David Acheson

1089 a vše, co s tím souvisí. Moment překvapení v matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 1, 24–31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141206`

1089 a vše, co s tím souvisí. Moment překvapení v matematice

David Acheson, Oxford

Proč tolik lidí říká, že *nenávidí* matematiku? Pravda je taková, že mnohdy ani nevědí, co matematika je. Domnívám se, že matematici by tuto situaci mohli změnit například tím, že zprostředkují široké veřejnosti některé své myšlenky a ukáží, že mají ze své profese radost.

Jednou z cest, jak to udělat, je použít momentu *překvapení*, který matematické úlohy často doprovází. A příjemná překvapení má přece každý rád.

Trik s čísly

Já sám jsem svoje první matematické překvapení zažil v roce 1956, kdy mi bylo 10 let. V té době se mi líbily kouzelnické triky. Jednoho dne jsem narazil na „trik s čísly“ v článku nazvaném *Uncle Jack turns you into a Conjuror!*

Zvolte si libovolné trojciferné číslo tak, aby první a poslední číslice se lišily alespoň o dvě. Utvořte číslo, jehož cifry jsou v opačném pořadí, a odečtěte menší z těchto čísel od většího (např. $782 - 287 = 495$). Výsledek nyní sečtěte s číslem, jehož cifry jsou opět v opačném pořadí (v našem případě $495 + 594 = 1089$).

Pozoruhodné je, že výsledek vyjde *vždy* 1089.[1])

[1]) *Pozn. překladatele:* Abychom se o tomto tvrzení přesvědčili, stačí uvažovat cifry a, b, c takové, že $a \geqq c + 2$. Pak

$$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 100(a - c) - a + c = 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c).$$

Přičteme-li k tomuto výsledku číslo $100(10 - a + c) + 90 + (a - c - 1)$, dostaneme číslo $900 + 180 + 9 = 1089$.

David Acheson je vědeckým pracovníkem v matematice na Jesus College v Oxfordu. Tento článek je zkrácenou verzí jeho popularizační přednášky Londýnské matematické společnosti: *Matematika, kouzla a elektrická kytara*, kterou přednesl v roce 2003. Jeho kniha *1089 and all that* je originálním pokusem přiblížit některé matematické ideje a radost z matematiky široké veřejnosti. Další informace naleznete na stránkách: `www.jesus.ox.ac.uk/~dacheson`

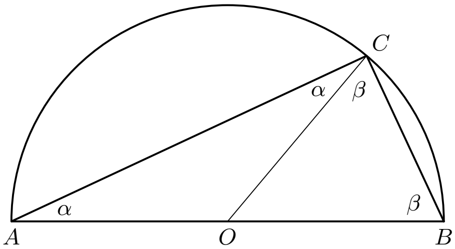
Z anglického originálu D. Acheson: *1089 and all that. The element of surprise in mathematics.* EMS Newsletter *49* (2003), Sept., 9–11, volně přeložil Michal Křížek za podpory grantu A 1019201. Překladatel děkuje Mgr. H. Holovské a RNDr. A. Šolcové za cenné připomínky.

Dnes samozřejmě vím, že tento trik s číslem 1089 je matematicky poněkud triviální a má relativně málo důsledků. Uvidíte-li jej ale poprvé jako desetileté dítě, doslova vás okouzlí.

Překvapující geometrie

O trochu později jsem zažil svoje první překvapení v geometrii. Jednoho dne nám bylo ve škole řečeno, že když označíme AB průměr kružnice a C libovolný bod na kružnici různý od A a B, pak úhel ACB je pravý. Pamatuji se, že jsem tomu nechtěl uvěřit. Zdálo se mi, že pohyb bodu C po kružnici musí způsobit změnu úhlu ACB, zejména v případě, když se bude přibližovat bodu A nebo B. Pak ale přišel důkaz, který mě doslova ohromil.

Nejprve spojme bod C se středem kružnice O. Potom $AO = BO = CO$. Tedy trojúhelník AOC je rovnoramenný a úhly označené α na obrázku 1 jsou shodné. Podobně zjistíme, že také trojúhelník BOC je rovnoramenný a úhly β jsou shodné. Součet úhlů v trojúhelníku ACB je 180°, tj. $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$. Tedy $\alpha + \beta = 90°$ a trojúhelník ACB je proto pravoúhlý.



Obr. 1. Důkaz Thaletovy věty.

Dodnes považuji tento důkaz za jeden z nejnázornějších a nejpřekvapivějších v celé matematice.

Velké omyly

Nezbytnost *důkazů* matematických tvrzení je možná jednou z hlavních potíží při komunikaci matematiků se širokou veřejností. Matematici jsou jimi až nepatřičně posedlí. Domnívám se, že je potřeba vysvětlit, proč jsou důkazy tak důležité. Bez důkazu totiž můžeme dostat nesprávné tvrzení. Dokonce i ti největší matematici se někdy mýlili.

Například v roce 1753 Euler (viz obr. 2) dokázal Velkou Fermatovu větu pro exponent $N = 3$. Jinými slovy dokázal, že neexistují přirozená čísla a, b a c taková, že

$$a^3 + b^3 = c^3;$$

tj. zjednodušeně řečeno, součet objemů dvou krychlí nikdy nedá objem jiné krychle (pokud délky jejich hran jsou přirozená čísla).

Obr. 2. Leonhard Euler (1707–1783).

Později vyslovil domněnku, že podobně není možné dostat čtvrtou mocninu jako součet tří čtvrtých mocnin a obecně není možné vyjádřit m-tou mocninu jako součet $m-1$ m-tých mocnin na množině přirozených čísel.

Téměř *dvě stě let* nikdo neviděl na tomto tvrzení nic špatného. Ve skutečnosti ani nikdo nebyl schopen toto tvrzení dokázat, a tak bylo stále opakováno a velmi ceněno i uznávanými autoritami.

Ale pak v roce 1966 L. J. Lander a T. R. Parkin našli protipříklad, kdy součet čtyř pátých mocnin dává pátou mocninu:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Dvacet let poté N. Elkies vyvrátil také případ $m = 4$:

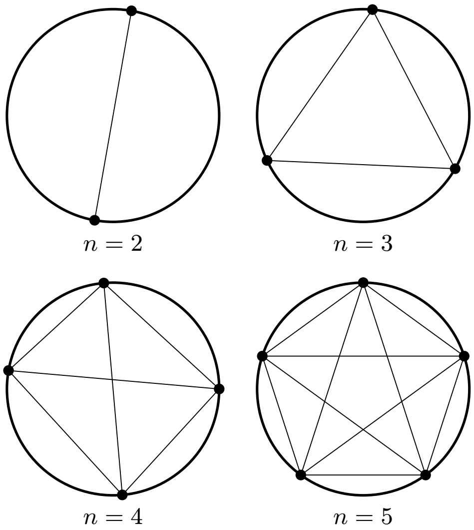
$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Pokoušet se v matematice *zobecňovat* na základě jednoho či dvou speciálních případů je zajisté vždy velice riskantní.[2]) Jedním z nejnázornějších příkladů, jaký znám, je tento zdánlivě nevinně vyhlížející jednoduchý geometrický problém.

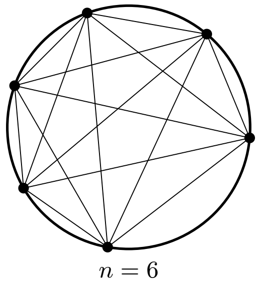
Uvažujme kruh a na jeho obvodu zvolme n vzájemně různých bodů. Spojme úsečkami každý z těchto bodů s každým. Spojnice nám rozdělí kruh na určitý počet částí a vzniká přirozená otázka: *Kolik jich je?* Přitom se předpokládá, že v žádném bodě se neprotínají více než dvě úsečky s výjimkou koncových bodů (viz obr. 3).

---

[2]) *Pozn. překladatele:* Srov. též např. PMFA *46* (2001), 179.



Obr. 3. Rozdělení kruhu na 2^{n-1} částí.



Obr. 4. Rozdělení kruhu na 31 částí.

Pro několik počátečních hodnot $n = 2, 3, 4, 5$ počet částí[3]) odpovídá velice jednoduchému pravidlu: 2, 4, 8, 16.

Podle mé zkušenosti je možno v tuto chvíli kohokoliv oklamat. Pro $n = 6$ bude tvrdit, že počet částí je 32. Bohužel tomu tak není.[4]) Je jich jen 31 (viz obr. 4).

Obecný vzorec pro počet částí tedy není 2^{n-1}. Je to $\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

Překvapivé souvislosti

Ta pravá překvapení ve vyšší matematice přicházejí někdy z naprosto nečekaných souvislostí mezi jejími různými obory. Například brzy poté, co jsme se naučili infini-

---

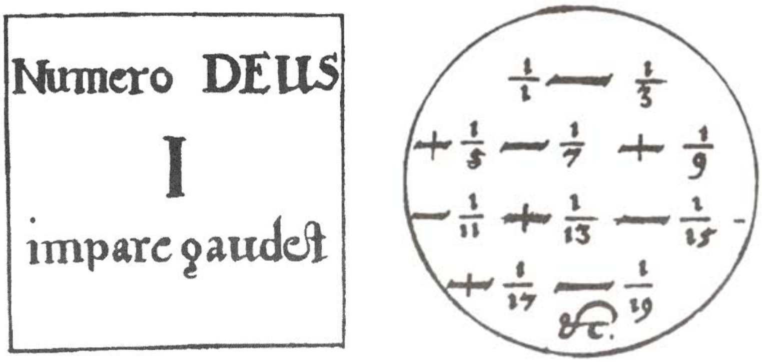
[3]) *Pozn. překladatele:* Pro $n = 1$ je počet částí 1, což rovněž odpovídá vzorci 2^{n-1}.

[4]) *Pozn. překladatele:* Velké množství podobných příkladů je uvedeno v článcích R. K. Guy: *The strong law of small numbers*, Amer. Math. Monthly *95* (1988), 697–712, a R. K. Guy: *The second strong law of small numbers*, Math. Mag. *63* (1990), 3–20. Z nich je patrné, jak nebezpečné je bez důkazu zobecňovat tvrzení, která platí pro několik speciálních případů.

tezimální počet, jsme se seznámili se známou Gregoryovou-Leibnizovou řadou

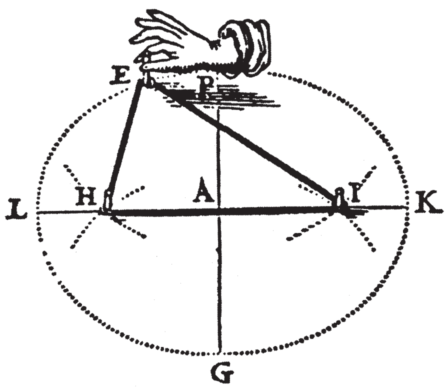
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Dokonce ani rigorózní důkaz podle mého názoru příliš nezmenšuje údiv a překvapení nad tímto pozoruhodným výsledkem. Když se poprvé setkáme s číslem π, vždy to nějak souvisí s kružnicemi. Dosud jsem však nenalezl nikoho, kdo by mi byl schopen vysvětlit souvislost mezi kružnicí (či kruhem) a řadou převrácených hodnot lichých čísel se střídajícími se znaménky (srov. obr. 5).



Obr. 5. Ilustrace z Leibnizova článku z roku 1674.

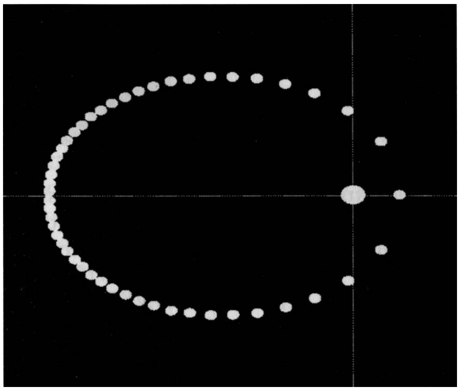
Překvapivé souvislosti najdeme někdy nejen uvnitř matematiky samotné, ale také mezi matematikou a skutečným světem. Například elipsa je křivka, která již byla dobře známa antickým matematikům. Lze ji zkonstruovat pomocí provazu upevněného mezi dvěma pevnými body. Tyto body, označené na obr. 6 písmeny H a I, se nazývají *ohniska.*[5])



Obr. 6. Elipsa z díla F. van Schootena: *Exercitationum mathematiorum* (1657).

[5]) *Pozn. překladatele:* Termín ohnisko (= focus) zavedl Johannes Kepler v Praze na počátku 17. století.

Na první pohled je to jen geometrie. Pokud ale opustíme svět čisté geometrie, může modelovat pohyb planety (nebo třeba komety) jako pohyb hmotného bodu. Budeme předpokládat platnost gravitačního zákona, v němž je síla působící mezi hmotným bodem a pevným Sluncem nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Vyřešením odpovídajících rovnic dostaneme nejen výsledek, že každá uzavřená dráha je eliptická (srov. obr. 7), ale i to, že Slunce *je vždy v jednom z ohnisek!*



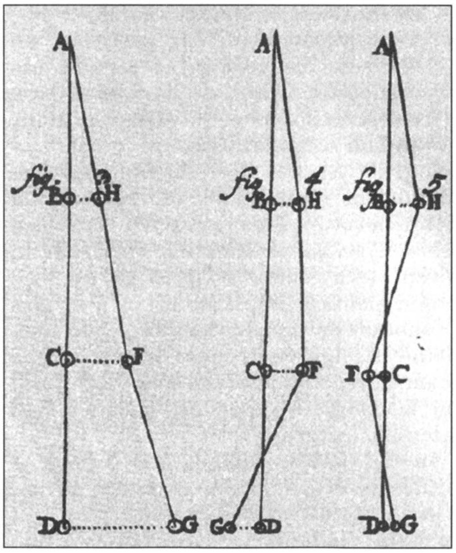
Obr. 7. Eliptická dráha planety.

Obdoba kouzla starých Indů s provazem

Mám za to, že největší matematické překvapení, které jsem kdy zažil, přišlo jednoho deštivého listopadového odpoledne v roce 1992, když jsem sám dokazoval jednu velice podivnou novou větu (viz [1, kap. 15]). Pokoušel jsem se o nové vysvětlení starého problému z dynamiky, který studoval Daniel Bernoulli (viz obr. 8) v roce 1738. Bernoulli uvažoval zavěšenou soustavu složenou z N kyvadel spojených postupně pod

Obr. 8. Daniel Bernoulli.

sebou pomocí kloubů. Objevil N různých typů oscilací (viz obr. 9 pro $N = 3$). Při prvním typu oscilace s frekvencí f_1 se všechna kyvadla houpají sem a tam současně, jako by se jednalo o jedno dlouhé kyvadlo, zatímco při nejvyšší frekvenci f_N se sousední kyvadla vychylují v opačných směrech v libovolném časovém okamžiku.



Obr. 9. Tři typy oscilací trojitého kyvadla z původního článku Daniela Bernoulliho z roku 1738.

Moje věta ukazovala, že je možné uvažovat opačně orientovanou soustavu N kyvadel, tj. převrácenou tak, že všechny tyče nejistě balancují jedna na druhé. Pak jsou stabilizovány v této labilní pozici pomocí pivota (tj. patní tyče s kloubovým uchycením) kmitajícího nahoru a dolů. Pokud je f_N^2 mnohem větší než f_1^2 (což je běžný případ), pak kritérium stability je

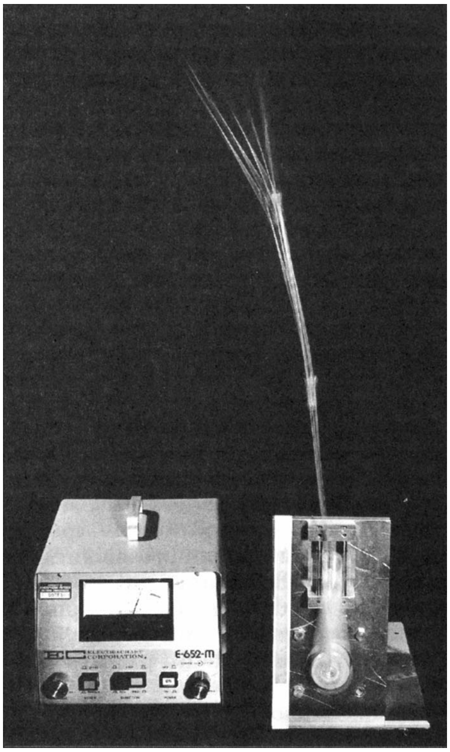
$$a < 0{,}0114 g/f_N^2 \quad \text{a} \quad a f_{\mathrm{p}} > g/(2\sqrt{2}\,\pi^2 f_1),$$

kde a označuje polovinu celkové vzdálenosti, na níž se pivot pohybuje nahoru a dolů, f_{p} je frekvence vibrací pivota a g je tíhové zrychlení.

V tomto případě tedy věta závisí velice jednoduše jen na dvou číslech f_1 a f_N, která charakterizují extrémní oscilace kyvadla. Závěr pak je, že „trik“ lze realizovat vždy, když pivot vibruje nepatrně nahoru a dolů dosti vysokou frekvencí.

Počítačové simulace naznačují, že takový vertikální stav může skutečně být velmi stabilní. Dospěli jsme k tomu, když můj kolega Tom Mullin potvrdil uvedenou větu experimentálně. Fotografie na obrázku 10 ukazuje padesáticentimetrové převrácené trojité kyvadlo s pivotem vibrujícím zhruba o 2 cm se 40 cykly za sekundu. Soustava kyvadel je zobrazena při kmitavém pohybu nahoru a dolů za dosti omezujících počátečních podmínek.

Jakmile jsme začali nazývat svoje přednášky „O tricích podobajících se kouzlu starých Indů s provazem“, začaly se o nás zajímat noviny, rozhlas i televize a já jsem se tím bavil po řadu let. Moje vědecké práce na toto téma byly dokonce zařazeny do



Obr. 10. Vibrace převráceného trojitého kyvadla.

Obr. 11. Starý indický trik s provazem.

archivů Kouzelnického kroužku v Londýně, což by jistě v roce 1956 ohromilo jistého desetiletého chlapce. (Články jsou uloženy, pokud je mi známo, v krabici nazvané *Sundry Ephemera*).

Není podstatné, zda matematika je nebo není schopna vysvětlit speciální kouzelnický trik (viz obr. 11). Určitě ale záleží na výsledku, jenž může pomoci přesvědčit širokou veřejnost o tom, že matematika ve své nejlepší podobě má i jisté osobní kouzlo.

Literatura

[1] Acheson, D.: *1089 and all that: A journey into mathematics.* Oxford University Press 2002.