Přínos nové výpočtové mechaniky by mohl být ohromný: nové materiály optimalizované pro různé použití, nové léky, chemikálie a chemické technologie, prediktivní operační postupy založené na osobních výpočtových modelech přizpůsobených jednotlivým pacientům, spolehlivé předpovědi počasí, porozumění jevům v galaxiích nebo tokům energie a látek v přírodě, nová subatomová zařízení s tisíci aplikacemi, a to vše s mírou spolehlivosti, která by před pouhým desetiletím byla nepředstavitelná.

Nakonec zdůrazněme, že nás čeká mnoho nové matematické práce. Postup vpřed se neobejde bez podstatného pokroku v matematickém modelování, numerické analýze, počítačích a informatice, zkrátka ve všech součástech nové výpočtové mechaniky.

Spojité, diskrétní a … všechno ostatní

Gustave Choquet, Paříž

1. Pomalý vývoj

Spojité a diskrétní jsou dvě důležitá témata vědeckého myšlení. Jejich existence nepřestávala zneklidňovat mysl matematiků, fyziků a filozofů. Chtěl bych se zde pokusit o upřesnění jejich místa v moderní vědě a načrtnout studii jejich vzájemných vztahů.

Tato slova, *spojité* a *diskrétní*, evokují mnoho dalších klíčových slov a příbuzných pojmů: *spojitost*, *nespojitost*, *nekonečno aktuální či potenciální*, *Achilles a želva*, *dualita*, *vlny – částice*, *fuzzy množiny* atd. …

Tato témata se pozvolna obohacovala počínaje od Pythagora, Eleatů a Aristotela. A přece jejich studium nešlo kupředu po celá staletí, jako kdyby Aristotelova autorita brzdila tvůrčí elán patrný v Iónské škole, oplývající matematiky a astronomy, jako byli Thalés z Milétu a Aristarchos ze Samu.

Je pikantní říci, že kdyby Řekové Periklova století znali z cantorovského světa třeba jen krátkou definici ekvipotence dvou množin prostřednictvím bijekce, celá historie matematiky a filozofie by byla jiná.

Myslím si tedy, že bude zajímavé zastavit se u příčiny tohoto dlouhého spánku. Shledávám ji v konzervatismu lidského myšlení: člověk má sklon považovat to, co se

---

Le continu, le discret, et … tout le reste. Le labyrinthe du continu (Colloque de Cerisy-la-Salle, 1990), eds. Salankis, J.-M., Sinaceur, H., Springer-Verlag, Paris 1992.

Přeložil Zbyněk Šír.

naučil v mládí, za neměnné pravdy a sám to předávat svým vlastním dětem. Historie vědy a techniky to bohatě dosvědčuje.

Aby se člověk dostal ze zaběhnutých kolejí tradice, potřebuje k tomu pobídku nezbytnosti, setkání s drobným provokujícím pozorováním, které zpochybní jeho získanou intuici nebo které otřese jeho filozofickými a vědeckými koncepcemi. Často právě slepé uličky vědy jsou na počátku její obnovy, jak nám ukazují četné příklady.

Byl to právě Michelsonův pokus s rychlostí světla, který dovedl Einsteina k opuštění pojmu *éter* a přivedl jej ke speciální teorii relativity. Náhodné pozorování šumu v roce 1964 vedlo Penziase a Wilsona k objevu reliktního pozadí rádiového záření.

Vraťme se ale k matematickému pojmu spojitého, abychom dokreslili naše tvrzení.

(a) Více než 2000 let uplynulo mezi Eukleidem a neeukleidovskými geometriemi (Lobačevskij kolem r. 1830, dále Bolyai, Gauss). Nejprve bylo třeba o Eukleidově postulátu pochybovat, poté byl již neeukleidovský model objeven dosti rychle.

Geometrie ploch se začala prudce rozvíjet. Nejprve Gauss ve svých *Disquisitiones* (1801) ukázal, jak lze vnitřně studovat plochy, poté Riemann ve své inaugurační přednášce *O hypotézách, které tvoří základ geometrie* v roce 1854 zahajuje studium *velikostí n-krát rozprostraněných.* Scéna je tak připravena k modernímu rozvoji pojmu diferencovatelné variety konečné i nekonečné dimenze.

(b) Vývoj *topologických pojmů* a *pojmu nekonečna* měl podobný průběh. Po rostoucích posloupnostech Zénóna z Eley v souvislosti se šípem či želvou bylo třeba dlouhého přešlapování na místě, než se dospělo k dobré definici konvergence posloupností (Cauchy 1823) a k definici iracionálních čísel (Cantor, Heine, Dedekind kolem r. 1872).

Poté je vývoj rychlý. O něco později (1878–1884) Cantor zavádí v eukleidovských prostorech nám blízké topologické pojmy a především pojem bijekce dvou množin. V roce 1906 Fréchet a později F. Riesz, motivováni prostory funkcí, definovali metrické prostory, čímž opustili tradiční kontext eukleidovských prostorů. V roce 1914 Hausdorff dospívá k elegantní syntéze topologických pojmů, které se od té doby osvědčily. V letech 1920–1922 Banach a Hahn podávají obecnou definici normovaných prostorů. Obecnější topologické vektorové prostory se objevují v roce 1935 díky von Neumannovi.

Krásná syntéza navržená Hausdorffem ve své zdánlivě definitivní formě podané bourbakisty poskytuje dobrý příklad toho, co znamená tíha tradice. V letech 1930 až 1950 bylo vskutku možno věřit, že tento topologický kontext je natolik vhodný, aby postihl všechny pojmy konvergence užitečné pro analýzu. Ale v roce 1948 malý detail ukázal, že tomu tak není. Konvergenci na množině $\mathcal{F}(E)$ uzavřených podmnožin topologického prostoru E nelze vyjádřit pomocí topologie na $\mathcal{F}(E)$ (pokud E není lokálně kompaktní). Na $\mathcal{F}(E)$ je nutno zavést strukturu nového typu, takzvanou pseudotopologii. Od té doby se zjistilo, že tyto struktury, přestože nejsou tak užitečné jako topologie, jsou nezbytné rovněž ke studiu diferencovatelných variet nekonečné dimenze.

(c) Pojem křivky je pro nás spojen s topologií, ale u našich předků tomu tak nebylo. Křivkami byly především kružnice a kuželosečky a později několik dalších křivek, jako například Dioklova kisoida nebo Nikomedova konchoida.

Bylo třeba počkat na Descarta (1596–1650), aby byla naráz k dispozici celá třída algebraických křivek. A teprve za dalších 200 let podal Jordan (1866) obecnou definici jednoduché uzavřené křivky a formuloval svou větu o rozdělení roviny takovouto křivkou. Tuto větu pak Brouwer (kolem r. 1920) pozoruhodným způsobem zobecnil na kompakty v $\mathbb{R}^n$.

Pojem křivky se dále rozvíjel několika směry. Jedním z nich jsou jordanovská kontinua, tj. spojité obrazy intervalu $[0,1]$ (což může např. být i eukleidovská krychle). Další je blíže naší intuici a jde o souvislé množiny topologické dimenze 1, tedy souvislé kompakty, jejichž každý bod má bázi otevřených množin s diskrétní hranicí. Tyto množiny představují faunu velmi bohatou. L. J. Brouwer jako první zkonstruoval v roce 1910 rovinné kontinuum dimenze 1, které je nerozložitelné v tom smyslu, že není sjednocením dvou vlastních podkontinuí. Například slavný Hénonův atraktor a mnoho dalších atraktorů jsou nerozložitelná kontinua. Existují rovněž rovinná nerozložitelná kontinua, která dělí rovinu na n oblastí (kde $n \geqq 2$) a jsou přitom jejich společnou hranicí.

V této době také vznikají četné příklady zvané „patologické“. Jejich předchůdcem je známá spojitá funkce na intervalu $[0,1]$, která nemá nikde derivaci. Tato funkce zkonstruovaná Weierstrassem (typu $f(x) = \sum_1^\infty \sin(n^{2n}x)/n^n$) velmi provokovala Hermita (*nenávidím tuto pohromu funkcí bez derivace*). Jednoduché rovinné oblouky nenulové Lebesgueovy míry, Antoineovy kompakty v $\mathbb{R}^3$, které jsou propleteny uzavřenými mnohoúhelníky, aniž by je protnuly, některé jsou dimenze 0 a jiné jsou homeomorfní se sférou, Lebesgueovy rotační plochy, které jsou izometricky (tj. se zachováním délek jednoduchých oblouků) zobrazitelné na rotační kužel a přesto neobsahující žádnou část přímky.

Tyto „jedovaté květy“ matematiky se střetávaly s návyky myšlení získanými téměř výhradně prací s analytickými funkcemi. Postupně vnesly trochu čerstvého vzduchu a vytvořily paradigmata nových teorií, pro něž se staly mantinely i hnacími motory. Vedly tak k vytvoření nových nástrojů a nových legitimních objektů.

Tak vznikla Lebesgueova teorie integrálu, provázená plodným metrickým pojmem *skoro všude*. Paralelně, ale v topologickém kontextu, se pak zrodil Baireův pojem *skoro všude*, dnes nazývaný generičnost: Vlastnost $P(x)$ závislá na bodu x topologického prostoru E se nazývá *generickou* v E, jestliže množina těch x, pro které $P(x)$ neplatí, je malá, totiž je sjednocením posloupnosti množin, jejichž uzávěry mají prázdný vnitřek. Pokud E je úplný metrický prostor nebo lokálně kompaktní prostor, pak $\{x : \text{platí } P(x)\}$ je hustá v E.

Tyto dva pojmy *skoro všude* například umožňují dát smysl následujícím dvěma tvrzením:

(a) Skoro každé reálné číslo je normální (v Borelově smyslu).

(b) Množina spojitých funkcí f na intervalu $[0,1] \times [0,1]$, pro něž je diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ deterministická (jednoznačnost řešení v každém bodě), je generická.

Dnes se při studiu spojitosti setkáváme se třemi tendencemi. První vychází z Riemannových prací o diferencovatelných varietách, druhá pochází od Cantora a třetí vychází z Cauchyových prací o analytických funkcích. Po pozoruhodném rozkvětu, jehož hlavním aktérem byl Poincaré, je dnes ve Francii poslední z těchto tendencí sledována jen málo. Přesto i nás Cauchyův duch nepřestává inspirovat k pozoruhodným pracím, např. o funkcích více komplexních proměnných, o analytických varietách atd.

Riemannovy myšlenky, kultivované Sophusem Lie a později Elie Cartanem, měly překvapivá pokračování: diferencovatelné variety, parciální diferenciální rovnice a Lieovy grupy. Teorie Lieových grup prodělala bouřlivý rozvoj jednak pro svou vlastní krásu, jednak pro své úzké vazby na fyziku a četné další matematické teorie.

Cantorovo potomstvo je možno rozpoznat spíše podle jistého přímého geometrického přístupu k problémům než podle předmětu studia. Zajisté existují obory čistě cantorovské, jako je studium velkých kardinálů, deskriptivní teorie množin (borelovské, analytické, projektivní, ...), teorie míry, pravděpodobnost a teorie Banachových prostorů. Ale především tento směr vytvořil nástroje použitelné téměř ve všech odvětvích matematiky.

Ve všech těchto třech proudech se největší extrémisté nerozpakují kategoricky odsuzovat proudy ostatní. Je to lidské, ale politováníhodné: *In medio stat virtus.*

Hodnota určité teorie je koneckonců jen odleskem hodnoty těch, kteří ji vytvářejí. Kdo by v roce 1643 věřil, že Pascalův *aritmetický stroj* povede ke zrodu počítačů, nebo že Pascalova korespondence s Fermatem o jednom problému z hazardních her z roku 1652 zrodí náš mocný pravděpodobnostní kalkul. Dnes lze podceňovat teorii fuzzy množin (ztotožňovaných s funkcemi s hodnotami v intervalu $[0,1]$ namísto v množině $\{0,1\}$), ale možná, že jednoho dne nějaký mladý tvůrce poněkud pozmění její základ, dokáže hluboké věty, a tak z ní učiní plodný nástroj. Takže nezabíjejme kuře už ve vajíčku.

2. Aktéři a modely

2.1. Spojité a diskrétní

Pro řecké filozofy je *spojité* modelováno jednak časem, který plyne jako voda a který umíme měřit, a jednak úsečkami. U diskrétního se jim zdá vše samozřejmé: rozlišujeme objekty, počítáme jejich počet v určitém souboru.

Pro matematika 20. století jsou dvěma matematickými archetypy uspořádané těleso $\mathbb{R}$ reálných čísel a množina $\mathbb{N}$ celých nezáporných čísel.

Vztahy mezi $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ jsou dobře známy: pomocí $\mathbb{N}$ zkonstruujeme těleso $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a pak $\mathbb{R}$. Naopak $\mathbb{N}$ je kladná část podokruhu $\mathbb{R}$ generovaného jeho jednotkou 1.

Samotný fakt, že každý topologický prostor, který je dostatečně regulární (takzvaně úplně regulární), je homeomorfní s nějakou částí krychle $[0,1]^I$ konečné nebo nekonečné dimenze, dostatečně ukazuje důležitost $\mathbb{R}$.

Pokud bychom chtěli popsat podstatu, ne-li historickou, tak alespoň psychologickou, zavedení $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$, můžeme podtrhnout zásadní roli $\mathbb{N}$ při počítání prvků nějaké množiny. Pro $\mathbb{R}$ je to méně jasné. Zdá se mi ale, že nepřítomnost geometrických přímek v našem běžném světě, a naopak zásadní význam plynutí času v každodenním životě, svědčí spíše o postupném, čím dál tím přesnějším ztotožňování $\mathbb{R}$ s *Časem.* Čas se nám jeví jako orientovaný, rozlišujeme minulost a budoucnost a obě se nám zdají přinejmenším zhruba uspořádané. Je pravdou, že psychologický čas není homogenní, a občas máme dojem, že prostor vládne času a ne naopak. Ale společenský život nás nutí měřit čas a to nás vede k využívání opakujících se přírodních jevů. To je založeno na víře ve stabilitu světa a na principu *tytéž příčiny vedou k týmž důsledkům.* Jde především o sled dnů a nocí a ročních období. Dále pak o zjemnění měření v rámci jednoho dne: sluneční hodiny (ty ale mají své slabiny) a především vytékání vody otvorem z nádoby, v níž je udržována konstantní hladina.

Matematickým modelem této situace je $\mathbb{R}$ se svým úplným uspořádáním. Existence tohoto úplného uspořádání a *orientace času* vedly k nesčetným studiím a diskusím. Léon Motchane velice dobře zdůraznil existenci této orientace: Jestliže pozorovatel chce změřit okamžitou rychlost pohybujícího se tělesa v okamžiku t_0, může ji v principu změřit zleva měřeními v okamžicích t_n rostoucích k t_0, ale nemůže ji měřit zprava, protože po pozorování v okamžiku t_0 následuje další pozorování v okamžiku t_1 a již není možné se vrátit zpět a přiblížit se k t_0.

Dříve než budeme studovat vztahy spojitého a diskrétního, chtěl bych učinit poznámku o roli, kterou hrají v $\mathbb{R}$ iracionální čísla. Buď A množina konstruovatelných reálných čísel, tedy čísel, jejichž desítkový rozvoj je vypočitatelný jedním algoritmem, řekněme naprogramovaným počítačem. Jsou to například racionální čísla, algebraická čísla, e, π atd. Protože A je spočetná, existují $x \in \mathbb{R}$, která nemůžeme explicitně určit a která nám tedy zůstanou navždy neznámá. Jaká je jejich role?

Právě ona ulehčují poznávání konstruovatelných čísel. Jistě, zůstanou vždy nepřístupná pro výpočet, ale bez nich by ty pro analýzu nejužitečnější vlastnosti $\mathbb{R}$ zmizely nebo byly obtížně formulovatelné.

Například cauchyovské posloupnosti by nekonvergovaly, kromě těch, které jsou definovány nějakým algoritmem, $[0, 1]$ by už nebyl kompaktní, metrické i topologické *skoro všude* by zmizelo, protože množina konstruovatelných čísel je metricky i topologicky zanedbatelná.

Je pravda, že $\mathbb{R}$ je jednoznačné v každém modelu teorie množin a tato jednoznačnost se zdá v rozporu s tím, že některá čísla nejsou definovatelná. Ale fakt, že existuje nekonečně mnoho modelů teorie množin, a tedy i $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$, umožňuje lépe pochopit, proč jsou prvky z $\mathbb{R} \setminus A$ neuchopitelné.

Ale nyní bych chtěl hovořit o jiných druzích modelů, abychom lépe pochopili, jakým způsobem si diskrétní a spojité vynutilo naši pozornost a jaké jsou jejich vzájemné vztahy.

2.2. Modely

Aby člověk překonal handicapy spojené s křehkostí svého organismu a aby překročil bezprostřední hnutí svého „krokodýlího mozku“ (hlad, žízeň, strach, sexuální popudy) vrhající ho do budoucnosti, vytváří a používá mentální struktury, které nazývám modely. Toho je schopen díky své paměti a výkonnému mozku. Tyto *modely* jsou základem našeho způsobu myšlení a činnosti. Tvoří jakási lešení, na která se snažíme zavěsit zároveň naše znalosti i naše činnosti. Jsou to nástroje našeho předvídání i našich plánovaných činností.

Máme modely pro následující minutu, pro hodinu, pro budoucí dny. Někteří z nás sotva vyšli z puberty a už plánují svůj důchod. Generál, boxer, šachista i poslanec mají své taktiky a strategie.

Jestliže jsou modely dostatečně jednoduché, mohou zůstat ve formě mentální struktury. Jestliže se ale stanou složitějšími, jsme nuceni je konkretizovat na nějakém materiálním podkladě: pomocí obrázku (plány a mapy jsou modely obdivuhodně účinné) nebo pomocí sledu malých obrázků. Třeba také ideogramy nebo písmena, která dnes již zcela ztratila svůj význam, ale která vhodně uspořádána tvoří slova (mající již smysl), a dále věty schopné upřesnit náš mentální model. Jestliže k nim přidáme matematické symboly, jejich pravidla sdružování mají dokonce pozoruhodnou moc rozvinout mentální model k větší účinnosti, i když je to na úkor jeho jistého počátečního bohatství.

Právě jsem ukázal, jakým způsobem dochází k přechodu od mentálního modelu bohatého na smyslové rezonance, ale obtížně sdělitelného pro svou příbuznost s multidimenzionálním kontinuem, k modelu diskrétnímu, vyjádřitelnému konečným počtem znaků, tedy vlastně pomocí konečné posloupnosti 0 a 1.

Je nepochybné, že čínská báseň, zapsaná v ideogramech, které v sobě ještě mají bohatost vnitřního života svého autora, zůstane navždy nepřeložitelná do písma naší abecedy: na všech polích vítězit nelze.

Diskrétní účinně vstupuje do hry, jakmile chceme zapsat nebo předat nějaký model svého mentálního života. A s touto potřebou se lidé střetávali od chvíle, kdy začali myslet. Zdá se mi tedy marné pokoušet se dokázat ontologické prvenství jednoho či druhého pojmu: *Spojité* a *Diskrétní*. Je to s nimi jako s Jing a Jang: jestliže potkáváme jedno z nich, druhé je již přítomno.

Snad by bylo možno říci, že oblast spojitého je oblastí smyslových vjemů (hebkost kůže, vlahost vzduchu, odstíny duhy) a oblast diskrétního je oblastí uspořádání a komunikace.

2.3. Vztahy mezi spojitým a diskrétním

Tyto dva aspekty jsou neoddělitelné. Je to pravda ve fyzice a snad ještě více v matematice. Ve vlnové a kvantové mechanice tvoří vlny a částice dva vzájemně se doplňující aspekty reálného světa. Teorie plynů, kapalin a pevných látek mohla pokročit jen tím, že užívala jejich atomární nebo molekulární strukturu.

V matematice vystupují spojité a diskrétní propojené buď prostřednictvím duality, nebo prostřednictvím aproximací.

(a) *Dualita*

1. Množina tříd uzavřených smyček na kompaktní ploše bez hranice (sféra, torus s jedním či několika prstenci) uvažovaných až na spojitou deformaci má v přesném

slova smyslu diskrétní strukturu, protože není možno spojitě přejít od jedné třídy k druhé. Navíc zde ovšem máme strukturu aditivní grupy, generované konečným počtem prvků (jedním pro sféru, dvěma pro torus s jedním otvorem).

2. Torická n-dimenzionální grupa $\mathbb{T}^n$ má za duál diskrétní grupu $\mathbb{Z}^n$ a naopak.

(b) *Aproximace*

1. Již Řekové uměli vyjádřit úsečku pomocí násobků menší úsečky (původ Eukleidova algoritmu a řetězových zlomků).

2. Přibližný výpočet rovinné plochy pomocí čtverečků rovinné sítě.

3. Integrál spojité funkce jako limita riemannovských konečných součtů.

4. Aproximace harmonické funkce v oblasti roviny D pomocí preharmonických funkcí definovaných ve vrcholech konečné čtvercové sítě obsažené v D.

5. Všeobecně je znám stále rostoucí průmyslový význam metody konečných prvků (použité v roce 1956 u Boeinga), která spočívá v nahrazení křivých ploch trupů letadla nebo lodi soustavou trojúhelníkových prvků, které je možno počítačově zpracovat.

6. Dřívější analogové výpočetní pomůcky, založené na spojitých strukturách (logaritmické pravítko, analogové počítače), jsou dnes téměř beze zbytku nahrazeny počítači založenými na binárním kalkulu. Poskytují sice jen aproximaci studovaných jevů, ale její přesnost je omezena jen výkonem počítače.

7. Televize používá sice *spojité* elektrické povahy, ale její obrazovka má diskrétní strukturu.

8. V matematice je užitečné při studiu problémů analýzy týkajících se spojitých struktur studovat nejprve analogickou diskrétní nebo i konečnou strukturu. Vskutku, někdy lze ve zjednodušeném případě odhalit nové vztahy a důkazy přenositelné do původního kontextu (např. konečné modely teorie potenciálu).

3. Složité diskrétní systémy

V matematice a ještě více v experimentálních vědách je v závěru dvacátého století patrný vzrůst důležitosti struktur budovaných nad konečnou či diskrétní množinou. Díky rozvoji informatiky, umožněnému výkonností počítačů a větším pochopením algoritmů, můžeme tvrdit, že tato tendence v jednadvacátém století ještě poroste.

Matematici, a především Bourbaki, jako první jasně definovali hierarchii množin konstruovaných na základě dané třídy množin (E_i). Jedná se o hierarchii nových množin zkonstruovaných z E_i pomocí operace součinu $(X, Y) \to X \times Y$ a operace potence $X \to \mathcal{P}(X)$. Například uspořádání na E je možno definovat jako část $E \times E$ obsahující diagonálu. Struktura uspořádání (nebo algebraická struktura či topologie) na E je podmnožina $E \times E$ (nebo $E \times E \times E$, nebo $\mathcal{P}(X)$) splňující jisté axiomy.

Matematikové nečekali se svým zájmem o konečné a diskrétní struktury na éru informatiky. Ostatně diofantovská analýza, kombinatorika či teorie grafů nezačaly včera. Ale zdá se, že *duch doby* tlačí matematiky právě tímto směrem. Nedávno byly klasifikovány všechny konečné jednoduché grupy. Za pomoci počítače se přistoupilo ke studiu problému čtyř barev. Díky nestandardní analýze se již nebojíme mluvit o nekonečných celých číslech. Boltzmannova rovnice je studována za předpokladu, že množina rychlostí je konečná. Penrose studuje neperiodická dláždění jen se dvěma různými typy polygonálních dlaždic a podobná dláždění vysvětlují syntézu neperiodických krystalů.

Samotní neurofyziologové jsou při svých pokusech o vysvětlení záhad mozku vedeni k užití hierarchie množin konstruovaných nad dvěma konečnými množinami — množinou neuronů a množinou dendritů: svazky neuronů, ale také interakce mezi těmito svazky prostřednictvím dendritů atd.

4. Zrození třetího aktéra

Viděli jsme, že od počátku lidského myšlení se *Spojité* a *Diskrétní* vyvíjelo v průběhu staletí souběžně, ať už jedno v protikladu k druhému nebo ve vzájemném doplňování nebo v dualitě. Ale od 17. století se zrodem počtu pravděpodobnosti byly kostky vrženy. Do hry tak vstoupil třetí aktér, který se dnes zdá nejlepším prostředníkem mezi diskrétním a spojitým a je rovněž nejlepší ilustrací složitého diskrétního.

Na počátku 19. století zaznamenalo spojité v souvislosti s Laplacem takový úspěch, že mohlo být považováno za nejlepší základ determinismu.

Citujme slavný Laplaceův výrok z jeho *Filozofické eseje o pravděpodobnosti* (1814): *Kdyby nějaká inteligence, která by v daném okamžiku znala všechny síly, jimiž je příroda uváděna do pohybu, byla dostatečně pronikavá, aby mohla tyto znalosti vyhodnotit za pomoci matematické analýzy, pak by mohla v jediné formuli vyjádřit všechny pohyby velkých i malých těles a budoucnost i minulost by ležela před jejím zrakem.*

Tato iluze, plodná pro rozvoj studia mechaniky, byla založena na poznatku, že diferenciální rovnice s analytickými vstupními údaji má (až na zanedbatelné výjimky) jen jedno řešení splňující počáteční podmínky.

Je pikantní, že tato pevná víra v determinismus se objevila v záhlaví práce o pravděpodobnosti, když právě pravděpodobnost dávala tušit konec deterministické hegemonie. O sto let později díky Planckovi, Einsteinovi, N. Bohrovi, de Brogliovi a Heisenbergovi částice a pravděpodobnost okázale vstoupily do fyziky a nalezly v ní četné aplikace: fotoelektrický efekt, tunelový efekt, …

Determinismus si zachovává své místo ve fyzice a v matematice ve studiu méně složitých systémů a pro vhodná měřítka prostoru a času. Za chvíli se vrátím k významu měřítka, ale přesto bych chtěl již nyní zmínit dva příklady, které zároveň ukáží interakce mezi spojitým a diskrétním.

(a) *První příklad* sahá k počátkům kinetické teorie plynů (1738). Jde o plyn obsažený v kulové nádobě. Pro jednoduchost předpokládejme, že molekuly jsou kulového tvaru a srážky jsou elastické. Máme tedy diskrétní deterministický systém. Po dosti krátkém čase, ať už byl počáteční stav jakýkoliv, bude rozdělení molekul a jejich rychlostí odpovídat Maxwellovým pravděpodobnostním zákonům a v makroskopickém měřítku bude mít plyn opět deterministické chování řízené klasickými zákony. Obláček molekul se tedy bude chovat podle následujícího schématu:

$$\text{determinismus} \to \text{diskrétní chaos} \to \text{pravděpodobnostní zákon} \to \\ \to \text{determinismus (Mariotte atd.).}$$

Tento komplexní systém tedy hraje úlohu prostředníka mezi determinismy na různých úrovních.

(b) *Druhý příklad* nám poskytují podivné atraktory a konkrétněji slavný Hénonův atraktor související s iterováním kvadratického zobrazení. Buď f zobrazení $\mathbb{R}^2$ do sebe definované rovnicí $f(x,y) = (1 + 0{,}3y - 1{,}4x^2,\ x)$. Zvolme libovolně bod M_0 s $\|M_0\| \leqq 1$. Posloupnost $M_n = f(M_{n-1})$ postupných iterací M_0 je dobře definována. Přesto je její chování chaotické a nepředvídatelné. Ale překvapivě, jestliže pozorujeme na obrazovce počítače obláček bodů M_n, vidíme, že se seskupují do jednoho z oněch nerozložitelných kontinuí, definovaných Brouwerem. Navíc charakter obrazu se po tisícovce iterací stabilizuje, což vytváří rozdělení λ, které je navíc nezávislé na M_0.

Máme zde tedy schéma podobného typu jako u dokonalých plynů, totiž chaotické chování zrozené z deterministického zákona, které po určitém čase podléhá novému deterministickému zákonu (v našem případě míře invariantní vůči zobrazení f).

Tento jev připomíná cesty v džungli, dobře průjezdné při nízké rychlosti, nesnesitelné při střední rychlosti, které jsou opět dobré při vysoké rychlosti (viz rovněž podzvukový, zvukový a nadzvukový let).

Všechny tyto příklady zdůrazňují význam měřítka prostoru i času. Brzy se k tomu vrátím, ale nyní bych chtěl zdůraznit, že rozdílnost mezi *determinismem* a *předvídatelností* je ve fyzice spojena s volbou měřítka času. Nic není více deterministické než diferenciální rovnice $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x$, jejímiž řešeními jsou funkce $x = a\mathrm{e}^t$. A přece při chybě e^{-10} v čase 0 bude v čase 10 chyba $\geqq 1$. Toto Ruelle nazývá exponenciální citlivost na počáteční podmínky. Jinak řečeno, motýlí efekt: jedno mávnutí jeho křídel může změnit osud jiné sluneční soustavy.

Existence pravděpodobnostního chaosu, spojená s deterministickými procesy, umožňuje hazardní hry, karty loto atd. Hra v kostky se mi zdá zvláště zajímavou. Dvě neoznačené kostky jsou umístěny v dostatečně širokém kalíšku, kterým se několikrát zatřese, poté jsou kostky vrženy na stůl, na kterém se několikrát převalí předtím, než se zastaví. Z jakého důvodu hráči věří, že například výskyt dvojice $(3,4)$ je nezávislý na hráči, když všechny pohyby jsou řízeny deterministickými mechanickými zákony?

Je tomu tak proto, že konečný výsledek závisí na velkém množství parametrů, z nichž žádný není přesně znám a které se mění při každé hře. Odskoky kostek v kalíšku, počáteční pozice, rychlost při opuštění kalíšku, nepravidelnosti podložky, pohyb vzduchu. Můžeme jít ještě dále, protože hráčovo gesto je rovněž výslednicí množství nezávislých příčin a tak dále. Kaskáda nezávislých jevů, z nichž každý je řízen nějakým deterministickým zákonem, tedy může přijatelně simulovat náhodnost.

Jak je tomu ve fyzice? Na atomární a subatomární úrovni kvantová teorie postuluje náhodnost neredukovatelnou na deterministické vlivy. Pravděpodobnost přítomnosti fotonů asociovaných s vlnou, elektrony obíhající kolem jádra atomu, náhodná dezintegrace radioaktivních atomů. Ale známe Einsteinův výrok: *Bůh nehraje v kostky.*

Jak je tomu přesně? Nebylo by, ve světle pravděpodobnostního chaosu deterministického původu, možno rovněž tvrdit: *Protože Bůh nemá rád náhodu, nepřestává hrát v kostky*? Je tomu tak, že slavná Bellova věta a pokus Alaina Aspecta z roku 1982 ukončily hledání deterministických vysvětlení náhodných jevů v kvantové mechanice? Nebo je možno zkonstruovat fyzikální model, který by je vysvětlil pomocí dlouhých kaskád vzájemně se ovlivňujících jevů řízených deterministickými zákony? Nechme to na odbornících. Ale ověřili fyzikové na malém radioaktivním vzorku, že sled rozkladů se děje podle obvyklých pravidel platných pro náhodné posloupnosti? Myslet si, že Bellova věta jednou provždy rozhodla ve prospěch kvantové mechaniky, by znamenalo znovu upadat do iluze, že existují přesné modely světa.

Tyto úvahy mě vedou k otázce, zda a do jaké míry je možno napodobit náhodu. Ztotožněme množinu posloupností (a_n) čísel 0, 1 s nekonečným součinem $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zaveďme na E součinovou topologii a pravděpodobnostní míru λ, která je součinem měr $(\delta_0 + \delta_1)/2$ na faktorech prostoru E. Vlastnost $P(x)$ na E se bude nazývat *statistická*, pokud je definována konstruovatelnou formulí a je splněna λ-skoro všude na E. Například zákon velkých čísel nebo zákon iterovaného logaritmu. Množina statistických vlastností je spočetná (ale ne efektivně vyčíslitelná), tedy λ-skoro všechna x z E splňují všechny statistické vlastnosti. Přitom je ale nemožné *sestrojit* takovou posloupnost $x = (x_n)$. Jinak řečeno, *není možno napodobit náhodu.* Tato situace je podobná situaci, se kterou jsme se setkali při studiu $\mathbb{R}$. V obou případech skoro žádný bod E není konstruovatelný.

Naproti tomu je možné se více či méně „opičit“ po náhodě v tom smyslu, že pro každou konečnou množinu statistických vlastností můžeme, ovšem ne vždy je to snadné, zkonstruovat posloupnosti $x = (x_n)$, které je splňují. To je to, co dělají statistikové, výrobci počítačů a agronomové tím, že vybírají $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vyhovující jejich potřebám.

5. Měřítka a řády velikosti

Užití mikroskopu či teleskopu nám odhaluje netušené aspekty světa, zákony až do té doby neznámé. Není pravda, že to, co platilo v konečnu, platí také v nekonečně malém nebo nekonečně velkém. Spermatozoid není homunkulus, hladkost vrstvy sněhu je tvořena miliardami hexagonálních krystalů ledu. Toto pozorování platí i pro změny měřítka času. Film, který zpomalíme nebo zrychlíme, nám odhalí nová fakta.

Kontrakce a dilatace měřítek času a prostoru již hrají a budou čím dále více hrát zásadní roli při zkoumání světa. Tvoří novou dimenzi světa. Prostá studie rozlití kapky vody vyžaduje užití dvou různých zákonů pro různé části kapky (de Gennes). Matematikové již mají teoretické nástroje uzpůsobené těmto změnám měřítka: nestandardní analýza, Fourierova analýza, wavelety. Další budou zajisté nezbytné.

Fraktální objekty. Nechci ukončit svou krátkou exkurzi do světa řádů velikostí, aniž bych řekl pár slov o fraktálních objektech, které počínaje Cantorem a Hausdorffem nepřestávají lákat matematiky a fyziky. Myšlenka je následující: Je-li nějaká prostorová struktura, matematická či materiální, zkonstruována čím dál tím jemněji opakovanou aplikací téhož jednoduchého zákona (například kovariantního vzhledem k akci podobností), pak tato struktura bude lokálně vykazovat tentýž charakter ve všech svých zvětšeních a zmenšeních. Například Cantorovo diskontinuum, von Kochova[1]) *sněhová vločka* a jisté Antoinovy kompakty jsou matematickými fraktály.

Striktně vzato, ve fyzice nemohou existovat fraktální objekty, protože, jak jsem zdůraznil, fyzikální zákony se mění, když přeskočíme jeden nebo více řádů velikosti. Fyzik ovšem má právo prohlásit, že jistá materiální struktura je fraktálním objektem v jistém intervalu velikosti. Toto upřesnění je ovšem nezbytné, jeho opomenutí by bylo profesionální chybou.

Například tvrdit bez takového upřesnění, že fraktální dimenze pobřeží Bretaně je 1,5, nemá žádný smysl. Stejně tak fraktální dimenze trajektorií částic pozorovaných Brownem je srovnatelná s přesnou dimenzí matematických brownovských trajektorií pouze v intervalu velikosti, který musí být upřesněn.

Fraktální dimenze tedy může být pro fyziku zajímavým nástrojem, ale pouze za předpokladu, že bude užívána jasně.

6. Závěry

Bohatství nových matematických nástrojů, rozličnost mocných prostředků vytvořených fyziky činí stále méně platnými určité filozofické protiklady mezi *Spojitým* a *Diskrétním.* Matematika a fyzika nejsou omezovány ani jedním z nich. Obě totiž zplodily potomstvo tak bohaté a tak spletité, že chtít načrtnout jeho rodokmen by bylo nesmyslné. V této své přednášce jsem kladl důraz na dvojici *složité systémy* a *pravděpodobnost*, jejichž studium je sice obtížné, ale slibné. Zajisté to nebude poslední větev, která vyroste na mohutném stromu *Matematiky* a *Fyziky.*

Již H. Poincaré říkal, když mluvil o fyzikálních zákonech své doby: *To, co nové výzkumy (o kvantech) zpochybňují, nejsou jen základní principy mechaniky. Jde o to, co se nám až do nynějška zdálo neoddělitelné od samotného pojmu přírodního zákona. Budeme ještě moci vyjadřovat tyto zákony pomocí diferenciálních rovnic?*

Wigner zašel nedávno ještě dále: *Není naše fyzika jen objasněním vytvořeným naším matematickým nástrojem? A nebyla by jiná matematická objasnění pro člověka zajímavější?*

Osobně bych na závěr dodal, že pokud matematika je zdrojem nástrojů, kterých fyzik s úspěchem využívá, není tomu tak právě proto, že naše pravidla dedukce jsou spojena s fyzikálně-chemickými zákony, které řídí náš mozek? Tento návrat k podstatě by učinil méně překvapivou zdánlivě zázračnou shodu mezi matematikou a fyzikou a mohl by objasnit otazníky o svobodě člověka.

Newton napsal: *Vše se děje, jako by v člověku byl jakýsi zdroj svobody.*

Jsme tento zdroj schopni odhalit, nebo je svoboda jen iluzí?

---

[1]) *Pozn. redakce:* Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924), slavný stockholmský matematik.