P r á c e   p o p u l a r i z a č n í,   p r á c e   z   h i s t o r i e   m a t e m a t i k y

[56] *Poznámky o současné matematice.* Filosofický časopis *XIX*, 5 (1971), 731–753.
[57] *O prvním Hilbertově problému.* Pokroky Mat. Fyz. Astronomie *XVI* (1971), 117–129.
[58] *O přirozených číslech* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). MFŠ *4* (1973/74), 570 až 577.
[59] *Nieskonczonosć, zbiory i możliwosć u B. Bolzana.* Wiadomosci Matematyczne *26* (1985), 171–204.
[60] *Alternative Set Theory All About.* Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the alternative set theory. Ed. J. Mlček, M. Benešová and B. Vojtášková, JSMF, Bratislava 1989, 28–40.

S k r i p t a

[61] *Analytická geometrie.* SPN, Praha 1964.
[62] *Úvod do axiomatické teorie množin* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). SPN, Praha 1972.
[63] *Úvod do axiomatické teorie množin* (spoluautoři J. Blažek a B. Kussová). KPÚ, České Budějovice 1972.
[64] *Analytická geometrie druhé generace.* Univerzita JEP, Ped. fak., Ústí n/L., 1998.

Obaly a pokrytí v teorii modulů

Jan Trlifaj, Praha

Abstrakt. Teorie modulů zahrnuje několik významných oblastí moderní matematiky. Účinnou metodou popisu modulů jsou aproximace: obaly a pokrytí modulů. Za přispění českých matematiků se v roce 1999 podařilo vyřešit jeden z nejznámějších problémů o aproximacích — hypotézu existence plochých pokrytí modulů (FCC). Článek je věnován nástinu teorie obalů a pokrytí modulů, metodám vyvinutým pro důkaz FCC a jejich aplikacím.

Úvod s trochou historie

Pod pojmem „modul“ si většina z nás představí část kosmické lodi. Informatici termínem „modul“ rozumějí část většího programového celku s přesně definovaným rozhraním. V klasické matematice slovo „modul“ znamenalo číselnou charakteristiku objektu.

Doc. RNDr. Jan Trlifaj, CSc. (1954), katedra algebry MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `trlifaj@karlin.mff.cuni.cz`

V moderní algebře, tedy algebře založené v první polovině 20. století v pracích Davida Hilberta a jeho žáků Emmy Noether a Emila Artina, má slovo modul jiný význam. Modul označuje komutativní grupu s okruhem operátorů, tedy reprezentaci okruhu, resp. lineární reprezentaci algebry [W'31, § 48].

Právě tak budeme moduly chápat v tomto článku[1]). Teorie modulů v tomto smyslu se totiž stala obecným rámcem pro několik významných oblastí matematiky. Jak uvidíme v § 1, lze v ní formulovat teorii lineárních reprezentací grafů, reprezentací grup, Lieových algeber a další. Tento obecný přístup má svoje úskalí: kromě partikulárního případu okruhů konečného reprezentačního typu není k dispozici popis všech modulů nad daným okruhem, resp. algebrou.

Moduly je ale možné charakterizovat nepřímo, pomocí aproximací, tzv. obalů a pokrytí modulů. Aproximovat má samozřejmě smysl pouze třídami, jejichž struktura je dobře známa. Homologická algebra k tomu nabízí jako výchozí možnost dvě navzájem duální třídy aproximace: třídu všech projektivních modulů a všech injektivních modulů.

V 50. letech byla úspěšně rozvinuta teorie injektivních obalů modulů. V 60. letech na ni navázala teorie algebraicky kompaktních obalů, která vznikla paralelně v pracích algebraiků a logiků. Zájem logiků o algebraicky kompaktní obaly byl zcela přirozený: každý modul má stejné vlastnosti formulovatelné v jazyce formální teorie modulů jako jeho algebraicky kompaktní obal.

V duálním případě projektivních modulů se objevilo další úskalí. Třídu všech projektivních modulů lze dobře popsat: práce Kaplanského redukovaly strukturní teorii projektivních modulů na spočetně generovaný případ, a ten lze často dále redukovat na konečně generovaný nebo dokonce cyklický případ. Problém je však s existencí projektivních aproximací: Bass dokázal, že projektivní pokrytí všech modulů existují jen nad algebrami blízkými konečně dimenzionálním algebrám. Tento výsledek byl interpretován jako nedostatek duality v obecné teorii modulů.

Nový pohled přinesl Enochsův objev beztorzních pokrytí modulů nad obory integrity. Vedl k myšlence, že v daném kontextu je vhodnou dualizací injektivity plochost. Tak vznikla v 70. letech hypotéza existence plochých pokrytí modulů (*Flat Cover Conjecture — FCC*).

Ploché moduly zavedl J. P. Serre. Lze je definovat jako direktní limity systémů projektivních modulů a mají tedy obecně mnohem složitější strukturu než moduly projektivní. Díky Bourbakiho skupině se ploché moduly postupně staly jedním ze základních pojmů komutativní algebry i algebraické geometrie. Je-li R komutativní noetherovský okruh, pak například každá lokalizace i každé zúplnění R jsou plochými moduly nad R.

V 80. a 90. letech byla platnost FCC ověřena v několika speciálních případech. Vynikajícím výsledkem byl Xuův konstruktivní důkaz FCC pro komutativní noetherovské okruhy konečné Krullovy dimenze (a tedy pro všechny souřadnicové okruhy algebraických variet). Obecný případ však zůstával otevřený. FCC se stala hlavním tématem monografie [X'96] a řady dalších prací.

[1]) Definice pojmů používaných v úvodu najde čtenář v § 1–3.

Na podzim 1998 objevil autor ve spolupráci s P. C. Eklofem novou metodu konstrukce aproximací: pro každý modul M tvoří všechny moduly, které mají pouze štěpitelná rozšíření pomocí M, speciální předobalující třídu. Enochs si na jaře 1999 povšiml, že nová metoda poskytuje jednotný důkaz všech do té doby známých případů platnosti FCC. Nezávisle na tom navrhl Bican použít k důkazu FCC starší ideu Kielpinského. I touto metodou se však zpočátku dařilo dokázat jen známé výsledky.

V červenci 1999 byly obě metody dovedeny k důkazu FCC v plné obecnosti. Důkaz prvně zmíněnou metodou podal Enochs, druhou El Bashir. Obě metody vedly rychle k řešení celé řady dalších problémů teorie obalů a pokrytí jak v kategorii modulů samotné, tak v dalších blízkých kategoriích (kategorie svazků, Grothendieckovy kategorie aj.). O důkazu FCC, jeho zobecněních a aplikacích pojednáme podrobněji v § 4–5.

1. Moduly jsou skoro všude

Jak jsme se již zmínili v úvodu, slovo modul znamená v moderní algebře komutativní grupu s okruhem operátorů.

Okruhem operátorů nebo prostě *okruhem* rozumíme komutativní grupu $(R, +, 0)$, na které je navíc definována asociativní operace násobení $\cdot$ s multiplikativní jednotkou 1 tak, že násobení je distributivní zleva i zprava vzhledem ke sčítání. Prvky okruhu budeme nazývat operátory nebo skaláry. Je-li operace $\cdot$ komutativní, pak se R nazývá *komutativní okruh*.

Základním příkladem okruhu je okruh všech celých čísel, $\mathbb{Z}$, s obvyklými operacemi.

Jinými příklady jsou okruhy všech racionálních, reálných a komplexních čísel a okruh kvaternionů, které budeme značit po řadě $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$. V těchto okruzích tvoří nenulové prvky multiplikativní grupu; takovým okruhům říkáme *tělesa*.

Je-li R okruh, pak množina všech polynomů nad R v jedné či více (komutujících či nekomutujících) neurčitých přirozeně opět tvoří okruh. Podobně lze konstruovat nové okruhy pomocí formálních mocninných a Laurentových řad s koeficienty v R, čtvercových matic (konečných i nekonečných), spojitých zobrazení z topologických prostorů do R atd.

Je-li $(A, +, 0)$ komutativní grupa, pak zobrazení A do sebe respektující grupovou operaci se nazývají *endomorfismy* grupy A. Všechny endomorfismy A tvoří (s operací skládání zobrazení a s identickým endomorfismem) okruh, který se nazývá *okruh endomorfismů* A a značí $\mathrm{End}(A)$.

Další konstrukcí nových okruhů je faktorizace: například okruh $\mathbb{Z}_n$ celých čísel modulo n vznikne z okruhu $\mathbb{Z}$ faktorizací podle množiny (ideálu) všech násobků čísla n. Jinými důležitými konstrukcemi jsou konstrukce direktních limit systémů okruhů, lokalizace a zúplnění. Kombinacemi těchto konstrukcí lze získat celou škálu různých typů okruhů.

Je-li R okruh, pak (pravým R-)*modulem* rozumíme komutativní grupu $(M,+,0)$, na které je pro každý skalár $r \in R$ definována (unární) operace násobení $\cdot r$ tak, že platí

$$\forall\, m,m' \in M \quad \forall\, r,r' \in R: \quad \begin{aligned} (m+m')\cdot r &= m\cdot r + m'\cdot r \quad \& \quad m\cdot 1 = m \\ m\cdot(r+r') &= m\cdot r + m\cdot r' \quad \& \quad m\cdot(r\cdot r') = (m\cdot r)\cdot r' \end{aligned}$$

Modul je tedy komutativní grupou s okruhovým homomorfismem (reprezentací) $R \to \mathrm{End}(M)$, $r \mapsto \cdot r$. Někteří autoři proto místo o modulech mluví o reprezentacích okruhů.

Moduly nad daným okruhem R tvoří kategorii, která se značí Mod-R. Jejími objekty jsou pravé R-moduly. Morfismy jsou R-lineární zobrazení, tj. zobrazení φ splňující identity $\varphi(m+m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ a $\varphi(m\cdot r) = \varphi(m)\cdot r$. Kategorie Mod-$R$ má řadu specifických vlastností, například je tzv. Grothendieckovou kategorií.

Množina všech morfismů mezi dvěma moduly M a N tvoří komutativní grupu, která se značí $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Navíc na grupě $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ indukuje skládání zobrazení a identita strukturu okruhu. Tento okruh se značí $\mathrm{End}_R(M)$ a nazývá se *okruhem endomorfismů* modulu M. Okruhy endomorfismů modulů jsou tedy dalším typem konstrukce nových okruhů.

Na několika příkladech nyní ukážeme, že v pojmu modulu je skryta celá řada dalších matematických pojmů:

(a) *Lineární algebra*

Je-li T těleso, pak T-moduly jsou lépe známy pod názvem *lineární* (*vektorové*) *prostory* nad T. Teorie modulů v sobě tedy zahrnuje celou lineární algebru (nekonečně dimenzionálních) vektorových prostorů.

Je-li K komutativní těleso a okruh R je zároveň vektorovým prostorem nad K takovým, že násobení prvky z K a z R jsou svázána komutativitou, $(r\cdot r')\cdot k = r\cdot(r'\cdot k) = (r\cdot k)\cdot r'$, pak R se nazývá K-*algebrou.* (K-algebra je tedy okruhem, jehož centrum obsahuje kopii tělesa K.) Pravé R-moduly jsou pak přirozeně i pravými vektorovými prostory nad K, přičemž reprezentace $R \to \mathrm{End}(M)$, $r \mapsto \cdot r$ je K-lineárním zobrazením. Proto někteří autoři místo o modulech nad K-algebrou R mluví o K-lineárních reprezentacích algebry R.

(b) *Komutativní grupy*

Je-li $R = \mathbb{Z}$, pak moduly nad R jsou prostě komutativní grupy.

Struktura konečných komutativních grup je dobře známa již více než sto let. Naopak klasifikovatelnost některých spočetných grup a řady nespočetných závisí na tom, v jaké teorii množin se pracuje. Proto bývá význam teorie komutativních grup algebraiky podceňován. Skutečností však je, že tato teorie je jednou z nejpropracovanějších partií teorie modulů a stálým zdrojem idejí, které nacházejí uplatnění v řadě jiných oblastí algebry. Například metoda řešení FCC, kterou popíšeme v § 4, má svůj prapůvod v práci o komutativních grupách [GS'00].

(c) *Lineární reprezentace grafů*

Nechť K je komutativní těleso a G je konečný graf s množinou vrcholů V a množinou (orientovaných, násobných) hran H. *K-lineární reprezentací* grafu G rozumíme zobrazení φ přiřazující každému vrcholu grafu v nějaký vektorový prostor $\varphi(v)$ nad K a každé hraně $h : v \to v'$ K-lineární zobrazení $\varphi(h) : \varphi(v) \to \varphi(v')$.

Lineární reprezentace grafů lze ztotožnit s moduly nad vhodnou algebrou. Tato algebra se nazývá *algebra cest* grafu G a značí se $\langle KG \rangle$. $\langle KG \rangle$ má K-bázi tvořenou všemi cestami v grafu G a všemi vrcholy v G. Násobení cest je definováno jako navazování (má-li smysl, jinak je součin nulový). Jsou-li $v \neq v'$ vrcholy, pak $v{\cdot}v' = 0$, a $v^2 = v$. Je-li v vrchol a c cesta, pak $v{\cdot}c = t$, kde t je koncový vrchol cesty c, pokud v je počátečním vrcholem c, jinak $v{\cdot}c = 0$.

Je-li M modul nad algebrou $\langle KG \rangle$, pak K-lineární reprezentace grafu G je definována vztahy $\varphi(v) = M{\cdot}v$ a $\varphi(h) : M{\cdot}v' \to M{\cdot}v''$, $\varphi(h)(m) = m{\cdot}h$ pro každý vrchol v a hranu $h : v' \to v''$.

Je-li φ lineární reprezentací grafu G, pak modul M nad algebrou $\langle KG \rangle$ definujeme následovně:

$$M = \bigoplus_{v \in V} \varphi(v), \quad \cdot v \restriction \varphi(v) = \mathrm{id}_{\varphi(v)}, \quad \forall v' \neq v : \ \cdot v \restriction \varphi(v') = 0,$$
$$\cdot h \restriction \varphi(v') = \varphi(h), \qquad \forall v \neq v' : \ \cdot h \restriction \varphi(v) = 0$$

pro každý vrchol v a hranu $h : v' \to v''$. Snadno se ověří, že $\langle KG \rangle$-moduly odpovídají tímto způsobem vzájemně jednoznačně lineárním reprezentacím.

Řadu známých algeber lze vyjádřit jako algebry cest grafů. Například algebra cest grafu

$$\bullet \to \bullet \to \cdots \to \bullet \to \bullet,$$

který má n vrcholů, je izomorfní s algebrou $UT_n(K)$ všech horních trojúhelníkových $n \times n$ matic nad K. Algebra cest grafu s jedním vrcholem a n smyčkami je izomorfní algebře polynomů v nekomutujících neurčitých $x_1, \ldots, x_n$.

Je zřejmé, že kombinatorické vlastnosti grafu G hrají určující roli pro algebraické vlastnosti $\langle KG \rangle$-modulů. Gabriel dokázal pro K algebraicky uzavřené, že tzv. reprezentační typ algebry $\langle KG \rangle$ závisí výhradně na tvaru G jako neorientovaného grafu. Každou tzv. základní konečně dimenzionální K-algebru lze pak vyjádřit jako faktoralgebru vhodné algebry cest [Be'91].

(d) *Reprezentace grup*

Je-li n přirozené číslo a K těleso, pak $\mathrm{GL}(n, K)$ značí grupu všech regulárních čtvercových matic stupně n nad K, tzv. *obecnou lineární grupu.* Z lineární algebry je známo, že tato grupa je izomorfní grupě všech bijektivních endomorfismů libovolného vektorového prostoru dimenze n nad K.

Je-li $(G, ., e)$ (nekomutativní) grupa, n přirozené číslo a K těleso, pak *reprezentací* grupy G stupně n nad K rozumíme grupový homomorfismus $G \to \mathrm{GL}(n, K)$. Je-li tento homomorfismus prostý, mluvíme o *věrné* reprezentaci. Věrná reprezentace tedy představuje grupu G jako podgrupu obecné lineární grupy.

Jsou-li φ a φ' dvě reprezentace grupy G stupně n nad K, pak říkáme, že φ je *ekvivalentní* s φ', pokud existuje matice $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ taková, že $\varphi'(g) = C \times \varphi(g) \times C^{-1}$ pro všechna $g \in G$. Jinými slovy φ a φ' jsou ekvivalentní, pokud vzniknou (různými) aritmetizacemi téhož endomorfismu vektorového prostoru dimenze n nad K.

Teorie reprezentací grup má základní význam pro strukturní teorii grup. Například slavný Feitův–Thompsonův důkaz řešitelnosti všech konečných grup lichého řádu se opírá z velké části o tuto teorii [P'00].

Nyní ukážeme, že reprezentace grup jsou (až na ekvivalenci) totožné s moduly nad vhodnou algebrou. Tato algebra se nazývá *grupová algebra* a značí se KG. Jejími prvky jsou formální sumy $\sum_{g \in G} gk_g$, kde $k_g \in K$ je nulové pro skoro všechna $g \in G$. Nulou je formální suma, ve které $k_g = 0$ pro všechna $g \in G$. Jednotkou je formální suma, ve které $k_g = 0$ pro $e \neq g \in G$ a $k_e = 1$. Sčítání je definováno po složkách,

$$\sum_{g \in G} gk_g + \sum_{g \in G} gk'_g = \sum_{g \in G} g(k_g + k'_g),$$

násobení je dáno konvolucí:

$$\sum_{g \in G} gk_g \cdot \sum_{g \in G} gk'_g = \sum_{g \in G} g\Big(\sum_{hh'=g} k_h \cdot k'_{h'}\Big).$$

Není těžké ověřit, že KG je K-algebrou. Je-li M n-dimenzionální modul nad touto algebrou, zvolíme K-bázi $B = \{b_i \mid i \leqq n\}$ modulu M. Z definice modulu plyne, že násobení $\cdot g$ je K-endomorfismem M pro každé $g \in G$. Definujme $\varphi : G \to \mathrm{GL}(n, K)$ tak, že $\varphi(g)$ je maticí endomorfismu $\cdot g$ vzhledem k bázi B. Pak φ je reprezentací grupy G stupně n nad K.

Naopak je-li $\varphi : G \to \mathrm{GL}(n, K)$ reprezentací, definujeme na vektorovém prostoru $M = K^{(n)}$ strukturu KG-modulu vztahem

$$(k_1, \ldots, k_n) \sum_{g \in G} gk_g = \sum_{g \in G} \big((k_1, \ldots, k_n) \times \varphi(g)\big) k_g.$$

Tímto způsobem se ukáže, že třídy ekvivalence reprezentací grupy G stupně n nad K odpovídají vzájemně jednoznačně třídám izomorfismu n-dimenzionálních modulů nad algebrou KG.

Ztotožnění reprezentací a modulů umožňuje použít strukturní teorii modulů v teorii reprezentací grup. Například klasická Maschkeho věta o rozkladu reprezentací na ireducibilní komponenty je snadným důsledkem strukturní teorie tzv. totálně rozložitelných modulů. Velký význam má toto ztotožnění zejména v případě tzv. modulárních reprezentací, tj. reprezentací konečných grup G, jejichž řád je dělitelný charakteristikou tělesa K. V tomto případě je algebra KG tzv. Frobeniova algebra [Be'91].

Další dvě důležité součásti teorie modulů zmíníme již jen stručně:

(e) *Reprezentace Lieových algeber*

Podobně jako jsme definovali pojem modulu nad algebrou, lze definovat i pojem „modulu“ nad libovolnou Lieovou algebrou L nad komutativním tělesem K. „Modul“ M znamená opět lineární reprezentaci: tentokrát ve smyslu homomorfismu Lieových algeber, z L do Lieovy algebry všech endomorfismů lineárního prostoru $M \in$ Mod-K. Takto definované „moduly“ lze chápat i jako moduly nad algebrou v našem slova smyslu: jsou to totiž právě moduly nad tzv. univerzální obalující algebrou $U(L)$ Lieovy algebry L [D'74].

(f) *D-moduly*

Koncem 60. let vznikla zejména díky pracím Sata a Kashiwary nová část teorie parciálních diferenciálních rovnic, tzv. algebraická analýza. Základním tématem algebraické analýzy jsou okruhy diferenciálních operátorů na komplexních varietách a vlastnosti modulů nad těmito okruhy, tzv. D-modulů [Co'95].

2. Základní třídy modulů

Dříve než se začneme zabývat aproximacemi modulů, pojednáme o struktuře významných tříd modulů vhodných pro aproximace.

Z naší definice modulu nad okruhem R je snadno vidět, že třída všech modulů Mod-R tvoří varietu ve smyslu univerzální algebry. Přirozenou otázkou je tedy otázka struktury volných objektů této variety.

Modul V je *volný*, pokud v něm existuje podmnožina $B \subseteq V$ taková, že pro libovolný modul M lze libovolné zobrazení z B do M jednoznačně rozšířit do R-homomorfismu z V do M. Množina B se nazývá *volnou bází* modulu V. Modul je tedy volný, právě když má aspoň jednu volnou bázi. Označme $\mathcal{V}$ třídu všech volných modulů.

Struktura volných modulů je jednoduchá. Jsou to (až na izomorfismus) právě moduly tvaru $V = \bigoplus_{i \in I} R$, tj. moduly sestávající ze skoro všude nulových posloupností prvků okruhu R indexovaných nějakou množinou I. Modulové operace na V jsou definovány po složkách. I když je každý modul homomorfním obrazem nějakého volného modulu, je třída $\mathcal{V}$ obecně příliš málo strukturovaná na to, aby poskytovala dobré aproximace všech modulů.

Vhodnější třídou je třída všech projektivních modulů, která je definována homologicky:

Uvažujme posloupnost modulů a R-homomorfismů

$$0 \to A \xrightarrow{\nu} B \xrightarrow{\pi} C \to 0, \tag{1}$$

kde 0 je nulový modul, ν je prostý R-homomorfismus a π je R-homomorfismus na. Předpokládejme navíc, že obraz $\mathrm{Im}(\nu)$ zobrazení ν splývá s jádrem $\mathrm{Ker}(\pi) = \{b \in B \mid \pi(b) = 0\}$ zobrazení π. Posloupnost (1) se pak nazývá *krátká exaktní posloupnost modulů* nebo též *rozšíření modulu A pomocí modulu C*.

Termín rozšíření vystihuje skutečnost, že B obsahuje kopii, $\nu(A)$, modulu A tak, že faktorový modul $B/\nu(A)$ je izomorfní (pomocí π) s C. Pojem krátké exaktní posloupnosti je základním pojmem homologické algebry [We'94].

Krátká exaktní posloupnost (1) se nazývá *štěpitelná*, pokud R-homomorfismy ν a π jsou retrakty (= štěpitelná zobrazení), tj. pokud existují R-homomorfismy $\varrho : B \to A$ a $\mu : C \to B$ tak, že $\varrho\nu = \mathrm{id}_A$ a $\pi\mu = \mathrm{id}_C$. Pro každé dva moduly A, C vždy existuje štěpitelné rozšíření A pomocí modulu C: za ν stačí vzít vnoření modulu A do součinu, $A \oplus C$, modulů A a C, a za π projekci tohoto součinu na modul C.

Modul C se nazývá *projektivní*, pokud každé rozšíření tvaru (1) je štěpitelné. Duálně, modul A se nazývá *injektivní*, pokud každé rozšíření tvaru (1) je štěpitelné. Třídu všech projektivních (resp. injektivních) modulů budeme značit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$).

Každý volný modul je projektivní. Projektivní moduly jsou blízké volným: každý projektivní modul P je retraktem (direktním sčítancem) nějakého volného modulu, tj. existuje volný modul V a R-homomorfismy $\pi : V \to P$, $\nu : P \to V$ takové, že $\pi\nu = \mathrm{id}_P$.

Například všechny projektivní komutativní grupy jsou volné. Známá Serrova hypotéza říkala, že volné jsou i všechny projektivní moduly nad okruhem polynomů konečně mnoha komutujících neurčitých nad libovolným komutativním tělesem. Tuto hypotézu dokázali v 70. letech nezávisle na sobě Quillen a Suslin.

Kaplansky dokázal, že každý projektivní modul P je tvaru $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, kde P_i jsou spočetně generované projektivní moduly. Pro řadu okruhů platí silnější verze Kaplanského věty: lze předpokládat, že moduly P_i jsou konečně generované, nebo dokonce cyklické.

V obecné situaci je i třída $\mathcal{P}$ příliš malá na to, aby poskytovala dostatečně přesnou aproximaci modulů. Proto se častěji v teorii aproximací objevuje třída $\mathcal{F}$ všech plochých modulů.

Modul M nazýváme *plochý*, pokud M je direktní limitou nějakého direktního systému projektivních modulů. (Pro čtenáře, který není s pojmem direktní limity seznámen, postačí pro základní představu fakt, že sjednocení libovolného rostoucího řetězce projektivních modulů je plochý modul.)

Na rozdíl od projektivních modulů je otázka klasifikace plochých modulů obecně otevřená. Například komutativní grupa A je plochá, právě když je bez torze (tj. pro každá nenulová $z \in \mathbb{Z}$ a $a \in A$ je $a \cdot z \neq 0$). Ekvivalentně, A je plochá, právě když A je podgrupou v grupě $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}$ pro nějakou množinu I. Je-li však I aspoň dvouprvková, pak klasifikovatelnost podgrup grupy $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}$ závisí na modelu teorie množin (ZFC), ve kterém se pracuje [E'95].

Duální problém struktury všech injektivních modulů je také obtížnější. Uspokojivá teorie existuje nad (zprava) *noetherovskými* okruhy, tj. okruhy R, v nichž každý podmodul R je konečně generovaný. V komutativním noetherovském případě popsal injektivní moduly podrobně Matlis pomocí tzv. prvoideálů okruhu R.

Jemnější aproximace než pomocí injektivních modulů lze získat ve větší třídě všech algebraicky kompaktních modulů:

Modul D se nazývá *duální*, pokud existuje levý R-modul N takový, že D je izomorfní $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Modul A je *algebraicky kompaktní*, pokud A je retraktem (direktním sčítancem) nějakého duálního modulu. Třídu všech algebraicky kompaktních modulů budeme značit $\mathcal{J}$. Platí $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.

Algebraicky kompaktní moduly lze definovat i modelově teoreticky. Jsou to moduly M, ve kterých je řešitelná každá soustava R-lineárních rovnic, jejíž každá konečná podsoustava je řešitelná v M.

Strukturní teorie algebraicky kompaktních modulů patří k nejživějším oblastem současné teorie modulů, a to i pro moduly nad konečně dimenzionálními algebrami [Cr'92]. Je-li například R komutativní noetherovský okruh, pak ploché algebraicky kompaktní moduly jsou právě součiny zúplnění volných modulů nad lokalizacemi okruhu R [X'96].

3. Obaly a pokrytí modulů

Nyní definujeme centrální pojmy tohoto článku. Nechť R je okruh, M je modul a $\mathcal{C}$ je třída modulů.

$\mathcal{C}$-předpokrytím modulu M rozumíme R-homomorfismus $f : C \to M$ (kde $C \in \mathcal{C}$) takový, že pro každý R-homomorfismus $f' : C' \to M$ (kde $C' \in \mathcal{C}$) existuje R-homomorfismus $g : C' \to C$ takový, že $fg = f'$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & M \arrow[d, equal] \\ C' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

Je-li navíc $\mathcal{C}$-předpokrytí f *minimální* (tj. každý R-homomorfismus $h : C \to C$ splňující $fh = f$ je bijekcí), pak se f nazývá *$\mathcal{C}$-pokrytím* modulu M.

Duálně definujeme pojmy obalu a předobalu:

$\mathcal{C}$-předobalem modulu M rozumíme R-homomorfismus $f : M \to C$ (kde $C \in \mathcal{C}$) takový, že pro každý R-homomorfismus $f' : M \to C'$ (kde $C' \in \mathcal{C}$) existuje R-homomorfismus $g : C \to C'$ takový, že $gf = f'$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f'"] & C' \end{tikzcd}$$

Je-li navíc $\mathcal{C}$-předobal f *minimální* (tj. každý R-homomorfismus $h : C \to C$ splňující $hf = f$ je bijekcí), pak se f nazývá *$\mathcal{C}$-obalem* modulu M.

Je-li $\mathcal{C} = \text{Mod-}R$, pak každý modul má triviálně $\mathcal{C}$-obal i $\mathcal{C}$-pokrytí. Obecně ne každá aproximace (tj. předpokrytí nebo předobal) je minimální. Jak uvidíme dále, minimální aproximace dokonce nemusejí existovat. Pokud však existují, jsou zřejmě určeny jednoznačně až na izomorfismus. Navíc mají další homologické vlastnosti:

Je-li $\mathcal{C}$ třída modulů, pak $\mathcal{C}^{\perp}$ značí třídu všech modulů $A \in \text{Mod-}R$ takových, že pro každý modul $C \in \mathcal{C}$ je každá krátká exaktní posloupnost tvaru (1) štěpitelná. Například $\mathcal{P}^{\perp} = \text{Mod-}R$ a $\text{Mod-}R^{\perp} = \mathcal{I}$.

Duálně, ${}^{\perp}\mathcal{C}$ značí třídu všech modulů $C \in \text{Mod-}R$ takových, že pro každý modul $A \in \mathcal{C}$ je každá krátká exaktní posloupnost tvaru (1) štěpitelná. Tedy například ${}^{\perp}\mathcal{I} = \text{Mod-}R$ a ${}^{\perp}\text{Mod-}R = \mathcal{P}$. Operátor ${}^{\perp}$ má podobné vlastnosti jako operátor ortogonálního doplňku.

$\mathcal{C}$-předpokrytí f modulu M se nazývá *speciální*, pokud $\mathrm{Im}(f) = M$ a zároveň $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{C}^{\perp}$. Speciální $\mathcal{C}$-předpokrytí tedy dává vznik rozšíření

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow C \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Duálně, $\mathcal{C}$-předobal f modulu M je *speciální*, pokud $\mathrm{Ker}(f) = 0$ a $\mathrm{Im}(f) \in {}^{\perp}\mathcal{C}$. Speciální $\mathcal{C}$-předobal dává vznik rozšíření

$$0 \to M \xrightarrow{f} C \to \mathrm{Im}(f) \to 0.$$

U speciálních předpokrytí (předobalů) je tedy pod „kontrolou“ nejen střední člen indukované exaktní posloupnosti, C, ale i jádro (resp. obraz) zobrazení f.

Speciální předobaly a předpokrytí hrají důležitou roli při konstrukcích obalů a pokrytí modulů:

Věta 1. [X'96] *Nechť M je modul a $\mathcal{C}$ je třída modulů uzavřená na rozšíření (tj. je-li $A, C \in \mathcal{C}$, pak pro každé rozšíření (1) je i $B \in \mathcal{C}$).*

(i) *Je-li $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$, pak každé $\mathcal{C}$-pokrytí modulu M je speciální.*
(ii) *Je-li $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$, pak každý $\mathcal{C}$-obal modulu M je speciální.*
(iii) *Nechť třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na direktní limity a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$. Pak existuje $\mathcal{C}$-pokrytí modulu M, právě když existuje speciální $\mathcal{C}$-předpokrytí M.*
(iv) *Nechť třída ${}^{\perp}\mathcal{C}$ je uzavřená na direktní limity a $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$. Pak existuje $\mathcal{C}$-obal modulu M, právě když existuje speciální $\mathcal{C}$-předobal M.*

Navzájem duální pojmy obalů a pokrytí jsou svázány i homologicky, pomocí pojmu kotorzní teorie modulů:

Dvojici tříd modulů $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ nazýváme *kotorzní teorií*, pokud $\mathcal{A} = {}^{\perp}B$ a $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{B}$. Například $(\mathcal{P}, \text{Mod-}R)$ a $(\text{Mod-}R, \mathcal{I})$ jsou (*triviální*) kotorzní teorie.

Věta 2. [S'79] *Nechť $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ je kotorzní teorie. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Každý modul má speciální $\mathcal{A}$-předpokrytí.*
(ii) *Každý modul má speciální $\mathcal{B}$-předobal.*

Kotorzní teorie splňující ekvivalentní podmínky věty 2 se nazývá *úplná*. Obě triviální kotorzní teorie jsou zřejmě úplné. Z věty 2 tedy plyne, že každý modul má speciální projektivní ($= \mathcal{P}$-)předpokrytí a speciální injektivní ($= \mathcal{I}$-)předobal. Z věty 1 pak dokonce plyne existence minimálních aproximací:

Důsledek 3. *Každý modul má injektivní obal. Je-li třída $\mathcal{P}$ uzavřená na direktní limity, pak každý modul má projektivní pokrytí.*

Příkladem injektivního obalu v komutativních grupách je vnoření $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Injektivním obalem v Mod-$UT_n(K)$ je vnoření $UT_n(K) \hookrightarrow M_n(K)$.

Z definice třídy $\mathcal{F}$ všech plochých modulů vyplývá, že podmínka uzavřenosti třídy všech projektivních modulů na direktní limity je ekvivalentní podmínce $\mathcal{P} = \mathcal{F}$. Okruhy, pro které $\mathcal{P} = \mathcal{F}$, se nazývají (zprava) *perfektní*. Každá konečně dimenzionální algebra je perfektní, nicméně perfektnost je podmínkou „konečnosti“ (je ekvivalentní neexistenci ostře klesajících řetězců cyklických levých podmodulů v R). Bass ukázal, že perfektnost je nejen postačující, ale i nutnou podmínkou existence projektivních pokrytí všech modulů. Pro řadu nekonečně dimenzionálních algeber proto projektivní pokrytí obecně neexistují.

Nyní se zmíníme stručně o dvou dalších významných typech obalů a pokrytí.

Věta 4. [Wa'69] *Každý modul má algebraicky kompaktní obal.*

Příkladem algebraicky kompaktního obalu v komutativních grupách je vnoření $\mathbb{Z} \hookrightarrow \prod_p \mathbb{J}_p$, kde $\mathbb{J}_p$ značí grupu všech celých p-adických čísel a p probíhá množinu všech prvočísel.

Okruh R se nazývá *oborem integrity*, pokud R je komutativní a $r{\cdot}s \neq 0$, kdykoliv $0 \neq r, s \in R$. Modul M nad R je *beztorzní*, pokud $m{\cdot}r \neq 0$ pro všechna $0 \neq r \in R$ a $0 \neq m \in M$. Třídu všech beztorzních modulů nad R budeme značit $\mathcal{E}$. Platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Enochs objevil, že třída $\mathcal{E}$ umožňuje pokrytí modulů:

Věta 5. [En'63] *Každý modul nad oborem integrity má beztorzní pokrytí.*

Například pro každé prvočíslo p je zobrazení $f : \mathbb{J}_p \to \mathbb{Z}_p$, jehož jádrem je podgrupa $p\,\mathbb{J}_p$, beztorzním pokrytím cyklické grupy $\mathbb{Z}_p$.

4. Plochá pokrytí modulů

Všimněme si, že druhou část důsledku 3 bychom mohli formulovat také takto: každý modul nad zprava perfektním okruhem má ploché pokrytí.

Existence plochých pokrytí modulů nad některými obory integrity plyne z věty 5: Obor integrity R se nazývá *Prüferův*, pokud každý konečně generovaný podmodul R je projektivní. Ekvivalentně lze Prüferovy obory definovat jako obory integrity, pro které $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ [FS'85]. Podle věty 5 tedy plochá pokrytí existují i pro moduly nad Prüferovými obory.

Tyto skutečnosti vedly koncem 70. let Edgara Enochse k formulaci následující hypotézy:

FCC (Flat Cover Conjecture — Hypotéza existence plochých pokrytí modulů)**.** *Každý modul nad libovolným okruhem má ploché pokrytí.*

Tato hypotéza je úzce svázána s existencí dalšího typu obalů modulů. Pro libovolný okruh R je třída $\mathcal{F}$ uzavřená na rozšíření a direktní limity. Navíc $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp})$ je kotorzní teorií. Podle vět 1 a 2 je FCC ekvivalentní s existencí speciálních plochých předpokrytí modulů, ale také speciálních $\mathcal{F}^{\perp}$-předobalů modulů, resp. s úplností kotorzní teorie $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp})$.

Třídu $\mathcal{F}^{\perp}$ budeme značit $\mathcal{K}$, její prvky se nazývají *kotorzní moduly.* FCC je tedy ekvivalentní s existencí kotorzních obalů modulů. Důležité je, že každý algebraicky kompaktní modul je kotorzní, tedy $\mathcal{K}$-obaly jsou jemnějšími aproximacemi než algebraicky kompaktní obaly; platí $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$.

Jedním z nejobtížnějších kroků k řešení FCC byl následující výsledek Xuův z poloviny 90. let:

Věta 6. [X'95] *Nechť R je komutativní noetherovský okruh konečné Krullovy dimenze. Pak každý modul má ploché pokrytí.*

Připomeňme, že Krullova dimenze okruhu R je definována jako supremum délek řetězců prvoideálů v R. Konečnou Krullovu dimenzi má například souřadnicový okruh každé algebraické variety.

Existenci minimálních plochých rezolvent kotorzních modulů použil Xu k vytvoření teorie invariantů těchto modulů nad tzv. Gorensteinovými okruhy v monografii [X'96]. I když v této monografii byla FCC dokázána i v některých dalších případech, kdy lze plochá pokrytí popsat podrobněji, obecný případ zůstával otevřený.

V roce 1997 vznikl na katedře algebry MFF UK z iniciativy autora článku a Markuse Schmidmeiera (LMU Mnichov) seminář o plochých pokrytích modulů. Semináře se dále zúčastnili doktorandi Robert El Bashir, Tomáš Crhák, Pavel Růžička a Jan Žemlička a Josef Jirásko z FSv ČVUT. Mimo seminář na řešení FCC pracoval Ladislav Bican, který navrhl použít starší přístup Kielpinského.

Dalším krokem k řešení byla následující věta, kterou dokázal autor ve spolupráci s P. C. Eklofem na podzim 1998. Tato věta je zobecněním výsledků Göbela a Shelaha o tzv. racionálních kotorzních teoriích komutativních grup [GS'00].

Věta 7. [ET'00] *Nechť R je okruh a $\mathcal{S}$ je množina modulů. Potom $({}^{\perp}(\mathcal{S}^{\perp}), \mathcal{S}^{\perp})$ je úplná kotorzní teorie. Tedy každý modul má speciální $\mathcal{S}^{\perp}$-předobal.*

K důkazu FCC podle věty 7 zbývalo dokázat, že vždy existuje množina plochých modulů $\mathcal{S}$ taková, že $\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{K}$. To se podařilo Edgaru Enochsovi v červenci 1999: dokázal, že za $\mathcal{S}$ stačí vzít reprezentativní množinu všech $\leqq \operatorname{card}(R) \cdot \aleph_0$-generovaných plochých modulů. Tím byla po více než dvacetiletém úsilí FCC dokázána pro libovolný okruh R. Jiný důkaz FCC objevil nezávisle a ve stejné době Robert El Bashir na základě Bicanova přístupu. Oba důkazy FCC tvoří společně článek [BEE'00].

Metody objevené při důkazu FCC mají celou řadu dalších aplikací: El Bashir zkoumal existenci plochých pokrytí v libovolné dosažitelné abelovské kategorii. Enochs a Oyonarte dokázali existenci plochých pokrytí v kategorii svazků [EO'00]. Aplikací věty 7 dále dokázali, že pro každé přirozené n tvoří dvojice $(\mathcal{P}_n, (\mathcal{P}_n)^\perp)$ úplnou kotorzní teorii modulů [AEJO'00] (zde $\mathcal{P}_n$ značí třídu všech modulů projektivní dimenze $\leqq n$).

Duální situaci je věnována práce [ET'01]: je-li $\mathcal{S}$ libovolná třída algebraicky kompaktních modulů, pak $({}^\perp\mathcal{S}, ({}^\perp\mathcal{S})^\perp)$ je úplná kotorzní teorie. Navíc každý modul má ${}^\perp S$-pokrytí a $({}^\perp\mathcal{S})^\perp$-obal. Za předpokladu Gödelova axiomu konstruovatelnosti (V = L) dokonce platí, že nad každým zprava dědičným okruhem je $({}^\perp\mathcal{S}, ({}^\perp\mathcal{S})^\perp)$ úplná kotorzní teorie pro libovolnou množinu modulů $\mathcal{S}$.

Posledně zmíněný výsledek se zdá být mezní: Saharon Shelah nedávno oznámil, že existuje model ZFC, ve kterém kotorzní teorie $({}^\perp\mathbb{Z}, ({}^\perp\mathbb{Z})^\perp)$ není úplná. Připomeňme, že prvky třídy ${}^\perp\mathbb{Z}$ jsou lépe známy pod názvem *Whiteheadovy grupy* [EM'90].

5. Ekvivalence v kategoriích modulů

V klasické algebře byla známa řada výsledků typu: je-li V vlastnost algeber a algebra R má vlastnost V, pak vlastnost V má i algebra $M_n(R)$ všech čtvercových $n \times n$ matic nad R, pro každé přirozené číslo n. Pro každou takovou vlastnost existoval zvláštní důkaz příslušného výsledku.

Koncem 50. let objevil Morita vysvětlení a zároveň elegantní jednotný důkaz většiny těchto výsledků. Dokázal, že pro každé n jsou kategorie všech modulů nad R a modulů nad $M_n(R)$ ekvivalentní, tj. mají tytéž vlastnosti formulovatelné v teorii kategorií. Moritův objev se netýkal jen klasických výsledků: jakákoliv nová vlastnost algeber, kterou je možné formulovat pomocí kategoriální vlastnosti kategorie modulů nad danou algebrou R, se automaticky přenáší na všechny maticové algebry $M_n(R)$.

Morita také ukázal, že ekvivalence kategorií Mod-R a Mod-$M_n(R)$ je reprezentovatelná, tj. určená modulem P takovým, že okruh $M_n(R)$ je izomorfní s okruhem endomorfismů $\mathrm{End}_R(P)$ a funktory realizující ekvivalenci jsou $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ a funktor tenzorového součinu $-\otimes_{M_n(R)} P$:

$$\text{Mod-}R \quad \underset{-\otimes_{M_n(R)}P}{\overset{\mathrm{Hom}_R(P,-)}{\rightleftarrows}} \quad \text{Mod-}M_n(R).$$

Pro modul M označme $\mathrm{Gen}_R(M)$ třídu všech modulů, které jsou R-homomorfními obrazy modulů tvaru $\bigoplus_{i\in I} M$. Morita dokázal, že reprezentující moduly P jsou určeny jednoznačně až na izomorfismus. Jsou to tzv. *progenerátory*, tj. konečně generované projektivní moduly P splňující $\mathrm{Gen}_R(P) = \text{Mod-}R$, [B'62].

Moritův objev měl zásadní význam pro další rozvoj teorie modulů a přirozeně vedl k řadě zobecnění, ve kterých kategorie modulů sice nejsou ekvivalentní, ale existují ekvivalence mezi velkými částmi těchto kategorií. Nejvýznamnějším zobecněním Moritovy teorie se stala teorie konečně generovaných vychylujících modulů a tzv. vychýlených algeber, která vznikla analýzou práce Bernsteina, Gelfanda a Ponomareva [BGP'73]. Tato teorie vedla ke konstrukcím a prozkoumání struktury celé řady konečně dimenzionálních algeber [HR'82] aj.

Vychylující moduly lze definovat jako moduly T splňující $\mathrm{Gen}_R(T) = \{T\}^{\perp}$. Auslander a Reiten objevili, že v konečně dimenzionálním případě vychylující moduly úzce souvisejí s obaly modulů [AR'91]. Tato souvislost existuje i v obecném případě a lze ji dokázat aplikací metod objevených při řešení FCC.

Třída modulů $\mathcal{C}$ se nazývá *torzní*, pokud $\mathcal{C}$ je uzavřená na rozšíření, na R-homomorfní obrazy a s každou posloupností svých prvků $\{C_i \mid i \in I\}$ obsahuje i modul $\bigoplus_{i\in I} C_i$. Užitím věty 7 lze například dokázat:

Věta 8. [ATT'00] *Nechť R je okruh a $\mathcal{C}$ je torzní třída modulů. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Každý modul má speciální $\mathcal{C}$-předobal.*

(ii) *$\mathcal{C} = \mathrm{Gen}_R(T)$ pro nějaký vychylující modul T.*

Literatura

[AEJO'00] Aldrich, S. T., Enochs, E., Jenda, O. M. G., Oyonarte, L.: *Envelopes and covers by modules of finite injective and projective dimension.* Preprint, Journal of Algebra (2000).

[ATT'00] Angeleri Hügel, L., Tonolo, A., Trlifaj, J.: *Tilting preenvelopes and cotilting precovers.* Preprint, Algebras and Representation Theory *3* (2000).

[AR'91] Auslander, M., Reiten, I.: *Applications of contravariantly finite subcategories.* Adv. Math. *86* (1991), 111–152.

[B'62] Bass, H.: *The Morita Theorems.* Univ. Oregon Press, Eugene 1962.

[Be'91] Benson, D. J.: *Representations and Cohomology I.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.

[BGP'73] Berstein, I. N., Gelfand, I. M., Ponomarev, V. A.: *Coxeter functors and Gabriel's theorem.* Uspechi Matem. Nauk *28* (1973).

[BEE'00] Bican, L., El Bashir, R., Enochs, E.: *All modules have flat covers.* Preprint, Bull. London Math. Soc. (2000).

[Co'95] Coutinho, S. C.: *A Primer of Algebraic D-modules.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[Cr'92] Crawley-Boevey, W.: *Modules of finite length over their endomorphism rings.* In "Representations of algebras", London Math. Soc. Lecture Notes 168, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992, 127–184.

[D'74] Dixmier, J.: *Algèbres Enveloppantes.* Gauthier-Villars, Paris 1974.

[E'95] Eklof, P. C.: *Classification and non-classification results for abelian groups.* In: "Abelian Groups and Modules". Kluwer, Boston 1995, 135–143.

[EM'90] Eklof, P. C., Mekler, A. H.: *Almost Free Modules.* North-Holland, New York 1990.

[ET'00] Eklof, P. C., Trlifaj, J.: *How to make Ext vanish.* Preprint, Bull. London Math. Soc. (2000).

[ET'01] Eklof, P. C., Trlifaj, J.: *Covers induced by Ext.* Preprint, Journal of Algebra (2000).

[En'63] Enochs, E.: *Torsion free covering modules.* Proc. Amer. Math. Soc. *14* (1963), 884–889.

[EO'00] Enochs, E., Oyonarte, L.: *Flat covers and cotorsion envelopes of sheaves.* Preprint, Journal of Pure Appl. Algebra (2000).

[FS'85] Fuchs, L., Salce, L.: *Modules over Valuation Domains.* M. Dekker, New York 1985.

[GS'00] Göbel, R., Shelah, S.: *Cotorsion theories and splitters.* Preprint, Trans. Amer Math. Soc. (2000).

[HR'82] Happel, D., Ringel, C. M.: *Tilted algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. *274* (1982), 399–443.

[P'00] Peterfalvi, T.: *Character Theory for the Odd Order Theorem.* London Math. Soc. Lecture Notes Vol. 272. Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.

[S'79] Salce, L.: *Cotorsion theories for abelian groups.* Symposia Math. *XXIII* (1979), 11–32.

[T'96] Trlifaj, J.: *Whitehead test modules.* Trans. Amer. Math. Soc. *348* (1996), 1521–1554.

[W'31] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra.* Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Springer, Berlin 1931.

[Wa'69] Warfield, R.: *Purity and algebraic compactness for modules.* Pacific J. Math. *28* (1969), 699–719.

[We'94] Weibel, C.: *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1994.

[X'95] Xu, J.: *The existence of flat covers over noetherian rings of finite Krull dimension.* Proc. Amer. Math. Soc. *123* (1995), 27–32.

[X'96] Xu, J.: *Flat Covers of Modules.* Lecture Notes in Mathematics No. 1634. Springer, New York 1996.

Matematické teorie pojišťování

Petr Mandl a Lucie Mazurová, Praha

V příspěvku je pojednáno o matematickém modelu neživotního pojišťování, který rozvíjíme na Matematicko-fyzikální fakultě UK ([1]–[4]). Na této činnosti se podílejí doktorandi a diplomanti ([5], [6]). Model je součástí výuky předmětů Věcné pojištění a Účetnictví II ([7], [8]) a je zahrnut do výzkumného záměru MSM 113200008. Byl použit ministerstvem financí při kontrole obchodních plánů pojišťoven žádajících o licenci na pojištění odpovědnosti z provozu motorových vozidel. Zavedení poměru kapitálové přiměřenosti je zde publikováno poprvé.

V odstavcích 1, 2 i dále poskytujeme ve zkratce čtenáři širší pohled na teorie pojišťování. Zásady, které uvádíme pro neživotní pojištění, lze uplatnit též na rizikovou složku pojištění životního.

Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc. (1933), a RNDr. Lucie Mazurová, Ph. D. (1970), oddělení finanční a pojistné matematiky, katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK, Praha.