Bohuslav Hostinský

Sur le calcul des probabilités relatives à l'évolution d'un système

Aktuárské vědy, Vol. 8 (1948), No. 2, 67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144721

SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS RELATIVES À L'ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME

Par

B. HOSTINSKÝ

(Résumé de l'article précédent).

Dans un travail publié en 1917,[3]) suivi par un supplément,[4]) M. Schoenbaum a résolu le problème suivant: Un groupe de personnes d'âge a étant donné et les taux annuels de mortalité et d'invalidité étant connus ainsi que le nombre de personnes qui sont remises en activité par an, il faut trouver le nombre de personnes actives d'âge $x (a < x)$ appartenant à ce groupe. Le problème consiste à résoudre une équation intégrodifférentielle de la forme (4) où les fonctions $F(x)$ et $G(x, \xi)$ dépendent d'une manière connue des taux donnés. La solution du problème a été trouvé par M. Schoenbaum, à l'aide de la méthode de Volterra,[1])[2]) sous la forme (5). $\psi_1(x)$ représente le nombre de personnes d'âge x, faisant partie du groupe considéré, qui restent actives sans interruption; $\psi_0(x)$ est le nombre de personnes d'âge x qui sont devenues une fois invalides et qui ont été une fois remises en activité; $\psi_2(x)$ est le nombre de celles qui sont devenues deux fois invalides et qui ont été deux fois remises en activité et ainsi de suite. Le rapport $l^{aa}(x)/l^{aa}(a)$ est égal à la probabilité pour qu'une personne, appartenant au groupe considéré, soit active à l'âge x. La valeur de la formule (5) consiste en ce qu'elle exprime la probabilité cherchée en forme d'une série dont chaque terme représente une probabilité bien déterminée; l'axactitude de la formule est évidente.

J'ai cherché à obtenir des expressions analogues à (5) pour des autres probabilités qui se présentent dans l'étude de systèmes physiques en évolution.[7]) Considérons en particulier l'équation de Smoluchowski (7) où $\varphi(x_0, z, n)\, dz$ représente la probabilité pour qu'un point qui se meut au hasard le long de la partie positive de l'axe $0x$ et qui se trouve à un instant donné dans la position x_0 occupe, après u secondes, une position comprise entre z et $(z + dz)$. Pour trouver une solution de (7) qui contient une fonction arbitraire $a(x, y)$ de deux variables, nous allons distinguer quatre probabilités de passage suivantes: 1° Probabilité $p(x_0, x, t)\, dx$, où p, densité de probabilité de passage continu de x_0 à x en t secondes, satisfait aux conditions (8). 2° Probabilité $a(x_0, x)\, dx\, dt$ d'un passage brusque qui s'opère pendant un intervalle de temps infinitésimal dt, x_0 étant la position initiale, la position finale étant comprise entre x et $(x + dx)$; $a(x, y)$ satisfait aux conditions (9). 3° Probabilité $p_1(x_0, x, t)\, dx$, où p_1 est la densité de probabilité du passage continu de x_0 à x en t secondes sous la condition que les passages brusques soient possibles mais qu'aucun passage brusque ne se produise dans le cas considéré. 4° La probabilité cherchée $\varphi(x_0, x, t)\, dx$, φ étant la densité de probabilité de passage en admettant qu'il s'agit d'un passage continu interrompu par un nombre quelconque de passages brusques. En tenant compte d'une relation entre p et p_1[8]) on trouve que φ est représenté par la formule (10). La fonction cherchée aparait ainsi comme une densité de probabilité totale égale à la somme d'une série infinie de densités. Le premier terme de la série est égal à la densité de probabilité relative à un passage continu, les passages brusques étant possibles en général mais ne se présentant pas dans le cas considéré; le second terme est égal à la densité de probabilité d'un passage continu interrompu une fois par un passage brusque qui a lieu à une époque quelconque; le troisième terme correspond à un passage continu interrompu deux fois par des passages brusques et ainsi de suite.