Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michael Toepell

100 let „Základů geometrie": Rozhodující příspěvek Davida Hilberta k formalizaci matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 2, 89--97

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141025`

100 let „Základů geometrie“

Rozhodující příspěvek Davida Hilberta k formalizaci matematiky

Michael Toepell

D. Hilbert (kolem r. 1930)

Píše se 25. září 1891. Je pátek. V čekárně berlínského nádraží diskutuje několik matematiků o svých zážitcích a zkušenostech z minulého týdne. Zúčastnili se v Halle výročního zasedání Jednoty německých matematiků[1]), založené před rokem v Brémách, a teď byli na cestě domů. Z 25 přednášek, které na zasedání zazněly, vyvolal největší diskusi příspěvek Hermanna Wienera *O základech a výstavbě geometrie*[2]). V závěru rozhovoru dospěli nenadále k pozoruhodným slovům — slovům, která později jako citát obletěla celý svět a stala se zároveň příkladem axiomatického myšlení 20. století:

Vždy musí být možnost na místě „bodů, přímek, rovin“ říkat „stoly, židle, žejdlíky“.

Ten, kdo tuto myšlenku zformuloval, byl matematicky všestranný devětadvacetiletý soukromý docent David Hilbert (1862–1943). V letním semestru 1891 měl Hilbert přednášku *Projektivní geometrie*, a proto jej zaujal zejména Wienerův příspěvek. Citát měl názorně osvětlit základní myšlenku implicitní definice, podle které je významné pouze axiomaticky dané propojení mezi základními pojmy. Přijmeme-li tento citát za zaručený[3]), pak podle něho Hilbert již v roce 1891 považoval názornou stránku pojmů

---

[1]) Deutsche Mathematiker-Vereinigung [DMV].

[2]) Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie.

[3]) Otto Blumenthal (1876–1944; stručný životopis viz [Toepell 1991]), první Hilbertův doktorand, uvádí citát v *Lebensgeschichte* Hilberta [4 III, 402f.]. Opírá se přitom o ústní sdělení Hilbertovo. Blumenthal přišel do Göttingen prvně jako devatenáctiletý student v roce 1895.

Prof. Dr. Michael Toepell, Erziehungswissenschaftliche Fakultät, Universität Leipzig, Karl-Heine-Strasse 22b, 04229 Leipzig, e-mail: `toepell@fakerz.uni-leipzig.de`.

Článek *100 Jahre Grundlagen der Geometrie — David Hilbert's entscheinender Beitrag zur Formalisierung der Mathematik* vyšel v Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1/1999, str. 10–15.

Přeložila Alena Šolcová.

Přednáška prof. M. Toepella, editora 14. vydání Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* (Základů geometrie), se konala v říjnu 1999 v semináři Dějiny matematiky [SEDM] na katedře matematiky Stavební fakulty ČVUT. Otec prof. Michaela Toepella studoval na Německé univerzitě v Praze, kromě jiných také u prof. Alberta Einsteina.

geometrie za matematicky bezvýznamnou. Jak bližší bádání ukazuje, písemně vyjádřil tyto radikální myšlenky teprve o sedm let později — někdy mezi počátkem jara 1898 a červnem 1899, tedy v době před sto lety.

Stoleté jubileum dává příležitost k pohledu zpět: 1899 vyšly Hilbertovy *Grundlagen der Geometrie* jako první ze dvou příspěvků v Pamětním spisu k odhalení Gaussova a Weberova pomníku dne 17. června 1899 v Göttingen (viz obr. 1).

FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DER

ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS

IN GÖTTINGEN.

HERAUSGEGEBEN

VON DEM FEST-COMITEE.

INHALT:
D. HILBERT: GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE.
E. WIECHERT: GRUNDLAGEN DER ELEKTRODYNAMIK.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Obr. 1. První vydání *Základů geometrie*, červen 1899 (titulní stránka Pamětního spisu).

Tímto dílem dovršil Hilbert pozoruhodný přerod: Zatímco dříve byla geometrie vybudována na empirických základech, Hilbert ji nyní pojal jako formálně deduktivní systém ve výrazně konsekventním tvaru. Jeho axiomatická výstavba zároveň nasměrovala matematické myšlení 20. století. Axiomatické myšlení vedlo k vybudování zcela odlišné struktury nejen uvnitř geometrie, ale rozšířilo se i na ostatní oblasti celé matematiky.

Zatímco vliv spisu *Grundlagen der Geometrie* na celou řadu publikací byl důkladně studován[4]), o vzniku samotných *Základů* nebylo dlouho známo téměř nic. S výzkumem v tomto směru se začalo teprve v sedmdesátých letech 20. století poté, co byla zpřístupněna Hilbertova pozůstalost. Přitom se ukázalo, jak těsně souvisel Hilbertův život s původem axiomatického myšlení.

Vlastní základy vývoje představují čtyři Hilbertovy rukopisy přednášek:

1. *Projektivní geometrie* (letní semestr 1891, dále [PG], Hilbertova první geometrická přednáška).
2. *Základy geometrie* (letní semestr 1894, dále [ZG], axiomaticky vybudovaná neeukleidovská geometrie).
3. *O pojmu nekonečno* (Velikonoce 1898, prázdninový kurs pro učitele středních škol, který obsahuje jádro pozdějšího spisu, dále [PN]).
4. *Základy eukleidovské geometrie* (zimní semestr 1898/1899, dále [EG], dvouhodinová přednáška, která představuje základ Pamětního spisu).

Z toho vycházelo také zpracování přednášky *Elementy eukleidovské geometrie* asistenta Hanse von Schapera (dále [EEG]) v březnu 1899 a příspěvek do Pamětního spisu v červnu téhož roku.

Dále si Hilbert dopisoval o základních otázkách geometrie s Hurwitzem, Kleinem, Minkowskim, Lindemannem, Schurem, Fregem, Hölderem a Stolzem[5]).

Hilbertova pozůstalost dovoluje nejen ukázat, odkud pochází obsah Pamětního spisu, ale také poukázat na souvislosti, které Hilbert v Pamětním spisu vynechává:

– na úlohu názornosti, ze zkušeností a experimentů,
– ale také na otázky projektivní geometrie, které v *Základech* zcela chybějí.

Jeden školní sešit Davida Hilberta s projektivní geometrií ukazuje, že se Hilbert ještě jako student seznámil s tzv. „novější geometrií“. Obsah jejích jednotlivých částí zpracoval Hilbert v roce 1891 v přednášce [PG]: „Úplná nauka o harmonických bodech a svazcích přímek“ (dvojpoměry; aritmetický, geometrický a harmonický průměr; čtvrtá geometrická úměrná; pól a polára) a Pascalova a Brianchonova věta o tětivovém a tečnovém šestiúhelníku.

Ze sešitů se záznamy matematických kolokvií na Lindemannově königsberské katedře lze vyčíst, jak se v době mezi lety 1884 a 1893 stále znovu diskutovalo o geometrických problémech a literatuře s nimi související. Hilbert byl účastníkem těchto kolokvií.

Do roku 1891 měl Hilbert celkem 14 různých přednášek a po nich přichází v letním semestru 1891 na řadu projektivní geometrie. Přednášku koncipoval tak, aby představovala trojdílnost geometrie, které se v dalších letech důsledně držel (dokonce i v pořadí přednášek):

---

[4]) V předmluvě k novému vydání jsou zmíněny práce A. Schmidta, H. Freudenthala a B. L. van der Waerdena.

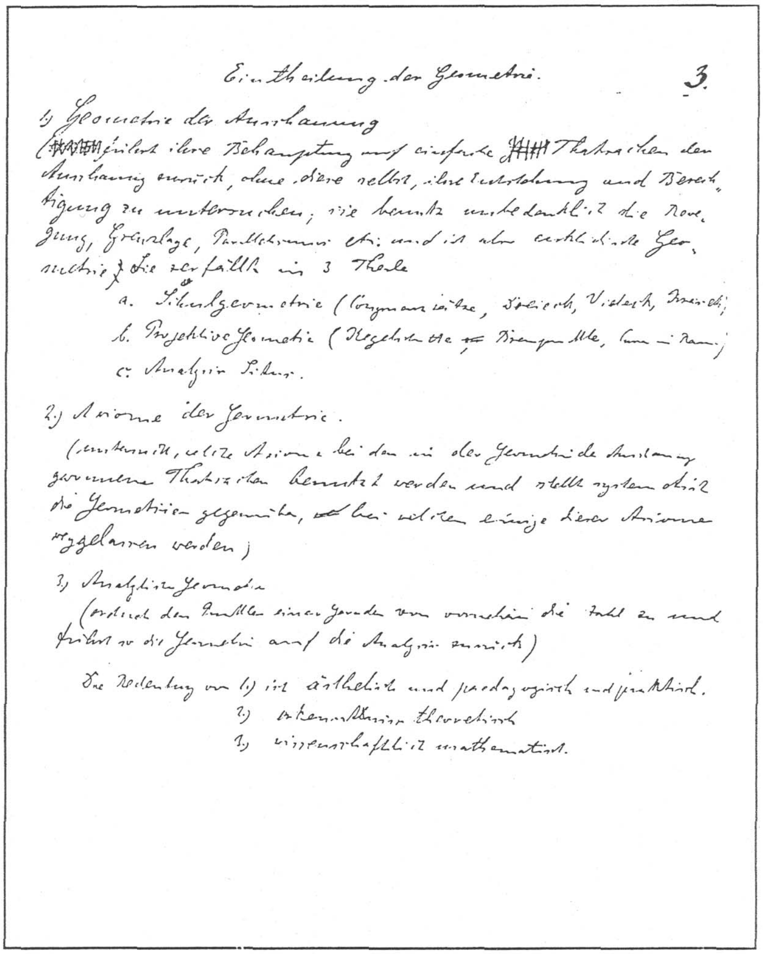
[5]) Krátké biografie viz [9].

Rozdělení geometrie ([PG], 3):

1. Názorná geometrie

opírá svá tvrzení o jednoduché názorné skutečnosti, aniž zkoumá samotný jejich vznik a oprávněnost; bezstarostně využívá myšlenky pohybu, hraniční polohy, rovnoběžnosti a jde tedy o eukleidovskou geometrii. Dělí se na tři části (srovnej obr. 2):

a) Školní geometrie (věty o shodnosti, trojúhelník, mnohoúhelník, kruh atd.).
b) Projektivní geometrie (kuželosečky, ohniska, křivky v prostoru).
c) Analysis situs[6]).



Eintheilung der Geometrie. 3.

1) Geometrie der Anschauung
(stützt ihre Behauptungen auf einfache Thatsachen der Anschauung, ohne diese selbst, ihre Entstehung und Berechtigung zu untersuchen; sie benutzt unbedenklich die Bewegung, Grenzlage, Parallelismus etc.; und ist also euklidische Geometrie) Sie zerfällt in 3 Theile
a. Schulgeometrie (Congruenzsätze, Dreieck, Vieleck, Kreis etc.
b. Projective Geometrie (Kegelschnitte, Brennpunkte, Curven im Raum)
c. Analysis Situs.

2.) Axiome der Geometrie.
(untersucht, welche Axiome bei den in der Geometrie der Anschauung gewonnenen Thatsachen benutzt werden und stellt systematisch die Geometrien gegenüber, bei welchen einige dieser Axiome weggelassen werden)

3) Analytische Geometrie
(ordnet den Punkten einer Geraden von vornherein die Zahl zu und führt so die Geometrie auf die Analysis zurück)

Die Bedeutung von 1) ist ästhetisch und paedagogisch und praktisch.
2) erkenntnisstheoretisch
3) wissenschaftlich mathematisch.

Obr. 2. Rozdělení geometrie z rukopisu přednášky (letní semestr 1891).

[6]) Přednášku *Názorná geometrie* měl Hilbert v zimním semestru 1920/1921 a v letním semestru 1928. V roce 1932 ji Hilbert a Stefan Cohn-Vossen publikovali v tisku. (Termín analysis situs původně použil G. W. Leibniz pro úlohy dnes náležející do topologie.)

2. Axiomy geometrie

Hilbert zde zkoumá, na kterých axiomech jsou založeny jednotlivé skutečnosti získané v názorné geometrii, a systematicky porovnává různé geometrie, v nichž jsou některé z těchto axiomů vynechány[7]).

3. Analytická geometrie

přiřazuje předem bodům přímky čísla a převádí tak geometrii na matematickou analýzu[8]).

Výše uvedené celky mají tento význam:

1. estetický, pedagogický a praktický,
2. teoreticko-poznávací,
3. vědecky matematický.

V roce 1891 je pro Hilberta geometrie ještě „nauka o vlastnostech prostoru" ([PG], 5), v níž se užívají „názornost a experiment podobně jako při zdůvodňování fyzikálních zákonů". „*Vychází z nejjednoduššího experimentu, který je možno udělat, totiž z nákresu.*" Hilbert při tom vylučuje z projektivní geometrie výpočty a čísla. Píše:

Při odvozování vět o vzájemné poloze objektů se jeví výpočty jako něco cizího. V této podobě představuje projektivní geometrie sice jen část celé geometrie, ale tato oblast je obdivuhodně jednotná a uzavřená. ([PG], 12)

Hilbert chce svou přednášku o projektivní geometrii oprostit od čistě axiomatické i analytické orientace. V prvním dílu se obsahově drží spíše *Geometrie polohy* Theodora Reyese, ve druhém dílu *Přednášek Jacoba Steinera o syntetické geometrii*, kterou rozpracoval Heinrich Schröter (1. vydání v roce 1866). Samozřejmě Hilbert znal také axiomatickou výstavbu projektivní geometrie, jak ji vytvořil Moritz Pasch.

Hilbert sice nepostupuje zcela axiomaticky, ale své věty zakládá na osmi „základních zákonech nazírání" (§1). Ty představují předstupeň jeho pozdějších axiomů incidence. K tomu přichází v §2 výklad struktury uspořádání. (Vztahy oddělování pro čtveřice bodů.)

Na konci se Hilbert nezdá příliš spokojen se svým pojetím a uzavírá, že momentálně je lépe v projektivní geometrii připustit názornost jako základ a v plném rozsahu toho využít. Kdy tuto poznámku, v níž se ukazuje oddělení názornosti a axiomatiky, dodatečně vepsal do druhé stránky rukopisu, nelze s jistotou určit; mohlo to být právě po přednášce Hermanna Wienera v Halle. Každopádně Hilbert v ([PG], 2) naopak píše:

Možná je to lepší než přednášet názornou geometrii, a tím nerozvážně brát na pomoc pohyb atd. (metrické vztahy bez použití výpočtů). ([PG], 2)

---

[7]) O tomto tématu přednášel Hilbert v letním semestru 1894: [ZG].

[8]) O analytické geometrii přednášel Hilbert v zimním semestru 1893/1894 a v zimním semestru 1894/1895.

Tím by odpadl jeden zvláštní předpoklad o spojitosti, který se v [PG] ještě neuvažuje. Nejčistší cesta se ukázala jako nejobtížnější. Hilbert zde pravděpodobně bere ohled také na didaktické důvody. V dopise Kleinovi ze dne 30. 6. 1891 píše „o zástupech svých posluchačů“:

Náš kruh posluchačů se skládá v podstatě ze dvou studentů, k nimž se na mou přednášku o projektivní geometrii jako třetí připojuje ještě jeden o geometrii se zajímající malíř, přednosta zdejší královské umělecké školy. ([8], 39)

Díky zmíněné přednášce Hermanna Wienera se Hilbert na podzim roku 1891 dozvídá o všeobecné platnosti axiomatické metody a o speciálních možnostech, jak za předpokladu Desarquesovy a Pascalovy věty o uzavřených konfiguracích vybudovat celou projektivní geometrii.

V dopise Kleinovi ze dne 23. 5. 1893 Hilbert píše:

Otázka nejmenší soustavy požadavků (axiomů), která se musí vložit do nějaké soustavy objektů tak, aby tato soustava mohla sloužit k popisu jevů geometrických (tj. vztažených na vnější vzhled věcí) v okolním světě, se dnes zdá ještě ne zcela úplně dořešená. ([9], 45)

V roce 1894 přednáší Hilbert o neeukleidovské geometrii. Zastává koncepci pokud možno co nejčistší exaktní konstrukce axiomatické neeukleidovské geometrie s eukleidovskou geometrií uvedenou na závěr. Na začátek rukopisu zařazuje seznam literatury čítající více než 40 prací v němčině, v němž stojí za zmínku autoři Pasch, Helmholtz, Riemann, Lobačevský, Klein, Killing, Lie, Clebsch-Lindemann, Möbius, von Staudt, Reye, Erdmann a Wiener. Italské axiomatické práce, které napsali Peano (1889), Veronese (1891; 1894 již přeloženo) a Fano (1892), zde nejsou zmíněny. Hilbert se seznamoval s italskými pracemi, pokud byly přeloženy do němčiny.

Problém našich kolegů tedy zní: Jaké jsou nutné a postačující podmínky, navzájem nezávislé, které se musí vložit do soustavy objektů, kde každá vlastnost těchto objektů odpovídá nějaké geometrické skutečnosti a naopak, takže prostřednictvím shora uvedené soustavy objektů se umožní úplný popis a uspořádání všech geometrických skutečností. ([ZG], 8f)

Co se týče zkušenosti, zastává Hilbert v tomto rukopisu ještě stejné stanovisko jako Pasch. Axiomy jsou považovány ještě za geometrické skutečnosti. Kromě vzájemné nezávislosti axiomů se Hilbert ptá i na jejich úplnost a uspořádává je konsekventně podle jejich vztahů, jak to naznačil už v roce 1891: axiomy incidence, axiomy polohy, axiom spojitosti, axiomy shodnosti, axiom rovnoběžnosti.

Axiom spojitosti na třetím místě dovolil Hilbertovi zavést velmi brzy čísla, a tak pokračovat v další výstavbě analyticky. Tomu se však chtěl v rámci axiomatického postupu právě vyhnout, a tak uzavírá poznámkou:

Až budu znovu přednášet, tak nejprve eukleidovskou geometrii.

Je pochopitelné, že v roce 1898 staví axiomy spojitosti až na konec, aby se bez nich co nejdéle obešel. Na základě vět o uzavřených konfiguracích mohl operovat se vzdálenostmi bodů i bez axiomů spojitosti. V roce 1894 se naproti tomu o těchto větách vůbec nezmiňuje, natož pak o zkoumání jejich významu. Wienerovu přednášku z roku 1891, kterou Blumenthal považoval za rozhodující, Hilbert v tomto ohledu přijal teprve v roce 1898.

Axiomy prvních tří skupin pro Hilberta představují základy projektivní geometrie (viz [ZG]). Jeho tříbodová relace uspořádání se však přitom neosvědčila. Neplatí zde totiž princip duality. Od této dalekosáhlé projektivní výstavby v [ZG] Hilbert proto později upouští.

Ve své první geometrické publikaci (ze dne 14. 8. 1894) *O přímce jako nejkratším spojení dvou bodů*[9]) ([2]) dokazuje Hilbert s pomocí prvních tří uvedených skupin axiomů, že zobecněná Cayleyho míra splňuje trojúhelníkovou nerovnost vzhledem ke konvexní množině. V dalších letech se věnuje teorii čísel. Výsledkem je obsažná studie „Zahlbericht", vytištěná v ročenkách Jednoty německých matematiků[10]).

Hilbertův zájem o základy geometrie vzbudil znovu po třech letech dopis Friedricha Schura Felixu Kleinovi ze 30. 1. 1898: Začal studovat souvislost i teorií ploch a mezi větami o průnicích.

Prázdninový kurs z Velikonoc 1898 *O pojmu nekonečna*[11]) vystihuje nyní vlastní jádro vývoje, i když text má jen 27 stran. V tomto prázdninovém kursu uvedl Hilbert poprvé skupiny axiomů v tom pořadí, jaké se později stalo běžným. Studuje geometrické konstrukce umožněné větami o shodnosti, nezávislost axiomu spojitosti a táže se, které axiomy budou postradatelné, jestliže bude předpokládat platnost věty Desarquesovy a Pascalovy místo některých axiomů, které se používají k jejich důkazu. Zavádí přitom tři rozdílné součiny úseček, a pak následují první úvahy o počítání s úsečkami a o teorii ploch. V popředí zde stojí také nezávislost Archimédova axiomu.

Před více než 100 lety, v zimním semestru 1898/99, pracoval Hilbert na již zmíněném konceptu rukopisu *Základy eukleidovské geometrie*[12]) [EG] pro Pamětní spis. Otto Blumenthal o tom píše: „*Úžas a obdiv vzbudilo, když přednáška začala a rozvíjela se překvapivě jiným směrem.*" ([4], III, 402) Blumenthal zřejmě obsah prázdninového velikonočního kursu pro učitele předem neznal a pod názvem *O pojmu nekonečna* asi nečekal nic geometrického.

V této přednášce nyní Hilbert zkoumal logické chování axiomů pomocí konstrukce aritmetických modelů. Podrobně se věnuje, jak to odpovídá tématu přednášky, studiu shodnosti bez použití axiomů spojitosti. Mnohé z toho v Pamětním spise odpadlo, zejména důkazy nezávislosti axiomů prvních dvou skupin. Odpadl též následující historický přehled o axiomu rovnoběžnosti, dvě věty ekvivalentní tomuto axiomu, podrobný model neeukleidovské geometrie a zavedení ideálních prvků.

Počítání s úsečkami a plochami je rozvinuto na základě Pascalovy věty, bez předpokladu axiomu spojitosti. Zatímco v [ZG], [2] a [PN] se Hilbert drží Weierstrassovy formulace axiomů spojitosti, nabízí zde dvě pojetí Archimédova axiomu: jak původní formulaci, znovuobjevenou Otto Stolzem, tak formu projektivní. Jestliže srovnáme [EG] se [ZG] z roku 1894, stane se zřejmým, proč Klein k Pamětnímu spisu podotýká:

[9]) *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.*

[10]) DMV-Jahresberichten.

[11]) *Über den Begriff des Unendlichen.*

[12]) *Grundlagen der Euklidischen Geometrie.*

...jejichž hlavním cílem je — oproti dřívějšímu zkoumání — vyšetřit naznačeným způsobem význam axiomů spojitosti pro geometrii. ([6], str. 402) Freudenthal se vyslovuje podobně ([1], str. 120): *Takzvané axiomy spojitosti Hilbert zavedl, aby ukázal, že se bez nich vlastně může obejít.* Proto také figurují až na konci.

Je zde naznačeno „nové počítání s úsečkami" vycházející z Desarguesovy věty, nezávislé na axiomech shodnosti, které je potom rozvinuto v [EEG]. Zvláštní pozornost věnuje Hilbert zavedení čísel[13]), bezespornosti a teoretickým úvahám o dokazatelnosti tvrzení.

V přednáškách *Elementy eukleidovské geometrie* [EEG], rozpracovaných Hilbertovým asistentem Hansem von Schaperem v březnu 1899, je řada poznámek, motivací a příkladů, které v Pamětním spisu chybějí. Jde například o mnohostránkový obsažný *Úvod do projektivní geometrie* na základě ideálních prvků (princip duality s příklady, speciální případy Pascalovy a Desarguesovy věty). Vyskytují se teprve v 7. vydání *Studií k Legendreovým větám*[14]) publikovaných Hilbertem.

Poté, co Hilbert vyjasnil vztah mezi Pascalovou větou a komutativním zákonem při násobení, zavádí reálná čísla pomocí tzv. Cantorova axiomu. Zde je také vyslovena s tím související myšlenka, že za bezespornost geometrie je zodpovědná aritmetika. Vypracování končí nástinem kapitoly o elementárních geometrických konstrukcích. Naproti tomu v [EG] jsou formulace exaktní. Hilbert ale v axiomech ještě vždy vidí „velmi jednoduché [...] prvotní skutečnosti", jejichž platnost je v přírodě experimentálně prokazatelná.

Existuje soustava objektů, které nazýváme body ... (letní semestr 1894, [ZG], 9a, a zimní semestr 1898/1899, [EG], 9).

Pro výstavbu geometrie si mysleme tři soustavy objektů, které jmenujeme body, přímky a roviny ... (březen 1899, [EEG], 4).

Vysvětlení. Uvažujeme tři různé soustavy objektů: objekty první soustavy jmenujeme body ... ; objekty druhé soustavy jmenujeme přímky ... ; objekty třetí soustavy nazýváme roviny ... (červen 1899). [*Základy geometrie*, 1. vyd., kap. 1, §1.]

Nakonec Hilbert svou přednášku pro Pamětní spis ještě jednou přepracoval. Důsledně se zřekl přikládání významu základním pojmům a začíná: *„Uvažujeme tři různé soustavy objektů* [...]*."* Touto „lví tlapou" se jeví Freudenthalovi *„pupeční šňůra mezi realitou a geometrií přetržena"*, jak říká v [1], str. 111. Geometrie tím byla probuzena k vlastnímu bytí, nezávislému na smyslově vnímatelné realitě.

V Pamětním spisu zcela odpadlo podrobné rozpracování výpočtů s velikostmi úhlů. Po zkoumání shodnosti následuje bezprostředně Archimédův axiom. Nové je zde přehledné shrnutí studií otázek nezávislosti a studií k Desarquesově, resp. Pascalově větě do vlastních kapitol. Důkaz bezespornosti, dosud jen naznačovaný, je nyní proveden.

I když Hilbert ve svých rukopisech přednášek volí různé formulace (např. [ZG], 7–10, [EEG], 2), zdá se, že od počátku přece jen sleduje svůj cíl — algebraizaci geometrie. V roce 1894 se ještě spokojuje se zavedením souřadnic pomocí Möbiovy

[13]) Toto zavedení čísel Hilbert nazývá „nejvyšší zázrak" a cituje přitom Lessingova *Nathana Moudrého* ([EG], 103).

[14]) *Untersuchungen zu den Legendreschen Sätzen.*

sítě. Na konci konstatuje, že je nutno také počítat s čísly, která jsou přiřazována geometrickým objektům. Jsou zapotřebí také věty o tělesech. Pasch vyslovuje ještě základní věty „založené na bezprostředním pozorování" ([7], 17) a všechny zbývající věty z nich logicky odvozuje. Naproti tomu Hilbert od r. 1894 vzal za výchozí základ relace mezi názornými objekty. Je-li východisko a cíl známý, zbývá najít způsob jejich nalezení. Hilbert postupuje — jako Eukleidés — axiomaticky. Klade se zde otázka, které axiomy jsou zapotřebí.

Axiomy incidence jsou jasné, axiom uspořádání je již trochu problematický. Způsobuje těžkosti v projektivní geometrii. Po přechodu k eukleidovské geometrii lze pojem „shodnost" bez starosti zavést. Ale potom přichází problém vět o uzavřených konfiguracích, axiomu rovnoběžnosti, Archimédova axiomu, axiomu spojitosti — všechno to ještě s dalšími příbuznými axiomy není navzájem nezávislé. Jak ukazuje studium pramenů, nebylo pro Hilberta jednoduché najít potřebnou cestu tímto zmatkem axiomů. Zvláštní roli přitom měly věty o uzavřených konfiguracích.

Z celkového pohledu na dílo je vidět, že jeho koncepce vychází z prázdninového kursu pro učitele. Význam názornosti zde připadá Hilbertovi zcela podružný. Axiomatický přístup zastává bez výjimky také ve svých dalších publikacích. Proto ho často považovali za formalistu. Jeho rukopisy a dopisy však vyjevují Hilbertův intenzivní zájem o roli názornosti a její důležitosti pro geometrii. I vzhledem k jeho činnosti v pozdějších letech se ukazuje, jak málo se ve skutečnosti odchýlil od názornosti. Poznal Hilbert, že jistota jeho axiomatické soustavy se koneckonců zakládá na obsahu?

L i t e r a t u r a

[1] Freudenthal, H: *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie.* Nieuw Archief voor Wiskunde *5* (1957), 105–142.

[2] Hilbert, D.: *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* Math. Ann. *46* (1895), 91–96.

[3] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie.* 14. vyd., B. G. Teubner, Leipzig 1999.

[4] Hilbert, D.: *Gesammelte Abhandlungen.* 3 svazky, Springer, Berlin 1932–1935. Reprint New York 1965.

[5] Hilbert, D.: *Der Briefwechsel David Hilbert–Felix Klein (1886–1918).* Hrsg. mit Anm. von Günther Frei. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1985 (Arbeiten aus der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Bd. 19).

[6] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Teil II: Geometrie. 2. vyd., Leipzig 1914.

[7] Pasch, M.: *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig 1882.

[8] Toepell, M.: *Über die Entstehung von David Hilbert's „Grundlagen der Geometrie".* (Diss. München 1981 Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1986 (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik; Bd. 2).

[9] Toepell, M. (Hrsg.): *Mitgliedergesamtverzeichnis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890–1990.* Unter Mitarbeit des Präsidiums und der Geschäftsstelle der DMV. IGN München 1991.