Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Emil Vitásek
Metoda přesunu okrajových podmínek

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 3, 231–237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141362

Metoda přesunu okrajových podmínek

Emil Vitásek, Praha

1. Úvod

Metoda přesunu okrajových podmínek je přes svou elementárnost až překvapivě efektivní při řešení praktických i teoretických problémů spojených s problematikou řešení velmi obecných okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice. Je jen škoda, že tato metodika je poměrně málo rozšířena. Snad to lze vysvětlit tím, že originální obsáhlá práce na toto téma byla publikována v dost těžko dostupné, a proto i málo rozšířené publikaci [1].

Pro objasnění základní myšlenky tohoto postupu uvažujme velice jednoduchý příklad dvoubodové okrajové úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Dvoubodovou okrajovou úlohou budeme v tuto chvíli rozumět pro určitost úlohu nalézt funkci, která v intervalu $[a, b]$ splňuje danou diferenciální rovnici a pro niž je v koncových bodech tohoto intervalu předepsána lineární kombinace její hodnoty a hodnoty její první derivace. Už v elementárních kurzech o obyčejných diferenciálních rovnicích se ukazuje, že obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu závisí na dvou konstantách. Okrajové podmínky nám pak dají pro tyto konstanty dvě rovnice, a mají-li tyto rovnice řešení, eventuálně jediné řešení, má i vyšetřovaná okrajová úloha řešení, popřípadě jediné řešení. Uvažujme nyní množinu řešení naší diferenciální rovnice, která splňují pouze *jednu* z okrajových podmínek. Tato podmínka vytváří vazbu mezi konstantami, na nichž závisí obecné řešení, a uvažovaná množina řešení bude tak záviset pouze na *jedné* konstantě. Vyloučíme-li derivováním tuto konstantu, je víceméně zřejmé, že každé řešení naší diferenciální rovnice bude splňovat v každém bodě daného intervalu diferenciální rovnici *prvního* řádu, která bude vzhledem k linearitě vyšetřované rovnice patrně také lineární. Řešení dané diferenciální rovnice splňující pouze jednu z okrajových podmínek bude tedy splňovat okrajovou podmínku stejného typu v *libovolném* bodě uvažovaného intervalu. Danou okrajovou podmínku jsme tedy *přesunuli* do *libovolného* bodu daného intervalu.

V následujícím odstavci ukážeme na příkladě dvoubodové okrajové úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu, že tato velice prostá úvaha vede k očekávanému cíli. Ve 3. odstavci pak naznačíme, jak lze tento postup zobecnit na podstatně obecnější okrajové úlohy pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

RNDr. Emil Vitásek, CSc. (1931), Matematický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: vitas@math.cas.cz

Výzkum byl podpořen AV ČR, výzkumný záměr č. AV0Z10190503.

2. Diferenciální rovnice druhého řádu

Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$-\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

s lineárními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\alpha_1 p(a)y'(a) + \beta_1 y(a) &= \gamma_1,\\ \alpha_2 p(b)y'(b) + \beta_2 y(b) &= \gamma_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde p, p', q a f jsou spojité funkce a p splňuje nerovnost

$$p(x) \geqq p_0 > 0, \quad x \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Metoda přesunu okrajové podmínky je v případě této okrajové úlohy založena na následujícím jednoduchém tvrzení, které se dokáže velmi snadno.

Lemma 2.1. *Nechť funkce y splňuje v intervalu $[\xi_1, \xi_2]$ diferenciální rovnici* (2.1). *Nechť kromě toho v nějakém bodě $\xi_0 \in [\xi_1, \xi_2]$ platí*

$$\alpha p(\xi_0)y'(\xi_0) + \beta y(\xi_0) = \gamma. \tag{2.4}$$

Nechť konečně funkce z je v intervalu $[\xi_1, \xi_2]$ řešením diferenciální rovnice

$$-\big(p(x)z'\big)' + q(x)z = 0 \tag{2.5}$$

s počátečními podmínkami

$$z(\xi_0) = -\alpha, \quad p(\xi_0)z'(\xi_0) = \beta \tag{2.6}$$

a funkce c je řešením diferenciální rovnice

$$c' = fz \tag{2.7}$$

s počáteční podmínkou

$$c(\xi_0) = \gamma. \tag{2.8}$$

Pak pro každé $x \in [\xi_1, \xi_2]$ platí

$$-z(x)p(x)y'(x) + p(x)z'(x)y(x) = c(x). \tag{2.9}$$

Toto lemma je matematickým vyjádřením toho, co jsme naznačili v úvodu. Množina řešení diferenciální rovnice (2.1), která splňují navíc lineární podmínku typu (2.4), je popsána diferenciální rovnicí prvního řádu, jak jsme očekávali. Na rovnici (2.9) se lze tedy dívat jako na výsledek *přesunu podmínky* (2.4) z bodu ξ_0 do libovolného bodu intervalu $[\xi_1, \xi_2]$. Podtrhněme jako velmi důležitou skutečnost, že všechny koeficienty v přesunuté podmínce se určí řešením úloh s *počátečními* podmínkami.

Lemma 2.1 nabízí postup řešení okrajové úlohy (2.1), (2.2): Každou z podmínek (2.2) přesuneme do téhož bodu intervalu $[a, b]$. Dostaneme tak dvě rovnice, které svazují lineárně hodnotu hledané funkce s hodnotou její derivace v témž bodě. Z těchto rovnic můžeme, alespoň za vhodných předpokladů, vypočíst funkční hodnotu a hodnotu první derivace, a tak získat počáteční podmínky pro rovnici (2.1).

V následující větě zformulujeme základní vlastnosti právě popsané metody.

Věta 2.1. *Nechť jsou splněny rovnice* (2.2). *Nechť dále funkce z, resp. $\hat{z}$ jsou řešením diferenciální rovnice* (2.1) *s počátečními podmínkami*

$$z(a) = \alpha_1, \quad p(a)z'(a) = \beta_1, \tag{2.10}$$

resp.

$$\hat{z}(b) = -\alpha_2, \quad p(b)\hat{z}'(b) = \beta_2 \tag{2.11}$$

a funkce c, resp. $\hat{c}$ je řešením diferenciální rovnice

$$c' = fz, \tag{2.12}$$

resp. diferenciální rovnice

$$\hat{c}' = f\hat{z} \tag{2.13}$$

s počáteční podmínkou

$$c(a) = \gamma_1, \tag{2.14}$$

resp.

$$\hat{c}(b) = \gamma_2. \tag{2.15}$$

Pak lze pro každé $x_0 \in [a,b]$ sestavit soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} p(x_0)z'(x_0), & -p(x_0)z(x_0) \\ p(x_0)\hat{z}'(x_0), & -p(x_0)\hat{z}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(x_0) \\ \hat{c}(x_0) \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

pro niž platí: Má-li okrajová úloha (2.1)–(2.2) *řešení y, je vektor $\big(y(x_0), y'(x_0)\big)^\top$ řešením soustavy* (2.16), *a naopak má-li soustava* (2.16) *řešení $(k_1, k_2)^\top$, je funkce y, kterou získáme řešením diferenciální rovnice* (2.1) *s počátečními podmínkami $y(x_0) = k_1$, $y'(x_0) = k_2$, řešením okrajové úlohy* (2.1)–(2.2). *Má-li okrajová úloha* (2.1)–(2.2) *jediné řešení, má i soustava* (2.16) *jediné řešení a naopak.*

Z věty 2.1 plyne, že řešitelnost okrajové úlohy (2.1)–(2.2) a řešitelnost soustavy (2.16) jsou úlohy ekvivalentní.

Z hlediska získání metody pro řešení okrajové úlohy (2.1)–(2.2) lze interpretovat právě dokázanou větu dvojím způsobem. Přesunem obou okrajových podmínek do téhož bodu intervalu $[a,b]$ získáme pro hledanou funkci počáteční podmínky. Hodnotu hledaného řešení v libovolném bodě intervalu $[a,b]$ pak vypočteme řešením původní diferenciální rovnice. Tento postup jsme také měli až dosud na mysli. Pokud však povaha řešeného problému je taková, že nás řešení zajímá jen v jednom nebo několika málo bodech intervalu $[a,b]$, může být výhodnější (tj. ekonomičtější) takový postup, že žádanou hodnotu nebo hodnoty vypočteme přímo ze soustavy (2.16). Řešení původní diferenciální rovnice pak odpadá. I tuto variantu nazveme metodou přesunu.

Upozorněme ještě, že při řešení okrajové úlohy (2.1)–(2.2) metodou přesunu okrajových podmínek založeném na větě 2.1 se předem nemusíme starat o její řešitelnost. Soustavu (2.16) lze sestavit vždy, a má-li řešení, nalezneme též řešení původní okrajové úlohy. Nemá-li soustava (2.16) řešení, nemá ani okrajová úloha (2.1)–(2.2) řešení. Tato skutečnost také umožní nalézt elementárně podmínky, za kterých je úloha (2.1)–(2.2) řešitelná při libovolných γ_1 a γ_2. Stačí jen nalézt podmínky řešitelnosti jednoduché algebraické soustavy o dvou neznámých. Myšlenka přesunu okrajové podmínky může tedy také podstatně zjednodušit vyšetřování otázek spojených s existencí řešení okrajových úloh.

Vraťme se ještě na chvíli k numerické problematice spojené s metodou přesunu okrajové podmínky. Je jistě užitečné, že se nám povedlo převést řešení okrajové úlohy na řešení úloh s počátečními podmínkami, pro něž je k dispozici široce propracovaný software. Je však ale poctivé upozornit na některé další problémy, které zde mohou vzniknout. Řešení uvažované diferenciální rovnice může být totiž neobyčejně citlivé na malé změny v počátečních podmínkách, takže prvky matice soustavy (2.16) mohou být určeny velmi nepřesně. Dále pak mohou být značně velké, takže při jejím řešení může docházet k odčítání skoro stejně velkých čísel a tím ke značné ztrátě přesnosti. Jednoduché pozorování může i v této situaci značně prospět. Stačí si uvědomit dvě okolnosti: za prvé, že koeficienty v přesunuté okrajové podmínce, i když eventuálně značně velké, se nebudou příliš lišit (to je ostatně i důvod nastalé potíže), a za druhé, že přesunutá okrajová podmínka platí stejně, vynásobíme-li příslušnou rovnici libovolnou funkcí různou od nuly. Bude-li tedy možné rovnici přesunuté okrajové podmínky dělit koeficientem u některé neznámé a nově vzniklé koeficienty počítat přímo z nových diferenciálních rovnic, situace bude patrně podstatně příznivější. Podmínky, za nichž je to možné, se v tomto jednoduchém případě snadno zjistí a praxe ukazuje, že je tento postup velmi často efektivní. Vzniklá metoda se nazývá metoda faktorizace, metoda normalizovaného přesunu nebo anglickým názvem „invariant imbedding method“ (viz např. [2]).

Závěrem tohoto odstavce ještě poznamenejme, že právě popsaná metoda normalizovaného přesunu úzce souvisí s řešením dané okrajové úlohy metodou konečných diferencí, kdy se vzniklá algebraická soustava řeší Gaussovou eliminační metodou (viz [3]).

3. Obecná soustava lineárních diferenciálních rovnic

V tomto odstavci si všimneme, jak lze jednoduše formulovat metodu přesunu okrajových podmínek pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f} \tag{3.1}$$

se separovanými lineárními okrajovými podmínkami

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{V}_2\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{v}_2, \tag{3.2}$$

kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{V}_1$ a $\boldsymbol{V}_2$ jsou matice a $\boldsymbol{f}$ je vektor.

O prvcích matice $\boldsymbol{A}$ (typu m) a o složkách (m-dimenzionálního) vektoru $\boldsymbol{f}$ budeme přitom předpokládat, že jsou to funkce spojité v intervalu $[a, b]$, takže jsme oprávněni užívat větu o existenci a jednoznačnosti pro úlohu s počátečními podmínkami pro tuto soustavu. Kromě toho budeme předpokládat, že okrajové podmínky jsou nezávislé, což znamená, že hodnosti matic $\boldsymbol{V}_1$ a $\boldsymbol{V}_2$ (typů $m_1 \times m$ a $m_2 \times m$ s $m_1 + m_2 = m$) jsou rovny počtu jejich řádků.

Metoda přesunu okrajových podmínek se opírá o následující lemma, které je přímým zobecněním lemmatu 2.1.

Lemma 3.1. *Nechť m-dimenzionální vektorová funkce $\boldsymbol{y}$ splňuje v intervalu $[\xi_1, \xi_2] \subset \subset [a, b]$ diferenciální rovnici* (3.1) *a nechť v nějakém bodě $\xi_0 \in [\xi_1, \xi_2]$ platí*

$$\boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{y}(\xi_0) = \boldsymbol{v}_0, \tag{3.3}$$

kde $\boldsymbol{V}_0$ je obdélníková matice typu $m_0 \times m$ ($m_0 \leqq m$) a $\boldsymbol{v}_0$ je daný m_0-dimenzionální vektor. Buď dále $\boldsymbol{R}(x)$, $x \in [\xi_1, \xi_2]$, matice typu $m_0 \times m$, která je definovaná v intervalu $[\xi_1, \xi_2]$ (maticovou) diferenciální rovnicí

$$\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}(x) \tag{3.4}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{R}(\xi_0) = \boldsymbol{V}_0. \tag{3.5}$$

Buď konečně $\boldsymbol{r}(x)$ m_0-dimenzionální vektor definovaný v intervalu $[\xi_1, \xi_2]$ diferenciální rovnicí

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{f}(x) \tag{3.6}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{r}(\xi_0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{3.7}$$

Pak pro každé $x \in [\xi_1, \xi_2]$ platí

$$\boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{r}(x). \tag{3.8}$$

Toto lemma je naprosto paralelní k lemmatu 2.1 a dokáže se stejně snadno. Stejně snadno se dokáže následující věta o ekvivalenci, která je základem techniky přesunu okrajových podmínek i v tomto případě.

Věta 3.1. *Nechť prvky matice* $\boldsymbol{A}$ *a složky vektoru* $\boldsymbol{f}$ *jsou spojité na intervalu* $[a, b]$. *Nechť dále matice* $\boldsymbol{R}(x)$, *resp.* $\hat{\boldsymbol{R}}(x)$ *typu* $m_1 \times m$, *resp.* $m_2 \times m$ *jsou definovány diferenciální rovnicí*

$$\boldsymbol{R}' = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}(x) \tag{3.9}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{R}\,(a) = \boldsymbol{V}_1, \tag{3.10}$$

resp. diferenciální rovnicí

$$\hat{\boldsymbol{R}}' = -\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}(x) \tag{3.11}$$

s počáteční podmínkou

$$\hat{\boldsymbol{R}}\,(b) = \boldsymbol{V}_2. \tag{3.12}$$

Nechť konečně $\boldsymbol{r}(x)$, *resp.* $\hat{\boldsymbol{r}}(x)$ *jsou* m_1-, *resp.* m_2-*dimenzionální vektory definované diferenciální rovnicí*

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}(x)\boldsymbol{f}(x) \tag{3.13}$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{v}_1, \tag{3.14}$$

resp. diferenciální rovnicí

$$\hat{\boldsymbol{r}}' = \hat{\boldsymbol{R}}(x)\boldsymbol{f}(x) \tag{3.15}$$

s počáteční podmínkou

$$\hat{\boldsymbol{r}}(b) = \boldsymbol{v}_2. \tag{3.16}$$

Utvoříme-li pak pro libovolné $x_0 \in [a, b]$ *soustavu* m *lineárních algebraických rovnic*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(x_0) \\ \hat{\boldsymbol{R}}(x_0) \end{bmatrix} \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}\,(x_0) \\ \hat{\boldsymbol{r}}(x_0) \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

platí: má-li okrajová úloha (3.1), (3.2) *řešení* $\boldsymbol{y}(x)$, *je vektor* $\boldsymbol{y}(x_0)$ *řešením soustavy* (3.17), *a naopak je-li vektor* $\boldsymbol{k}$ *řešením soustavy* (3.17), *je vektor* $\boldsymbol{y}(x)$, *který získáme řešením soustavy* (3.1) *s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{k}$, *řešením okrajové úlohy* (3.1), (3.2). *Má-li okrajová úloha* (3.1), (3.2) *jediné řešení, má i soustava* (3.17) *jediné řešení a naopak.*

Z právě uvedené věty plyne následující jednoduché, často však velmi užitečné tvrzení: Nechť okrajová úloha (3.1), (3.2) má při libovolném $\boldsymbol{f}$ a při libovolných $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ nanejvýš jedno řešení a nechť je $m_1 + m_2 = m$. Pak má tato úloha při libovolných f, $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ právě jedno řešení. Skutečně, podle věty 3.1 stačí ukázat, že determinant soustavy (3.17) je nenulový. Kdyby však byl tento determinant roven nule, měla by homogenní soustava příslušná k soustavě (3.17) netriviální řešení a okrajová úloha (3.1), (3.2) s $\boldsymbol{f} = 0$ a $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = 0$ by měla kromě triviálního řešení ještě také netriviální řešení. Podařilo se nám tedy velmi elementárně dokázat, že pro vyšetřovanou okrajovou úlohu platí Fredholmova alternativa.

Na základě věty 3.1 se dají formulovat algoritmy pro řešení okrajové úlohy (3.1), (3.2), které jsou zcela paralelní k algoritmům pro rovnici druhého řádu popsaným v odstavci 2.

Závěrem ještě poznamenejme, že přímá paralela k větě 3.1 platí i pro značně obecnější okrajovou úlohu pro soustavu (3.1), kdy se připouštějí podmínky i ve vnitřních bodech daného intervalu, a to typu předepsaných nebo neznámých skoků v některých složkách vektoru řešení.

L i t e r a t u r a

[1] Taufer, J.: *Lösung der Randwertprobleme für Systeme von linearen Differentialgleichungen.* Rozpravy Československé Akademie Věd, Řada matematických a přírodních věd, ročník 83 – sešit 5, Praha 1973.

[2] Meyer, G. H.: *Inital Value Methods for Boundary Value Problems; Theory and Application of Invariant Imbedding.* New York, Academic Press 1973.

[3] Babuška, I., Práger, M., Vitásek, E.: *Numerical Processes in Differential Equations.* London–New York–Sydney, Interscience Publishers 1966.