňování současných poznatků a v dalším rozšiřování oblastí využití waveletů. Popřejme tedy waveletům hodně zdaru do jejich další cesty světem vědy a techniky!

Literatura

[1] Meyer, Y.: *Wavelets. Algorithms & Applications.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1993.

[2] Graps, A.: *An Introduction to Wavelets.* Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1995.

[3] Wojtaszczyk, P.: *A Mathematical Introduction to Wavelets.* Cambridge University Press, 1997.

[4] Holman, P.: *Základní teorie waveletů a lineární operátory.* Diplomová práce na KNM MFF UK, 1998.

Odkazy na internet

Index některých zdrojů informací o waveletech:
`http://www.wavelet.org/wavelet/index.html` nebo
`http://www.amara.com/current/wavelet.html`

Wavelet Digest:
`http://www.wavelet.org/`
Abyste se stali předplatiteli Wavelet Digest, stačí poslat prázdný e-mail na adresu `add@wavelet.org`.

Wavelet Papers:
`http://www.mathsoft.com/wavelets.html`

WaveLab (waveletová laboratoř pro Matlab):
`http://stat.stanford.edu/~wavelab/` nebo
`http://www.wavbox.com/`

Mathematica:
`ftp://timna.mines.edu/wavelets/` nebo
`http://www.isds.duke.edu/~brani/wavelet.html`

Maple:
`ftp://daisy.uwaterloo.ca/pub/maple/5.3/share/daub/`

a mnoho dalších...