Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Carmen Simerská

Úvod do finančních derivátú, zvláště forwardů a opcí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 4, 313–322

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142021

Úvod do finančních derivátů, zvláště forwardů a opcí

Carmen Simerská, Praha

1. Úvod

Termín „finanční derivát“ v současné době nalezneme v mnoha odborných i běžných textech. Označuje se tak jakýkoliv finanční nástroj (instrument), jehož cena je nějakým způsobem odvozena (derivována) od ceny reálného aktiva (tzv. podkladového aktiva). Obecnost této definice dává tušit, že existuje velké množství různých typů derivátů. Základním použitím všech je ale jedna ze dvou možností: pokud máme v držení podkladové aktivum, pak koupě derivátu na něj slouží obecně ke snížení rizika investice – tzv. její zajištění; pokud vlastníme pouze derivát, pak naopak spekulujeme na vývoj ceny podkladového aktiva a naše riziko může být (velmi) velké.

Tento článek má za cíl seznámit čtenáře se dvěma základními druhy derivátů – forwardem a opcí. První z nich tvoří základ tzv. lineárních derivátů – přibližně řečeno, zisk nebo ztráta z držení forwardu je lineární funkcí okamžité ceny podkladového aktiva. Opce je naopak příkladem derivátu nelineárního, kdy zisk či ztráta závisí na této ceně výrazně nelineárním vztahem.

Zatímco matematický aparát pro oceňování forwardů je jednoduchý a přímočarý, u opcí je situace jiná. Zde se uplatňuje často zmiňovaný Blackův-Scholesův model, se kterým chceme čtenáře blíže seznámit.

O finančních derivátech je i v češtině řada publikací, mnohé též na základní úrovni (např. [1]). V loňském roce vyšel v tomto časopise odborný článek [2], který se zabýval numerickými metodami pro oceňování speciálního druhu opcí – amerických kupních opcí. Věříme, že tento článek poslouží jako základní informace pro případné zájemce o numerické aspekty oceňování derivátů, zejména různých typů opcí.

2. Finanční produkty a základní matematické nástroje

Člověk nebo instituce (banka, investiční fond, podnik,...) může investovat do produktu, který je zhruba řečeno

- bezrizikový (jehož budoucí hodnota je známá): pojištěný vklad v bance, zakoupení státního dluhopisu státu se stabilní ekonomikou,
- rizikový (jehož hodnota je náhodná veličina): investice například na akciových trzích, do komodit, do pohyblivého kurzu mezi měnami, úrokových sazeb, do derivátů atd.

Doc. RNDr. Carmen Simerská, CSc., Ústav matematiky VŠCHT Praha, Studentská 6, 166 28 Praha 6 – Dejvice, e-mail: `Carmen.Simerska@vscht.cz`

Právě vztah investora k riziku může výrazně ovlivnit konečný výnos investice. Investiční společnosti většinou vytvářejí portfolia z rizikových a bezrizikových investic, pokud možno tak, aby při co nejmenším riziku byl dosažen co největší zisk.

Připomeňme vzorce pro **bezrizikové investice** (aktiva) P u následujících typů úročení:

jednoduché úročení: $P(t) = P(0)(1 + rt)$,
složené úročení: $P(t) = P(0)(1 + \frac{r}{m})^{mt}$,

kde $P(t)$ znamená splatnou částku za čas t (měřený v rocích) při počátečním depozitu $P(0)$, r tzv. nominální (roční) úrokovou sazbu a m je počet připisování úroků ročně při proporcionální úrokové sazbě $\frac{r}{m}$.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{r}{m})^m = \mathrm{e}^r$, je opodstatněné definovat matematicky výhodné limitní úročení, které zde budeme dále používat. (Zpětné odvození úrokových sazeb jednoduchého i složeného úročení ze sazeb spojitého úročení je snadné.)

Spojité úročení : $P(t) = P(0)\mathrm{e}^{rt}$, pro fixní úrokovou sazbu r.

Ve finanční matematice se k porovnání peněžních částek (toků) z různých časových období používá metoda časové hodnoty peněz nazývaná **princip současné hodnoty**. Pojem *současná hodnota finančního toku* plánovaného k budoucímu datu T znamená hodnotu tohoto toku vztaženou k nějakému referenčnímu datu t_0, kterým obvykle bývá současné datum.

U spojitého úročení se současná (diskontovaná) hodnota v čase t_0 budoucího toku $P(T)$ vypočte následovně:

$$P(t_0) = P(T)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}\,. \tag{1}$$

Rizikové investice nazýváme ty, jejichž budoucí hodnotu nelze předvídat. Při jejich správě je třeba počítat s kolísáním jejich ceny v čase. Většinou jsou hodnoty rizikového produktu ovlivněny mnoha faktory, u kterých předem neznáme jejich chování. Ve finanční matematice se k popisu nejistoty používá počet pravděpodobnosti a statistika.

Rizikové aktivum se nazývá *podkladové aktivum*, pokud jsou na něm založeny nebo na něm závisejí další rizikové produkty, tzv. deriváty.

3. Deriváty a jejich oceňování

Derivát je definován jako termínová smlouva na některé podkladové aktivum. Je to obchod mezi dvěma stranami, kde se dohodnou podmínky o budoucím nákupu nebo prodeji určitého podkladového aktiva a v budoucnu je tento obchod za těchto podmínek realizován (vypořádán).

Podle mezinárodních standardů je derivát finanční nástroj, který splňuje tyto podmínky:

a) jeho hodnota se mění v závislosti na změně ceny podkladového aktiva,
b) který nevyžaduje počáteční investici nebo vyžaduje malou počáteční investici ve srovnání s cenou podkladového aktiva,
c) je vypořádán v budoucnosti.

Poznamenejme, že podkladové aktivum nemusí být nutně obchodovatelný nástroj. Může jím být také burzovní index, počasí, výsledek sportovního utkání atd. Podstatou derivátu je časový rozdíl mezi datem sjednání obchodu a jeho vypořádáním, přičemž podmínky a parametry obchodu jsou definovány v den sjednání obchodu. Změnou (ceny) podkladového aktiva do data vypořádání dochází ke změně ceny příslušného derivátu. Pokud jedna strana vydělá v den vypořádání nějakou částku, potom druhá stejnou částku prodělá (jde tedy o tzv. nástroje s „nulovým součtem"). Smluvní strany mají zájem uzavřít kontrakt jen tehdy, jestliže se jejich tržní očekávání liší. Pomocí derivátů lze vlastně obchodovat finanční riziko na finančních trzích.

Rozeznáváme dva základní typy derivátů

- pevné (jsou závazné pro obě strany): forwardy, futures, swapy,
- podmíněné (závisejí na vůli jedné strany kontraktu): opce.

Příkladem pevného derivátu je následující komoditní forward.

Příklad 1. Pěstitel brambor se na podzim obával, že na jaře cena brambor klesne. S odběratelem brambor uzavřel smlouvu na prodej určitého množství brambor za určitou cenu v určitý čas na jaře. Až ten čas nastane, pěstitel prodá odběrateli sjednané množství za předem sjednanou cenu, ať už bude cena brambor aktuálně na trhu jakákoli. Pěstitel se zajistil proti poklesu cen. Pokud cena skutečně klesla pod sjednanou cenu, pěstitel se správně zajistil, pokud stoupla, připravil se o zisk. Protistrana kontraktu (může být např. výrobce bramboráků) se také chtěl zajistit, ale naopak proti vzrůstu cen. Oba dávají přednost jistotě před spekulací.

Deriváty jsou ovšem využívány nejen k zajištění, ale často ke spekulativním účelům. Protistrana nebývá přímý odběratel, ale obchodník-spekulant. S deriváty se pak obchoduje jako s jinými cennými papíry. Je to „obchodování se smlouvami na budoucí obchody".

Příklad 2. Obchodník-spekulant, který není odběratel brambor, spekuluje na vzrůst cen brambor, aby mohl smlouvu později (do doby splatnosti) prodat některému odběrateli. Jestliže na jaře dojde k podstatnému zdražení brambor (např. dvojnásobnému, než je cena dohodnutá ve forwardu), obchodníkovi se pravděpodobně podaří smlouvu před datem splatnosti prodat např. odběrateli brambor za cenu, která bude výhodná i pro odběratele brambor. Obchodník-spekulant bude mít zisk, aniž by s komoditou přišel do styku. Stejně tak ovšem může cena klesnout a potom smlouva ztrácí svoji cenu. Pokud obchodník nechce být zavalen bramborami, musí forward prodat odběrateli brambor se ztrátou.

Dalším příkladem forwardu je:

Příklad 3. Podnikatel, který vyváží z ČR zboží do Německa, se zajistí v bance měnovým forwardem, který mu zaručí, že se kurz mezi měnami CZK a EUR zafixuje, tj. stane se bezrizikovým. Podnikatel v budoucnosti obdrží dohodnutý objem korun při předem dohodnuté konverzi měn. Roli spekulanta zde hraje banka.

Historicky doloženým **příkladem podmíněného derivátu** je:

Příklad 4. Opce, kterou sjednal v 6. století př.n.l. Thales Milétský. Byla to smlouva na možný (nikoli povinný) budoucí pronájem olivových lisů. Thales totiž předpokládal na základě svých astrologických pozorování hojnou úrodu oliv v následujícím roce. V příštím roce pak rezervovanou kapacitu, tj. realizovanou opci, se ziskem prodal.

Oceňování derivátů se děje na principu současné hodnoty finančních toků (používáme zde spojité úročení viz (1)) a za předpokladu neexistence arbitrážních příležitostí.[1] *Princip nemožnosti arbitráže* znamená, že dvě finanční portfolia A a B, která mají shodný budoucí výnos v čase T, musejí mít stejnou cenu i pro všechna $t \in \langle 0, T)$. V opačném případě by pro ceny portfolií $A(t)$, $B(t)$ v čase $t_0 \in \langle 0, T)$ platilo: $A(t_0) > B(t_0)$ a zároveň $A(T) = B(T)$. To by znamenalo, že ten, kdo vlastní v čase t_0 portfolio A, prodá jej a nakoupí portfolio B, bude mít bezrizikový zisk.

Princip nemožnosti arbitráže znamená, že není možno bez vynaložení investic a podstoupení nějakého rizika dosáhnout zisk.V praxi jsou arbitrážní příležitosti působením trhu brzy odstraněny.

Dále se pro oceňování cen derivátů předpokládá, že likvidita aktiv je okamžitá a dokonalá, účastníci trhu si mohou půjčovat hotovost za bezrizikovou fixní úrokovou sazbu r a navíc, že transakční náklady jsou nulové.

4. Forward

Forward je jednoduchý derivát. Je to smlouva mezi prodejcem (krátká pozice) a kupujícím (dlouhá pozice) sjednaná v čase $t = 0$, že v čase T prodejce prodá kupujícímu podkladové aktivum S za termínovou cenu K. Smlouva je závazná pro obě strany. Sjednání forwardu nevyžaduje žádné počáteční náklady.

Termínová cena K je zřejmě smluvena tak, aby hodnota forwardu byla pro obě dvě strany smlouvy nulová. Jestliže $S(t)$ značí cenu podkladového aktiva S a $f(t)$ *hodnotu forwardu* dlouhé pozice v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ (krátká pozice má opačné znaménko), potom $f(0) = 0$. Hodnota forwardu $f(t)$ se zřejmě vyvíjí v průběhu časového intervalu $\langle 0, T \rangle$. V intervalu $(0, T\rangle$ může mít kladnou i zápornou hodnotu v závislosti na cenách $S(t)$. V čase vypořádání je $f(T) = S(T) - K$ (zisk nebo ztráta kupujícího).
Spravedlivá cena forwardu (správně stanovená, fair) $F(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$ se nazývá taková termínová cena, při které by hodnota forwardu $f(t)$ byla nulová, pokud by čas sjednání kontraktu byl t, $t \in \langle 0, T \rangle$. Tedy $F(0) = K$ a $F(T) = S(T)$.

Pokud je podkladovým aktivem S:

- produkt, který nepřináší žádný zisk (bezdividendová akcie, bezkuponový dluhopis), a označíme-li termínovou cenu K, potom platí

$$f(t) = S(t) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \quad \text{a} \quad F(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{r(T-t)}. \tag{2}$$

  Pro důkaz stačí uvažovat dvě portfolia A a B obsahující v čase t:
  A: dlouhou pozici ve forwardu na S a hotovost $K\mathrm{e}^{-r(T-t)}$, kterou investor uloží na dobu $(T - t)$ do banky za úrokovou sazbu r,
  B: jednotku aktiva S.
  V čase T mají portfolia A i B tutéž hodnotu $S(T)$, tj. cenu jednotky aktiva S, neboť v A za získanou hotovost z banky $K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{e}^{r(T-t)} = K$ obdržíme forwardem S. Platí: $f(T) + K = S(T)$.

[1] *Arbitráž* je finanční transakce, při které se při nulovém počátečním vkladu dosahuje předem jistého (bezrizikového) kladného zisku. Zisku se dosahuje buď na základě cenového rozdílu mezi dvěma finančními trhy, nebo mezi dvěma finančními nástroji, kdy ceny na termínovém trhu neodpovídají cenám odvozeným z cen podkladových aktiv na současném trhu.

Stejnou hodnotu musejí tedy mít (předpoklad nemožnosti arbitráže) i v čase t: $f(t) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} = S(t)$. Připomeňme, že spravedlivá cena $F(t)$ je taková cena K, pro kterou $f(t) = 0$, kde $t \in \langle 0, T\rangle$. Odtud $F(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{r(T-t)}$.

- produkt, který přináší do data splatnosti forwardu známé platby (dividendy nebo kupóny), jejichž současná hodnota v čase t je D_t, potom

$$f(t) = S(t) - D_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \quad \text{a} \quad F(t) = (S(t) - D_t)\,\mathrm{e}^{r(T-t)}. \tag{3}$$

Pro důkaz uvažujeme portfolium A jako v důkaze předchozího případu a B obsahující v čase t jednotku aktiva S a půjčku hotovosti D_t. Postupně získané platby s celkovou současnou (diskontovanou) hodnotou D_t se reinvestují za bezrizikovou sazbu r. Tedy jejich budoucí hodnota v čase T bude $D_t\,\mathrm{e}^{r(T-t)}$.
V čase T mají portfolia A i B tutéž hodnotu – cenu jednotky aktiva S, neboť v A za získanou hotovost K z banky obdržíme forwardem sjednané S. Zúročené platby v bance zaplatí částku, kterou je třeba vrátit, tj. $D_t\,\mathrm{e}^{r(T-t)}$. Stejnou hodnotu musejí mít tedy i v čase t: $f(t) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} = S(t) - D_t$. Odtud $F(t) = (S(t) - D_t)\,\mathrm{e}^{r(T-t)}$.

Obdobně by se ukázalo, že je-li S

- produkt, který vynáší spojitý zisk, který je spojitým tokem částek se spojitou mírou s, potom

$$F(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{(r-s)(T-t)}, \tag{4}$$

- cizí měna, tedy devizový kurz $S(t) = S_{D,Z}(t)$, tj. kolik měny D lze získat za jednotku měny Z,

$$F(t) = S(t)\,\mathrm{e}^{(r_D - r_Z)(T-t)}. \tag{5}$$

Spravedlivý směnný kurz měnového forwardu závisí na současném (spotovém) kurzu a na bezrizikových úrokových mírách v obou měnách. Přejdeme-li ze spojitého úročení na běžně používané roční sazby jednoduchého úročení a uvažujeme-li rozdílné sazby pro ukládání a půjčování, potom nákupní směnný kurz měny Z pro vypořádání v čase T bude

$$F^N_{D,Z} = S^N_{D,Z}(t)\,\frac{1 + r^V_D(T-t)}{1 + r^U_Z(T-t)}, \tag{6}$$

a obdobně prodejní kurz

$$F^P_{D,Z} = S^P_{D,Z}(t)\,\frac{1 + r^U_D(T-t)}{1 + r^V_Z(T-t)}, \tag{7}$$

kde $S^N_{D,Z}(t)$ je spotový nákupní směnný ($S^P_{D,Z}(t)$ prodejní) kurz měny Z (vyjádřený v měně D) v čase t, r^V_D je bezriziková úroková míra pro vklad v měně D a r^U_D bezriziková úroková míra, za kterou lze dostat úvěr v měně D (obdobně pro měnu Z).

Složitější, ale velmi používaný forward je tzv. FRA (forward rate agreement). FRA je smlouva, jehož předmětem je dohoda o fixaci úrokové sazby (např. na úvěr) na určité konkrétní období v budoucnosti. Podkladovým aktivem je tedy úroková sazba. Pro spravedlivou (rovnovážnou) sazbu FRA odkazujeme na [3], [1].

5. Opce

Opce je podmíněný derivát. Je to smlouva mezi dvěma partnery, která jedné straně – držiteli opce (kupujícímu opci) – dává právo koupit (*call opce*) nebo prodat (*put opce*) podkladové aktivum S v daný okamžik T v budoucnosti (*evropská opce*) nebo kdykoliv do daného okamžiku $t \leq T$ (*americká opce*) za předem dohodnutou *realizační cenu* E.

Cena opce při vypořádání závisí na aktuální ceně podkladového aktiva v den vypořádání. Držitel opce (zvýhodněná dlouhá pozice) se podle výše této aktuální (spotové) ceny rozhodne, zda opci realizuje či nikoli. Druhá strana (prodávající opce, krátká pozice) se pasivně podřizuje rozhodnutí držitele opce. Za právo budoucí realizace opce platí držitel opce v době sjednání *opční prémii* OP (tj. tržní cenu opce). Protistrana (znevýhodněná krátká pozice) tedy obdrží v den sjednání opce opční prémii. Tuto opční prémii držiteli opce nevrací bez ohledu na to, zda bude opce v den vypořádání realizována nebo ne.

Podle podkladového aktiva se rozlišují různé typy opcí (na akcii, na měnu, na akciový index,...), pro které existují různé oceňovací modely, tj. modely k určení ceny opcí (opčních prémií). Uvedeme zde dále pouze vztah rovnovážné parity call a put opce a spojitý Blackův-Scholesův model.

Cena opce je v době před vypořádáním ovlivněna mnoha faktory, ale následující mají na cenu opce zásadní vliv: $S(t), E, T, r$ a σ. Poslední faktor σ znamená volatilitu (rizikovost) ceny S podkladového aktiva S. Čím je volatilita vyšší, tím je vyšší i cena opce. Nejdůležitějším faktorem z jmenovaných je zřejmě cena $S(t)$ podkladového aktiva S. Pokud tato cena stoupne, musí stoupnout cena call opce, pro put opci to platí obráceně. Při poklesu ceny $S(t)$ musí vzrůst cena put opce. Čím delší je čas do realizace T, tím je call opce dražší (delší prostor pro spekulaci a očekávání). I když se zdá, že pro put opci platí totéž, není tomu tak (podrobněji viz [5]).

5.1 Evropská opce

Uvažujme zde pouze obyčejnou evropskou opci, kde cena $S(t)$ podkladového aktiva závisí pouze na čase t, např. opce na akcii. Tento typ se nazývá *vanilla* opce. Kromě obecných předpokladů pro oceňování derivátů (neexistence arbitráže,...) se u vanilla opce předpokládá, že v době do vypořádání opce nejsou žádné další finanční toky (dividendy nebo kupóny) spojené s podkladovým aktivem. (Držitel call opce na akcii nemá právo na výplatu dividend v průběhu života opce.)

Cena call opce $C(T)$, resp. put opce $P(T)$ při vypořádání v čase T je zřejmě dána rovností:

$$C(T) = \max(S(T) - E,\, 0)\,, \quad \text{resp.} \quad P(T) = \max(E - S(T),\, 0)\,. \tag{8}$$

Call opci tedy investoři kupují, pokud očekávají vzestup ceny aktiva, a je prodávaná protistranou s opačným očekáváním. Koupě put opce bývá zajištěním při očekávání poklesu aktiva.

Tedy závislost zisku dlouhé pozice call opce v čase T na ceně podkladového aktiva $S(T)$ lze matematicky zapsat jako $Z_{dl} = \max(S(T) - E, 0) - OP$, u krátké pozice je $Z_{kr} = -\max(S(T) - E, 0) + OP = \min(E - S(T), 0) + OP$. Obdobné závislosti platí pro put opci.

Základní problém při obchodování s opcemi je stanovení *rovnovážné ceny* (hodnoty) opce v libovolném čase $t \in \langle 0, T)$, tj. stanovení ceny opce tak, aby nemohlo dojít k arbitráži.

Parita put-call opce říká, že stačí znát pouze jednu z cen put nebo call opce.

Jestliže $C(t)$ a $P(t)$ značí rovnovážné ceny evropské call a put opce vypsané na stejné aktivum S, na stejnou cenu E a čas T, potom platí následující vztah mezi cenou prodejní a kupní opce, tzv. *parita put-call opce*:

$$P(t) = C(t) + E\mathrm{e}^{-r(T-t)} - S(t)\,, \text{ kde } t \leq T. \tag{9}$$

Pro důkaz uvažujme dvě portfolia v čase t. A: put opci na S a současně podkladové aktivum S, B: call opci na S a současně hotovost ve výši $E\mathrm{e}^{-r(T-t)}$, kterou investor vloží do banky (tento vklad přinese v čase T částku v hodnotě realizační ceny opce E). Obě tato portfolia mají v čase T stejnou hodnotu $P(T) + S(T) = C(T) + E$, a to pro $S(T) \geq E$ i pro $S(T) < E$. (Pro $S(T) \geq E$ je $P(T) + S(T) = 0 + S(T) = S(T) - E + E = C(T) + E$, obdobně pro $S(T) < E$.) Musejí mít tedy rovněž stejnou hodnotu i v čase t.

Na základě parity (9) lze call a put opce v dlouhých i krátkých pozicích volně kombinovat. Tak například portfolio tvořené jednou call opcí v dlouhé pozici a jednou put opcí v krátké pozici na totéž podkladové aktivum S se chová stejně jako portfolio tvořené jedním forwardem na S (v dlouhé pozici), přičemž jeho termínová cena K je realizační cenou E opcí v čase T.

Dále platí pro call opci nerovnosti:

$$S(t) \geq C(t) \geq \max(S(t) - E\mathrm{e}^{-r(T-t)}, 0\ )\ . \tag{10}$$

Nerovnost vlevo platí, neboť v případě, že $S(t) < C(t)$, investor v čase t koupí S a prodá call opci na S. Tím udělá arbitráž. (V případě, že by držitel call opce v čase T tuto opci realizoval, tj. $S(T) \geq E$, dodal by mu investor aktivum S.)

Pro důkaz pravé nerovnosti mějme dvě portfolia v čase t. A: call opci na S a současně hotovost ve výši $E\mathrm{e}^{-r(T-t)}$ (tento vklad přinese v čase T částku v hodnotě realizační ceny opce E), B: aktivum S.

Hodnota $A(T)$ portfolia A je v čase T vyšší nebo rovna hodnotě $B(T)$ portfolia B, a to pro $S(T) \geq E$ ($A(T) = S(T) - E + E = S(T) = B(T)$) i pro $S(T) < E$ ($A(T) = 0 + E > S(T) = B(T)$). Stejná nerovnost musí tedy platit i v čase t.

Nejhorší případ, který držiteli call opce může nastat, je, že opci nerealizuje, tedy hodnota call opce musí být vždy nezáporná, tj. $C(t) \geq 0$. Z toho plyne pravá nerovnost v (10).

V případě, že se cena S podkladového aktiva stává velmi velkou, potom je vysoce pravděpodobné, že držitel opce bude opci v čase T realizovat. Call opce se potom stává forwardem s termínovou cenou $K = E$. Tedy

$$C(t) \to S(t) - E\mathrm{e}^{-r(T-t)} \quad \text{pro} \quad S(t) \to \infty. \tag{11}$$

5.2 Americká opce

Držitel americké call opce má právo realizovat opci v průběhu jejího života. Cena americké call opce $C^A(t)$ má vždy vyšší hodnotu než evropská call opce, tj. $C^A(t) \geq C(t)$. Totéž platí i pro put opce $P^A(t) \geq P(t)$. Zřejmě jako v (10) je $S(t) \geq C^A(t)$.

Jestliže je aktivem akcie, na kterou je vyplacena dividenda, pak stačí opci realizovat těsně před vyplácením dividendy. Dividenda je tedy součástí call opce.

V případě americké call opce na bezdividendovou akcii se dá ukázat, že není vhodné realizovat opci před dnem T. Potom se ale tato opce vlastně stává opcí evropskou a platí rovnost hodnot těchto opcí. Pro put opci ale toto neplatí. Put opci na totéž S bez dividend je někdy rozumné realizovat před dnem T, viz [4].

Oceňování americké opce je složitější než u evropské call opce. Nicméně pro americkou opci (bez dividend) platí nerovnosti podobné (9) a (10):

$$P^A(t) > C^A(t) + E\mathrm{e}^{-r(T-t)} - S(t)\,, \tag{12}$$

$$C^A(t) = C(t) \geq \max(S(t) - E\mathrm{e}^{-r(T-t)}, 0\,)\,. \tag{13}$$

6. Blackův-Scholesův model

Blackův-Scholesův model představuje model oceňování obecných derivátů původně vytvořený jako model pro evropské opce typu vanilla [7]. Je modelem pro výpočet rovnovážné ceny derivátu na podkladové aktivum S během života tohoto derivátu, $t \leq T$.

Black, Scholes a později Merton vytvořili tento model na myšlence, že lze opci na trhu dokonale replikovat nákupem a prodejem podkladového aktiva a bezrizikového aktiva ve „správném poměru“ a tím eliminovat risk. Předpokládali, kromě obecných předpokladů (nemožnost arbitráže, dokonalý trh...), že se cena S podkladového aktiva řídí stochastickým procesem (geometrickým Brownovým pohybem)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) > 0, \tag{14}$$

kde $W(t)$ je Wienerův proces. Střední hodnota μ a směrodatná odchylka σ výnosu aktiva S jsou konstanty procesu.

Rovnice (14) popisuje trend ceny S. Pokud $\sigma = 0$, jde o čistě exponenciální trend, pokud $\sigma \neq 0$, popisuje $\sigma dW(t)$ náhodnou složku.

Slavná *Blackova-Scholesova* (B-S) rovnice pro obecný derivát říká:
Jestliže $C(S,t)$ značí rovnovážnou cenu derivátu na S (bez dividend, kuponů, atp.), pak za výše uvedených předpokladů tato cena vyhovuje parciální diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\,\frac{\partial C}{\partial S} - r\,C = 0\,. \tag{15}$$

Pro důkaz postavený na stochastickém diferenciálním počtu a na předpokladu dokonalého trhu odkazujeme na [7], [9] a [6].

Ilustrujme B-S rovnici na příkladu forwardu na nákup bezdividendové akcie S. Položíme $C(S,t) = f(S,t)$, kde f značí hodnotu forwardu dlouhé pozice. Ta je dána, viz (2), rovností: $f(S,t) = S - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}$, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0\,. \tag{16}$$

Když toto dosadíme do levé strany B-S rovnice, dostáváme skutečně:

$$-rK\mathrm{e}^{-r(T-t)} + rS - rf(S,t) = 0\,. \tag{17}$$

Původní **Blackův-Scholesův model pro oceňování evropských call opcí** vede na rovnici (15) , která má dokonce analytické řešení.

Nechť dále $C(S,t) = C(t)$ značí rovnovážnou cenu evropské call opce na akcii. B-S rovnice (15) pro funkci $C(S,t)$ představuje lineární diferenciální rovnici parabolického typu (po úpravě difuzní rovnice). Tato rovnice se řeší „zpětně“ na oblasti $S \in (0,\infty)$, $t \in (0,T)$, přičemž

$$C(S,T) = \max(S(T) - E,\, 0) \tag{18}$$

je koncovou podmínkou (viz (8)) a

$$C(0,t) = 0 \ \text{ pro } \ \forall t \in \langle 0,T\rangle\,, \quad C(S,t) \simeq S - E\mathrm{e}^{-r(T-t)} \ \text{ pro } \ S \to \infty \tag{19}$$

jsou okrajovými podmínkami pro rovnici. (První okrajová podmínka plyne z (10) a druhá je (11).)

Úloha najít funkci $C(S,t)$ vyhovující B-S rovnici (15), koncové podmínce (18) a okrajovým podmínkám (19) má jednoznačné řešení.

Analytickým řešením je *Blackův-Scholesův vzorec* pro cenu opce v čase t:

$$C(S,t) = S(t)N(d_1) - E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)\,, \tag{20}$$

kde $d_{1,2} = \dfrac{\ln(S(t)/E) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}}$ a $N(d) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{d} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,.$

$S(t)$ značí cenu akcie v čase t, což je náhodná proměnná s logaritmicko normálním rozdělením, tedy její logaritmus má normální rozdělení, σ je roční volatilita (směrodatná odchylka) spojitého výnosu akcie[2].

$N(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení. $N(d_1)$ se nazývá koeficient zajištění. Čím je poměr S/E vyšší, tím je $N(d_1)$ blíže k 1. $N(d_2)$ představuje pravděpodobnost, že call opce bude realizována. Blackův-Scholesův vzorec (20) lze tedy interpretovat jako váženou současnou hodnotu opce, přičemž váhy odpovídají členům $N(d_1)$ a $N(d_2)$.

Na základě vztahu (9) pro paritu call a put opce lze Blackův-Scholesův vzorec odvodit i pro evropskou put opci.

Nejdiskutovanějším parametrem v B-S rovnici je asi stanovení parametru volatility výnosu podkladového aktiva σ. Jeho hodnota je pro správné ocenění opce klíčová, neboť právě volatilita je předmětem různých strategií. V praxi se σ odhaduje buď z časových řad historických cen podkladových aktiv (historická volatilita), anebo z B-S vzorce ze současných dat (implikovaná volatilita).

6.1 Krátce o nelinearitách

Problém výpočtu ceny americké opce s dividendou vede sice rovněž na úlohu s B-S rovnicí, ale s volnou hranicí v okrajových podmínkách. Potom jde o úlohu nelineární, která vyžaduje numerické řešení, viz [7] a další literatura citovaná v [2].

Blackův-Scholesův model byl postaven na poměrně silných předpokladech. Jak jsme zmínili, důležitým předpokladem pro platnost B-S rovnice je možnost dokonalé

[2] *Spojitý výnos akcie* za čas Δt je definován jako $\ln(S(t+\Delta t)/S(t))$.

repliky opce pomocí akcie a bezrizikového instrumentu. To však nelze provést, pokud jsou uvažovány transakční náklady. Nicméně lze odvodit nelineární verze B-S rovnice, kde volatilita σ nebude již konstantní, ale závislá na dalších parametrech $\sigma = \sigma(t, S, \frac{\partial C}{\partial S}, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2})$. Odvozená B-S rovnice je již nelineární a řešitelná jen pomocí numerických metod. Zmiňme například [10] a [11].

7. Poznámky na závěr

Blackův-Scholesův model byl publikován v roce 1973. V té době nikdo netušil, jakým závratným způsobem se v následujících desetiletích obchodování s deriváty rozvine. Jeho nejjednodušší výsledek – vzorec (20) – používají každodenně obchodníci s opcemi i v dnešní době.

Úspěšnost matematického modelování (a následně kvantifikace finančního rizika), která se zpočátku zdála nezpochybnitelná, dostala však zejména v poslední době vážné trhliny. Stále složitější modely a jejich statistické vyhodnocování vedly k příliš optimistickému odhadu rizik, což se v nedávné době projevilo např. v hypoteční krizi v USA a jinde. Z pohledu matematiky jsou důvody evidentní: nesplnění předpokladů teorie. Zejména požadavek normálního náhodného rozdělení a statistické nezávislosti tržních veličin se ukázal platit s dobrou přibližností jen v dobách „normálního“ chování finančních trhů. A právě reálně pozorovaný odklon od těchto předpokladů – velké odchylky cen a jejich korelace napříč trhy a finančními instrumenty v turbulentních dobách – bolestivě ukázaly meze finančního modelování, včetně Blackova-Scholesova modelu.

L i t e r a t u r a

[1] Jílek, J.: *Finanční a komoditní deriváty v praxi.* Grada, Praha 2005.
[2] Hlaváček, I., Vejchodská, E.: *Matematické modely oceňování amerických kupních opcí.* PMFA *55* (2010), 141–146.
[3] Friesl, M., Šedivá, B.: *Finanční matematika hypertextově.* `http://home.zcu.cz/friesl/hfim/txt.html`.
[4] Ambrož, L.: *Oceňování opcí.* C. H. Beck, Praha 2002.
[5] Kwok, Y. K.: *Mathematical models of financial derivatives.* Springer, Singapure 2008.
[6] Wilmott, P.: *Derivatives. The theory and practice of financial engineering.* John Wiley & Sons, Chinchester 1998.
[7] Black, F., Scholes, M.: *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Polit. Econ. *81 (3)* (1973), 637–659.
[8] Slačánek, J.: *Blackův-Scholesův model oceňování opcí.* Finance a úvěr *50 (2)* (2000), 78–96.
[9] Hull, J.: *Options, futures & other derivatives.* 5th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River 2003.
[10] Seydel, R.: *Nonlinearities in financial engineering.* GAMM-Mitt. *32* (2009), 121–132.
[11] Heider, P.: *Numerical methods for non-linear Black-Scholes equations.* App. Math. Finance *17* (2010), 59–81.