Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Horák

Soudobé problémy matematické teorie klimatu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 3, 188--194

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141357`

Soudobé problémy matematické teorie klimatu

Jiří Horák, Praha

V poslední době pozorujeme zvýšený zájem odborné i laické veřejnosti o otázky klimatu, především spojené s jeho možnými změnami vedoucími až ke „klimatickým katastrofám". V řadách fyziků i matematiků vznikají různé scénáře, které by měly tento proces kvantifikovat. Mezi nimi přední místo náleží matematické teorii klimatu, která je spojovacím článkem mezi statistickou teorií klimatu, jeho fyzikální teorií, hydrodynamickou teorií klimatu a numerickým modelováním klimatického systému. V prvním případě je cílem popis klimatu soudobými statistickými metodami, předmětem fyzikální teorie je studium fyzikálních procesů odpovědných za formování klimatu, v hydrodynamické teorii klimatu zkoumáme lineární a nelineární procesy v klimatickém systému. Numerické modelování je zaměřeno na předpovědi klimatických změn při působení vnějších perturbací atmosféry. Ostatně to je nosným tématem i matematické teorie klimatu, orientované na vyhledání operátoru odezvy klimatického systému na vnější vzruchy. Podnět k napsání tohoto příspěvku vzešel z našich studií [1 až 4] uveřejněných na stránkách PMFA a také z práce [5]. V těchto článcích i v tomto pojednání neuvažujeme složky klimatického systému související s jeho vnitřní dynamikou, např. dynamikou oceánů či vztahů mezi atmosférou a oceánem. O tomto vztahu může zájemce získat základní informace např. v kapitole 9 monografie Dymnikova a Filatova *Mathematics of Climate modeling*, Birkhäuser 1997, kde je uvedena další literatura. Uvádíme, že podle názorů předních specialistů pracujících v geofyzikální hydrodynamice je interakce mezi oceánem a atmosférou stále velmi obtížně matematicky zvládnutelná.

Matematicky vychází teorie klimatu z teorie dynamických systémů (kvalitativní dynamiky) a z ergodické teorie těchto systémů. Zajímáme se o zákony chování trajektorií klimatického systému prostředky kvalitativní teorie diferenciálních rovnic a hledáme globální geometrický obraz trajektorií pole definovaného rovnicemi. Ne všechny tyto myšlenky jsou nové, některé z nich lze vystopovat již u Poincarého. Co však je nové, je jejich ucelená syntéza, umožňující principiálně nový přístup ke studiu dějů probíhajících v atmosféře. Právě zde se jeví použití teorie dynamických systémů jako velice zajímavé a perspektivní. Nicméně nelze zastírat, že aplikace této teorie přináší i některé problémy, které zde budeme jmenovat a jež vyžadují podrobnější zkoumání.

Vyjdeme z předpokladu, že evoluce klimatického systému je determinovaná (postačí, budeme-li tento pojem chápat intuitivně) a je popsána jistým systémem nelineárních

---

RNDr. Jiří Horák, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II/1401, 141 31 Praha 4.

parciálních diferenciálních rovnic, který zapíšeme ve formálním tvaru

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = F(\varphi, \lambda, f), \quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi \in \Psi. \tag{1}$$

Zde je φ vektorová funkce z nekonečnědimenzionálního fázového prostoru Ψ, λ a f jsou vektory parametrů a vnějšího působení na systém. O funkci φ předpokládáme, že je dostatečně hladká. Tento předpoklad je ve většině případů přijatelný, neboť je pouze matematickým vyjádřením faktu, že fyzikální veličiny bývají spojité.

Prvním problémem je řešitelnost systému (1), kde je třeba dokázat jednoznačné řešení úlohy (1) na libovolném konečném časovém úseku. Přestože se již dříve podařilo dokázat teorémy o řešitelnosti řady geofyzikálních systémů, použité metody nelze aplikovat na modely všeobecné cirkulace atmosféry. Důkaz existence a jednoznačnosti se podařil až po zavedení doplňkové disipace vysokého řádu na pravou stranu rovnice (1) (viz [6]).

Přejděme k otázce existence atraktoru systému (1)[1]). Jestliže počáteční stavy systému leží na atraktoru, trajektorie z nich vycházející jsou také prvky této invariantní kompaktní množiny. Všechny ostatní trajektorie budou pro velká t (zejména tento případ je pro nás zajímavý) na atraktoru kumulující. Protože atraktor je kompaktní množina, existuje na něm invariantní míra. To znamená, že míra množiny stavů systému se nemění působením jeho dynamiky a vystředování podle míry nezávisí na čase. Pro ergodický systém je to jediná míra na atraktoru. Tehdy je výsledek vystředování podle trajektorie shodný s výsledkem vystředování podle invariantní míry. Závěr je nasnadě: existence atraktoru systému (1) je důležitým faktem pro analýzu jeho „klimatických“ vlastností.

Byly provedeny důkazy teorémů o existenci atraktorů pro zjednodušené modely všeobecné cirkulace atmosféry [6]. Těžkosti spojené s důkazy existence atraktorů u současných modelů spočívají v tom, že modely, s nimiž jsem se až dosud setkával, nejsou (při platnosti zákona zachování hmoty) disipativními systémy. Zákon zachování energie (za nepřítomnosti vnějšího ohřevu a disipace) není kvadratickou formou, pokud platí zákon zachování potenciálové teploty. Tato teplota zůstává konstantní při adiabatických dějích v suchém vzduchu, tzn. že je stálou vlastností vazké hmoty, pokud nedochází k fázovým změnám vody. To naznačuje, že je třeba dokázat existenci atraktoru na hladině konstantní hmotnosti, která poté je parametrem úlohy. Situace kolem atraktoru se tak značně komplikuje. Jistého pokroku bylo dosaženo pro jednodimenzionální rovnice vazké stlačitelné tekutiny, kde se podařilo formulovat podmínky,

---

[1]) Připomeňme si definici atraktoru. Je-li U otevřená podmnožina fázového prostoru M, řekneme, že $A \subset U$ je *atraktor* s fundamentálním okolím U, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \supset A$ je $f^t U \subset V$ (f^t je evoluční operátor zobrazující fázový prostor M do M) pro dosti velká t; $f^t A = A$ pro všechna t. Množinu všech stavů, které pro dosti velké t přejdou do fundamentálního okolí U, tj. množinu $\bigcup\limits_{t>0} f^t U$, nazveme *oblastí vlivu* atraktoru A. Je-li oblast vlivu A celý prostor M, řekneme, že A je *univerzální atraktor.* Jestliže U je otevřená podmnožina fázového prostoru M a uzávěry množiny $f^t U$ jsou kompaktní pro dosti velké t v U, pak množina $A = \bigcup\limits_{t>0} f^t U$ je kompaktní atrahující množina s fundamentálním okolím U.

za nichž je atraktor pevný bod. Dodejme, že platí teorémy o existenci atraktoru pro barotropní a dvojsložkovou atmosféru při geostrofické aproximaci, tj. za předpokladu, že pohyb v atmosféře lze nahradit horizontálním pohybem.

Dalším úkolem je odhad dimenze atraktoru, a to za předpokladu, že je dokázán teorém o jeho existenci. Bude-li kompaktní množinou, atraktor je „skoro-dimenzionální“ v tom smyslu, že pro libovolné malé $\varepsilon > 0$ lze atraktor projektovat na množinu konečné dimenze a norma projektoru (operátoru projekce) se nebude lišit od jednotky více než o ε. Pro mnohé modely atmosféry se podařilo prokázat konečnou dimenzi atraktorů a odhadnout jejich dimenzi. Máme na mysli barotropní a dvojsložkový baroklinní model atmosféry a také některé zjednodušené modely všeobecné cirkulace atmosféry. Nebuďme však přílišnými optimisty; odhady jsou vesměs nadhodnoceny, protože je použitý postup fakticky založen na energetických vztazích a nepřihlíží k pravým stranám systému (1). Uváděné odhady jsou jen dokladem toho, že atraktor je konečnědimenzionální. Výjimku tvoří výpočty dimenze atraktoru jednoduchých modelů atmosféry typu rovnic barotropní atmosféry a dvojvrstvého baroklinního modelu. V těchto případech se uplatní vztah mezi globálními Ljapunovovými exponenty a dimenzí atraktoru.

Přistupme k úloze o stabilitě atraktoru jako množiny při perturbaci parametrů úlohy. Uvědomme si, že hlavním předmětem matematické teorie klimatu je studium charakteristik klimatických modelů s velkou periodou a jejich citlivost na vnější vzruchy. Protože všechny trajektorie systému budou dříve či později ležet na atraktoru systému, jsou právě tyto charakteristiky zároveň charakteristikami atraktoru systému, tj. množiny, k níž směřuje vývoj klimatického systému, a také invariantní míry definované na této množině. Odtud je zřejmé, že vyšetřování stability atraktoru systému jako množiny a její invariantní míry s ohledem na vnější perturbace je jednou z hlavních úloh matematické teorie klimatu. Obraťme pozornost k systému (1), jehož řešení zapíšeme ve tvaru

$$\varphi = S_\lambda(t)\varphi(0),$$

kde je $S_\lambda(t)$ operátor úlohy závisející na vektoru parametrů λ [7]. Nechť množina přípustných hodnot parametrů tvoří jistý metrický kompakt a budiž λ_0 nějaký jeho vnitřní bod. Požadujme, aby pro všechny hodnoty parametrů blízkých k hodnotě λ_0 měl systém atraktor A_λ. Pro různá λ mohou být i atraktory od sebe různé. Podle [7] platí: Jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existují $T > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ dostáváme $|S_\lambda(T) - S_{\lambda_0}(T)| < \varepsilon$, poté $A_\lambda \to A_{\lambda_0}$ pro $\lambda \to \lambda_0$. Konvergenci zde chápeme v slabém smyslu a $A_\lambda \to A_{\lambda_0}$ značí, že pro $\lambda \to \lambda_0$ atraktor perturbovaného systému A_λ leží v libovolně malém okolí množiny A_{λ_0}. Nelze však zaručit, že množiny A_λ a A_{λ_0} budou mít stejnou strukturu. Konvergenci A_λ k množině A_{λ_0} (s hausdorffovskou metrikou) nelze zaručit pro libovolné hodnoty parametrů, ale jen pro $\lambda_0 \in \Lambda \subset \overline{\Lambda}$, kde je Λ soubor parametrů a $\overline{\Lambda}$ jeho uzávěr (Λ je husté v $\overline{\Lambda}$). Jinak řečeno, vlastnost spojité závislosti atraktoru systému (1) na parametru λ je splněna nikoliv v bodě λ_0, ale jen pro nějaký bod libovolně blízký k λ_0. Je zřejmé, že odhad $|S_\lambda(T) - S_{\lambda_0}(T)| < \varepsilon$ platí tehdy, jestliže byl pro systém (1) dokázán teorém o korektnosti řešení a spojité závislosti řešení na parametrech. Otázka o korektnosti daného problému je, velmi zhruba řečeno, otázka, zda se „málo“ změní řešení, změní-li se „málo“ počáteční, resp.

okrajové podmínky. Abychom mohli zaručit spojitou závislost atraktoru na parametru v libovolném bodě λ_0, je nutné, aby uvedený odhad platil pro $T > \omega(\lambda, \varepsilon)$, kde $\omega(\lambda, \varepsilon)$ je čas, v jehož průběhu dojde k atrahování ε-okolím atraktoru A_λ. K tomu je třeba říci, že pokud je veličina ω ohraničena konstantou (nezávisející na ε a λ), platí spojitá závislost atraktoru na parametru úlohy ve vnitřním bodě intervalu λ_0.

Přejděme ke konečnědimenzionálním aproximacím modelů atmosféry a klimatu a jejich atraktorům. Při každé takové aproximaci (přechod od nekonečnědimenzionálního systému rovnic termodynamiky lze provést například Galerkinovou metodou) je třeba přihlédnout k tomu, že regulární části operátoru výchozí úlohy bez disipace a vnějšího působení přísluší celý soubor zákonů zachování. Z fyzikálního pohledu jsou mnohé takové invarianty velice důležité pro formování různých charakteristik atmosférické cirkulace. Tak například zachování enstrofie a energie v dvojdimenzionální aproximaci formuje rozdělení energie v inerciálním intervalu spektra turbulence (v tomto intervalu působí jen síly setrvačnosti). Proto číselná schémata získaná aproximací musí alespoň přibližně zachovat invarianty systému. Z matematického hlediska právě přítomnost kvadratických zákonů zachování pro regulární část konečnědimenzionálního modelu při pozitivní definitnosti operátoru popisujícího disipaci umožňuje triviální důkaz existence atraktoru konečnědimenzionálního systému. Složitou úlohou je i důkaz konvergence invariantní míry konečnědimenzionální aproximace k invariantní míře původního systému. V tomto směru nemáme k dispozici žádné informace.

Zabývejme se nyní typickou konečnědimenzionální aproximací klimatického systému (1), který považujeme za určitý model cirkulace atmosféry, a předpokládejme, že jsme úspěšně vyřešili všechny dosud vyjmenované úlohy. Vyjděme z rovnice

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi) + f, \quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

v níž je φ vektor stavu systému tvořen souborem spektrálních koeficientů polí teploty, rychlosti větru a podobně, N je jeho dimenze (rovněž dimenze fázového prostoru), $F(\varphi)$ jistý nelineární operátor a f vnější perturbace působící na systém. Budeme požadovat, aby systém (2) měl atraktor A s ergodickou invariantní mírou μ soustředěnou na atraktoru. Tím je dána možnost vypočítat statistické charakteristiky systému (momenty apod.) vystředováním podle této míry. Víme, že typický atraktor modelu atmosféry má složitou fraktální strukturu s dimenzí menší, než je dimenze fázového prostoru. Kromě toho jsou trajektorie takových modelů nestabilní ve smyslu Ljapunova, takže podél některého směru, který odpovídá kladným Ljapunovovým exponentům, dochází k růstu k-dimenzionální části fázového objemu a dimenze atraktoru nemůže být menší než k. Tento atraktor leží uvnitř ohraničené absorbující množiny, a proto je atraktor fraktální množinou systému o dimenzi r ($k \leqq r \leqq N$), vloženou do absorbující množiny systému. Dimenze atraktoru r je vesměs velká, viz [5]. Vyjdeme-li ze zápisu (2), pro střední stav a rozptyl systému dostáváme

$$\overline{\varphi} = \int_A \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad D\varphi = \int_A (\varphi - \overline{\varphi})^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že platí

$$\overline{\varphi} = 0, \quad D\varphi = \int_A \varphi^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Zároveň se systémem (2) nás zajímá perturbovaný systém s doplňujícím členem δf:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = F(\varphi') + f + \delta f, \quad \varphi'\big|_{t=0} = \varphi'_0, \quad \varphi' \in \mathbb{R}^N.$$

Takový systém má svůj vlastní atraktor A' (obecně se neshoduje s A) a invariantní míru μ' soustředěnou na A'. Tehdy bude

$$\varphi' = \int_{A'} \varphi' \,\mathrm{d}\mu', \quad D\varphi' = \int_{A'} (\varphi' - \overline{\varphi}')^2 \,\mathrm{d}\mu'$$

a změny středního stavu a disperze systému jsou dány vztahy

$$\delta\overline{\varphi} = \int_{A'} \varphi' \,\mathrm{d}\mu' - \overline{\varphi} = \int_{A'} \varphi' \,\mathrm{d}\mu' = U(\delta f),$$
$$\delta D\varphi = \int_{A'} (\varphi' - \overline{\varphi}')^2 \,\mathrm{d}\mu' - \int_{A} \varphi^2 \,\mathrm{d}\mu' = V(\delta f).$$

Zde jsou U a V jisté operátory (možná nelineární), spojující změny vnější perturbace s proměnami středního stavu a disipace systému. Z pohledu fyzika se jako logický jeví předpoklad, že při malých změnách vnějšího působení na systém bude závislost střední hodnoty a disipace na těchto změnách vyjádřena hladkou funkcí a operátory U a V budou lineární. V reálných atmosférických systémech však takový předpoklad nemusí platit. Příčinou je fraktální struktura klimatického atraktoru se soustředěnou hustotou invariantní míry a není zřejmé, jak při existenci míry na tomto atraktoru lze derivovat její momenty. Také nám není známo, je-li invariantní míra stabilní. Co však víme, je, že hladká závislost invariantní míry a všech jejích momentů na parametrech úlohy platí pro hyperbolické chaotické systémy [8]. Pro nalezení operátoru odezvy je proto třeba se rozhodnout, zda máme „upravit“ výchozí systém tak, aby se míra na jeho atraktoru chovala „rozumně“, nebo formálně přihlédnout k teorii chaotických hyperbolických systémů s nadějí, že můžeme momenty míry výchozího systému derivovat podle jeho parametrů. Přikloníme se zde k druhé možnosti a pak lze invariantní míru aproximovat pomocí periodických trajektorií (orbit) tohoto systému [7]. Otázka, zda můžeme touto cestou získané výsledky zobecnit na systémy s nenulovými Ljapunovovými exponenty, zůstává otevřená.

Předpokládejme, že výchozí systém má po aproximaci tvar

$$\varphi(k) = S(k)\big(\varphi(0)\big),$$

kde je S nelineární operátor diskrétního systému závisející na kroku aproximace prováděné v čase a k je číslo kroku. Nechť je $S(S_p^n)$ soubor všech periodických řešení (orbit) perturbovaného systému. Index n představuje periodu orbity a index $p = 1, 2, \dots, P$ očíslovává orbity se stejnou periodou n (P je jejich počet). Střední hodnota jisté funkce $F(\varphi)$ je podle [7] dána vztahem

$$\overline{F} = \int F(\varphi) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{p=1}^{P} a_p^n \overline{F}_{np}}{\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{p=1}^{P} a_p^n}\,.$$

V tomto vyjádření je $\overline{F}_{np}$ střední hodnota funkce F na periodickém řešení s periodou n a s číslem p. Váhová funkce a_p^n představuje míru nestability daného řešení. Platí

$$a_p^n = \frac{n}{\exp \sum_i \lambda_+^i}\,,$$

kde $\exp\bigl(\sum_i \lambda_+^i\bigr)$ je součin všech nestabilních (větších než 1) multiplikátorů $\exp(\lambda_+^i)$ daného periodického řešení. Pro dostatečně velká N dostáváme

$$\overline{\varphi} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{p=1}^{P} a_p^n \overline{\varphi_{np}}}{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{p=1}^{P} a_p^n}\,;$$

$\overline{\varphi_{np}}$ je střední hodnota vypočítaná pro odpovídající periodické řešení, tj.

$$\overline{\varphi_{np}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S^i\bigl(\varphi(0)\bigr).$$

Funkce $\varphi(0)$ přísluší orbitě s indexem np. Připusťme, že pravá strana systému je perturbována malou vnější akcí δf. Pro střední stav systému máme

$$\overline{\varphi^1} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{p=1}^{P} a_p^{1n} \overline{\varphi_{np}^1}}{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{p=1}^{P} a_p^{1n}}\,,$$

či s přesností až na malé veličiny prvního řádu $\delta\overline{\varphi} = U\delta f$.

Pro operátor U tak získáme formální vyjádření tvaru

$$U = \frac{1}{A^2}\left(\sum_{np}(A\overline{\varphi}_{np})\frac{\partial}{\partial \delta f_i}\, a_p^n + A a_p^n \frac{\partial}{\partial \delta f_i}\,\overline{\varphi}_{np} - a_p^n \overline{\varphi}_{np}\sum_{mk}\frac{\partial}{\partial \delta f_i}\, a_k^m\right), \tag{3}$$

v němž $A = \sum\limits_{np} a_p^n$. Analogický vztah lze získat i pro druhé momenty systému.

Abychom mohli výraz (3) numericky aproximovat, je třeba znát dostatečný počet periodických trajektorií systému a rozhodnout o jejich citlivosti na malé změny pravé strany systému. Také je nezbytné určit operátory odezvy středních hodnot $\overline{\varphi}_{np}$ a multiplikátorů $\exp(\lambda_+^i)$ pro každé nalezené periodické řešení. Tak získáme vztah pro operátor odezvy středního stavu systému. Můžeme namítnout, že metoda založená na teorii chaotických dynamických systémů je těžkopádná, posuzujeme-li ji z hlediska numerické analýzy. Nicméně podařilo se ji úspěšně realizovat pro některé jednodušší modely atmosférických systémů včetně barotropního modelu oceánu [7]. Její předností je, že neoperuje s předpokladem o gaussovském rozdělení pravděpodobnosti v modelech všeobecné cirkulace atmosféry, který tvoří základ metody konstrukce operátoru odezvy, založené na fluktuačním disipativním vztahu [7]. Tento vztah spojuje operátor odezvy systému na malé vnější perturbace se statistickými charakteristikami. V adekvátních modelech všeobecné cirkulace atmosféry je rozdělovací funkce velmi přibližně gaussovská (v disperzních úlohách se setkáváme se statistickými momenty vyšších řádů, které při gaussovském rozdělení nabývají nulových hodnot). Nedostatek metody „periodických trajektorií“ vidíme v tom, že vyžaduje znalost operátoru úlohy. Nutno podotknout, že v řadě prací se setkáváme s jiným vyjádřením váhových funkcí a_p^n. Jmenujme zde studii [9], kde

$$a_p^n = \frac{n}{\sum_i \lambda_+^i}\,.$$

Při této volbě však nelze zaručit konvergenci v (3) pro $N \to \infty$. Ta platí jen pro konečná N, tj. pro konečný počet periodických řešení, v každém případě pro uvažovaný konkrétní model.

Nyní již můžeme přikročit k závěrečnému shrnutí výsledků. Je zřejmé, že konečná verze teorie citlivosti pro modely klimatu stále čeká na dokončení. To podstatné, co dnes víme, je, že podle numerických experimentů provedených s modely všeobecné cirkulace atmosféry již lze odezvu modelu dobře aproximovat lineárním operátorem. Navíc po aplikaci fluktuační disipativní relace, která říká, že odezva systému na malou pulzní perturbaci je analogická reakci na přirozenou fluktuaci, postačí k získávání tohoto operátoru znalost statistické charakteristiky středního stavu modelu. Také se ukazuje, že takový operátor lze nalézt analýzou experimentálních dat reálného klimatického systému. To nám umožňuje vytipovat vnější perturbaci, která vybudí největší změny středního stavu, a identifikovat klimatické modely s ohledem na jejich citlivost.

Literatura

[1] Horák, J.: *Klima, objekt matematického zkoumání (1. část).* PMFA *46* (2001), 313–327.

[2] Horák, J.: *Klima, objekt matematického zkoumání (2. část).* PMFA *47* (2002), 56–70.

[3] Horák, J.: *O jedné formě skryté symetrie chaotických stavů atmosférických procesů.* PMFA *48* (2003), 315–325.

[4] Horák, J.: *K problému odezvy atmosféry na malé vnější perturbace.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *49* (2004), 45–52.

[5] Horák, J., Krlín, L., Raidl, A.: *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace.* Academia, Praha 2003, 437 s.

[6] Lions, J. L., Temam, R., Wang, S.: *New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications.* Nonlinearity *5* (1992), 237–288.

[7] Dymnikov, V. P., Gricun, A. S.: *Sovremennye problemy matematičeskoj teorii klimata.* Fizika atmosfery i okeana *41* (2005), 294–314.

[8] Horák, J., Krlín, L.: *Deterministický chaos a matematické modely turbulence.* Academia, Praha 1996, 444 s.

[9] Kazantsev, E.: *Sensitivity of the attractor of the barotropic ocean model to external influences: approach by unstable periodic orbits.* Nonlinear Proc. Geophys. *8* (2001), 281–300.