Michal Křížek

Abelova cena v roce 2017 udělena za teorii waveletů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 3, 161–170

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146921`

Abelova cena v roce 2017 udělena za teorii waveletů

Michal Křížek, Praha

Abstrakt. Abelovu cenu za matematiku získal v roce 2017 francouzský matematik Yves Meyer za rozvoj teorie waveletů. V článku se seznámíme s jeho vědeckým životopisem, hlavní myšlenkou teorie waveletů a jejich použitím v praxi.

1. Úvod

V roce 2017 Norská akademie věd rozhodla, že patnáctou Abelovu cenu získá prof. Yves Meyer (viz obr. 1) z École normale supérieure Paris-Saclay za svou klíčovou roli při rozvoji matematické teorie waveletů. Meyerovy výsledky mají využití jak v čistě teoretických disciplínách, tak i ve výpočtové matematice, informačních technologiích a při vytváření počítačového softwaru. Yves Meyer převzal Abelovu cenu dne 23. května z rukou norského krále Haralda V. v hlavní aule Univerzity v Oslu.

Obr. 1. Yves Meyer (foto B. Eymann, Académie des sciences)

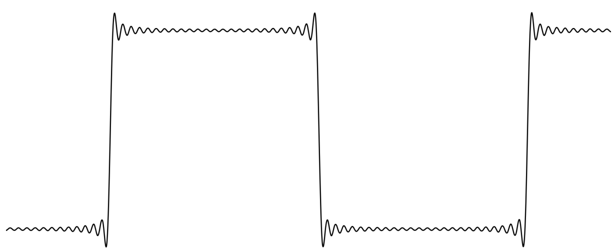
Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@cesnet.cz`

Následující den pak Yves F. Meyer proslovil laureátskou přednášku: *Detection of gravitational waves and time-frequency wavelets.* V ní mj. konstatoval, že Sergej Klimenko sestavil algoritmus pro detekci gravitačních vln [7], který je založen na výsledcích Ingrid Daubechiesové, Stéphana Jaffarda a Jean-Lina Journé z roku 1990. Na konkrétním příkladu Meyer demonstroval, proč k detekci nelze použít klasickou Fourierovu analýzu a proč právě wavelety jsou vhodným nástrojem pro analýzu gravitačních vln, které byly zachyceny v roce 2015 dvěma detektory LIGO vzdálenými od sebe 3002 km, viz [1]. Signály z průchodu gravitační vlny oběma detektory jsou tak korelované, zatímco všudypřítomný bílý šum na obou detektorech by korelovaný být neměl. Waveletová analýza umožnila odhalit gravitační vlnu se vzrůstající frekvencí a amplitudou na krátkém časovém intervalu.

Po Meyerově vystoupení zazněly další tři abelovské přednášky[1] o teorii waveletů:

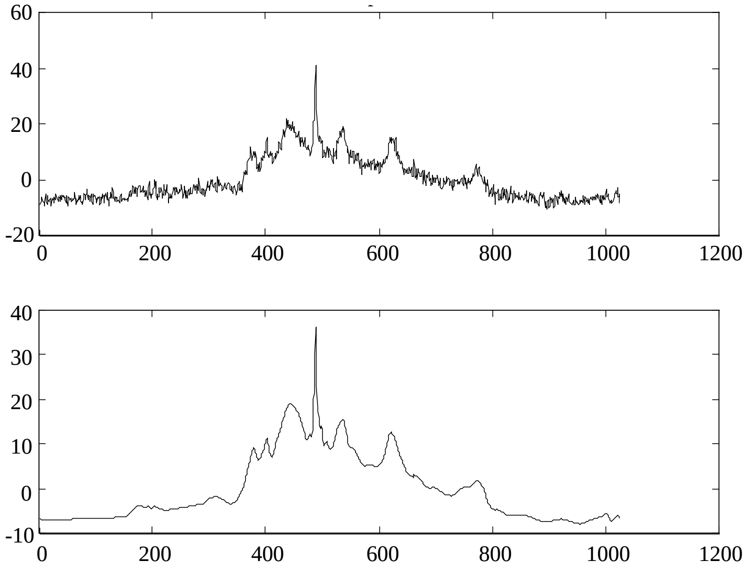
Stéphane G. Mallat: *A wavelet zoom to analyze multiscale world*
Ingrid Daubechiesová: *Wavelet bases: roots, surprises and applications*
Emmanuel Jean Candès: *Wavelets, sparsity and its consequences*

Teorie waveletů (vlnek) navazuje na poměrně dlouhou historii sahající až do roku 1807, kdy Abelův současník Jean Baptiste Joseph Fourier přišel s myšlenkou, že pomocí spočetného ortonormálního systému složeného z jednoduchých trigonometrických funkcí lze popsat některé základní prostory reálných funkcí [18]. Termín *wavelet* použil již v roce 1951 Vladimír Vand pro elementární trigonometrické polynomy $\sin nx$, $\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$ Na svém samočinném mechanickém počítači dokázal sečíst až 100 těchto waveletových funkcí vynásobených příslušnými Fourierovými koeficienty (viz [21]). Bouřlivý rozmach teorie waveletů nastal v osmdesátých letech minulého století při digitálním zpracování signálů. Místo trigonometrických polynomů [8] se začaly používat wavelety, které jsou více lokalizovány v prostorových souřadnicích. Navíc jsou obvykle méně hladké a mají kompaktní nosič nebo rychle ubývají do nekonečna. To umožňuje lépe aproximovat funkce, jež jsou nespojité nebo jejichž grafy mají ostré hroty (srov. obr. 2). Signál je rozložen pomocí waveletové báze do řady, čímž získáme příslušné waveletové koeficienty. Waveletovou reprezentaci lze použít např. k odstra-



Obr. 2. Při aproximaci skokové funkce konečnou trigonometrickou řadou vznikají nežádoucí oscilace v blízkosti bodů nespojitosti. I když budeme zvyšovat počet členů řady, amplituda oscilací se nezmenší (tzv. Gibbsův jev). Waveletová řada však tyto nežádoucí artefakty umožňuje odstranit.

[1] Jejich záznamy jsou volně k dispozici na webové stránce [24].



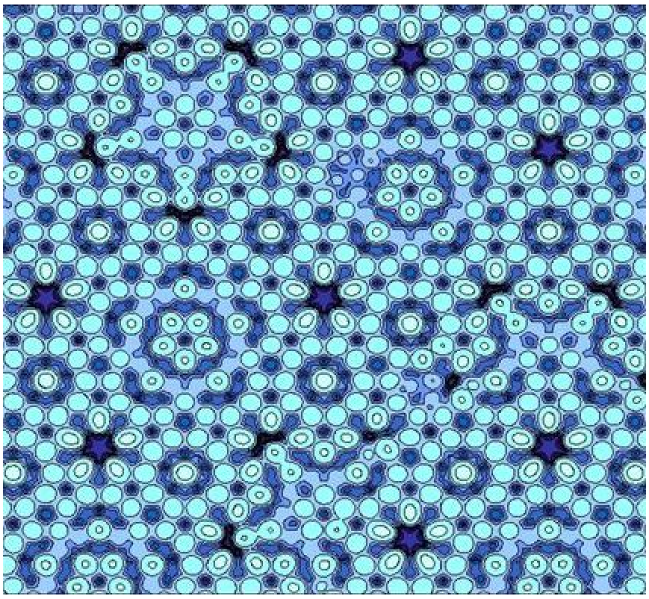
Obr. 3. Odstranění bílého šumu: nahoře je původní signál pozměněný nežádoucím šumem a dole je rekonstrukce signálu pomocí teorie waveletů.

ňování šumu, což se provádí tak, že se z řady vypustí členy odpovídající vysokým frekvencím a malým amplitudám (nežádoucí bílý šum) — viz obr. 3.

2. Vědecký životopis

Yves F. Meyer se narodil 19. července 1939 v Paříži. Od mládí vyrůstal v Tunisu, kde také absolvoval střední školu. Pak vyhrál studentskou soutěž v matematice *Concours général* a následně byl přijat na École normale supérieure v Paříži v roce 1957. V letech 1960–1963 absolvoval vojenskou službu na Prytanée national militaire, kde vyučoval matematiku. V roce 1966 obhájil doktorskou dizertační práci. Jeho školitelem byl Jean-Pierre Kahane. Potom působil jako asistent na Univerzitě ve Štrasburku a od roku 1966 do 1980 byl profesorem na Univerzitě Paris-Sud. Poté až do roku 1986 přednášel na slavné École polytechnique a do roku 1995 na Univerzitě Paris-Dauphine. Pět let (1995–1999) také pracoval v CNRS (Centre national de la recherche scientifique), což je obdoba naší Akademie věd. V období 1999–2003 byl zaměstnán na École normale supérieure, kde od roku 2004 dodnes působí jako emeritní profesor. Podnítil celou řadu mladých lidí k výzkumu v teorii waveletů a pod jeho vedením obhájilo titul Ph.D. kolem 50 studentů.

Na počátku své vědecké kariéry se Yves Meyer zabýval především teorií čísel. Byl okouzlen matematickými objekty, které vykazují pravidelnost a perfektní symetrii, jako jsou například krystalické mřížky. Podrobným studiem rozložení Pisotových čísel (mezi něž patří např. zlatý řez) pak vybudoval teorii [10], jak lze ze zcela pravidelných periodických krystalových mřížek ve vícerozměrném prostoru získat vhodnými projekcemi aperiodická dláždění vykazující jen lokální pětičetné symetrie (viz obr. 4). Inspirován



Obr. 4. Speciální projekcí pravidelné periodické hyperkrychlové krystalické mřížky v $\mathbb{R}^5$ do vhodně nakloněné dvourozměrné roviny lze získat aperiodické dláždění vykazující lokální pětičetné symetrie kvazikrystalu Al-Pd-Mn. Sklon roviny je určen zlatým řezem, což je iracionální číslo.

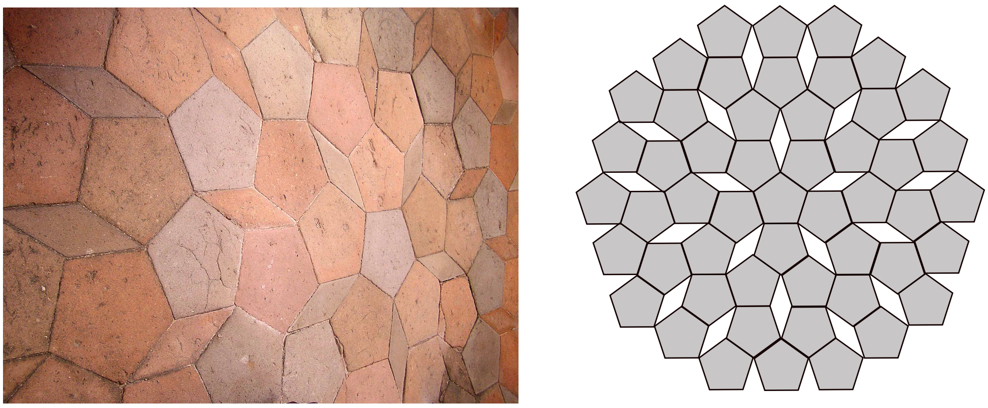
aperiodickým dlážděním[2] Rogera Penrose z roku 1974 (viz např. [9, s. 312] se tak dostal až k matematickému popisu kvazikrystalů (viz [11], [15]). Meyer zavedl množiny, které dnes nesou jeho jméno (*Meyer sets*) a slouží právě k popisu kvazikrystalů.

Meyer se dále zabýval harmonickou analýzou. Tak se dostal k problému rozkladu složitých oscilujících matematických funkcí na jednodušší funkce. Této myšlenky využil i při řešení parciálních diferenciálních rovnic, např. v problému proudění. Zabýval se především problémem turbulence při řešení Navierových–Stokesových rovnic a zkoumal, jak se transformuje energie z malých škál na velké.

Počátkem osmdesátých let se soustředil na teorii waveletů, což okomentoval slovy: *Jednou jsem jel ranním vlakem do Marseille, kde jsem potkal Ingrid Daubechiesovou, Alexe Grossmanna a Jeana Morleta. Bylo to jako v pohádce. Cítil jsem, že jsem konečně našel svůj domov.* Později s nimi Meyer úzce spolupracoval na tom, jak lze pomocí jediné waveletové funkce definovat ortonormální bázi v nekonečněrozměrných prostorech funkcí, což vypadá jako malý zázrak (viz následující kapitola). Jeden typ waveletů dokonce nese Meyerovo jméno, viz obr. 7, [17, s. 82] a [23].

Yves Meyer získal během svého života celou řadu význačných ocenění. Třikrát byl zvaným přednášejícím na Mezinárodních kongresech matematiků (v Nice v r. 1970, ve Varšavě v r. 1983 a v Kjótu v r. 1990). Za své práce z teorie čísel obdržel v roce 1970 Salemovu cenu. Od roku 1993 je řádným členem francouzské učené společnosti Académie des Sciences. V roce 2010 získal prestižní Gaussovu cenu od Německé matematické spo-

[2]Aperiodická dláždění vykazující lokální pětičetnou symetrii znal již Jan Blažej Santini Aichel (1677–1723), viz obr. 5.



Obr. 5. Santiniho aperiodické dláždění v kostele na Zelené hoře u Žďáru nad Sázavou. Dláždění má lokální pětičetnou symetrii, ale nemá globální translační symetrii. Rombická dlaždice je shodná s Penroseovou dlaždicí (vyfotografoval a nakreslil F. Křížek).

lečnosti za fundamentální přínos k teorii čísel, teorii operátorů, harmonické analýze a za průkopnickou úlohu při vývoji matematické teorie waveletů a multirezoluční (tj. víceškálové) analýzy. Je čestným členem Americké akademie věd a umění. V roce 2012 jej Americká matematická společnost poctila titulem Fellow.

3. Hlavní myšlenka teorie waveletů

V roce 1909 maďarský matematik Alfréd Haar zkonstruoval ortonormální systém funkcí pomocí celočíselných translací a dyadických dilatací jediné skokové funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované vztahem (viz obr. 6)

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{pro } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Dnes jí říkáme *Haarův wavelet. Dyadickou dilatací* rozumíme násobení argumentu x dané funkce nějakou celočíselnou mocninou čísla 2. Pro celá čísla $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$ a $n = 2^j + k$ pak Haar definoval funkce (srov. obr. 6)

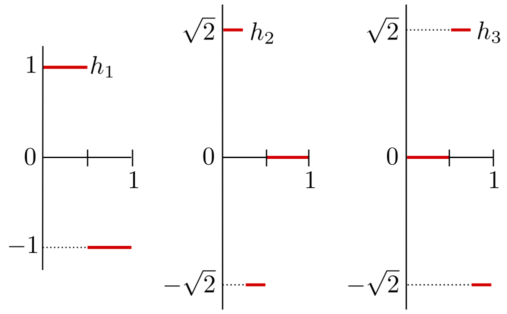
$$h_n(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k).$$

Jestliže dále položíme

$$h_0 \equiv 1,$$

lze dokázat, že systém funkcí $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ zúžených na interval $[0, 1]$ tvoří ortonormální bázi v prostoru funkcí lebesgueovsky integrovatelných s kvadrátem $L^2([0, 1])$. Faktor $2^{j/2}$ zaručuje, že L^2 norma funkce h_n je rovna jedné.

Haarův systém $\{h_n\}$ bázových funkcí se však v praxi nepoužívá, protože po částech konstantní funkce mají špatné aproximační vlastnosti. Tento systém slouží hlavně pro



Obr. 6. Ortonormální Haarovy bázové funkce $h_1 = h$, h_2 a h_3 z prostoru $L^2([0,1])$ (nakreslila H. Bílková).

ilustraci hlavní myšlenky teorie waveletů. Pomocí primitivních funkcí k h_n lze ale definovat jiný ortonormální systém spojitých po částech lineárních funkcí [18].

Dále si ukážeme, jaké vlastnosti požadujeme od waveletových bázových funkcí. Pro jednoduchost se omezíme na Lebesgueův prostor $L^2(\mathbb{R})$. Uvažujme pevnou funkci $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a její translace a dyadické dilatace definované vztahy

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R},\ j,k \in \mathbb{Z}.$$

Jestliže systém funkcí $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pak funkci ψ nazveme *waveletem*[3], viz obr. 7. Každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ lze zřejmě vyjádřit ve tvaru řady

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{jk})\psi_{jk},$$

kde rovnost platí skoro všude a

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

označuje skalární součin v $L^2(\mathbb{R})$. Přitom je skoro všude též splněna známá *Parsevalova rovnost*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{jk})^2.$$

Pro wavelet ψ většinou požadujeme, aby $\psi \in L^1(\mathbb{R})$,

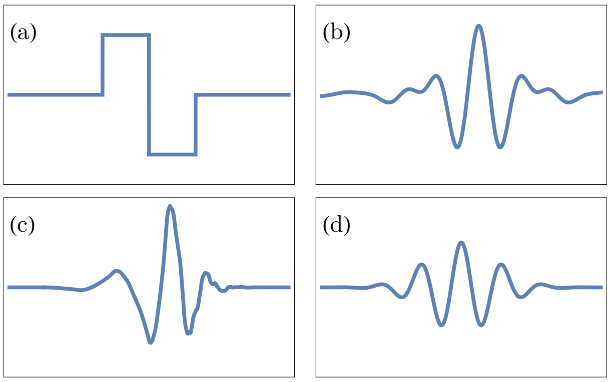
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Dále je výhodné omezit se na wavelety mající též nulové momenty nízkých řádů, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro } m = 1, 2, \ldots, M,$$

kde M je vhodné přirozené číslo. Jinými slovy, wavelet je kolmý na polynomy nižších stupňů.

[3]Anglicky se takové funkci říká *mother wavelet*.



Obr. 7. Příklady několika typických waveletů: (a) Haarův wavelet, (b) Meyerův wavelet, (c) wavelet Daubechiesové, (d) Morletův wavelet

Popsaná konstrukce umožňuje velice snadno a rychle provádět výpočty se zadanou funkcí f popisující signál, neboť pro hladké části signálu jsou příslušné koeficienty malé. Pro dané $\varepsilon > 0$ se pak celkový signál aproximuje jako

$$\tilde{f} = \sum_{|(f,\psi_{jk})|>\varepsilon}\sum (f,\psi_{jk})\psi_{jk}.$$

Malé koeficienty (f,ψ_{jk}) se tak zanedbávají a uchovávají se pouze koeficienty velké v absolutní hodnotě. Nejvíce informace o signálu je obvykle uloženo jen v relativně malém počtu koeficientů. Přitom výpočet skalárních součinů (f,ψ_{jk}) se obvykle neobejde bez numerické integrace (viz [12], [17, s. 162]).

Pomocí vybraných bázových funkcí ψ_{jk} lze pak analyzovat signál na různých úrovních rozlišení. Pokud nejsme spokojeni s výsledkem, můžeme díky ortonormalitě snadno přidávat další bázové funkce, aniž bychom řešili (na rozdíl od metody konečných prvků) rozsáhlé soustavy algebraických rovnic. Bázové funkce můžeme též ubírat nebo vybírat různé frekvenční kanály.[4]

Teorie waveletů se opírá o tzv. *multirozklad prostoru* $L^2(\mathbb{R})$, čímž rozumíme posloupnost do sebe vnořených[5] podprostorů $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$, $j \in \mathbb{Z}$, které splňují následující podmínky:

(i) uzávěr jejich sjednocení je $L^2(\mathbb{R})$,

(ii) průnik všech prostorů V_j obsahuje jen nulovou funkci,

(iii) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$ a $f(x) \in V_0 \iff f(x+1) \in V_0$,

(iv) existuje $\varphi \in V_0$ tak, že $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je báze V_0.

[4] Pásmové filtry připomínající Fourierovu analýzu zvukového signálu dobře zvládá i hlemýžď ve vnitřním uchu ve spolupráci s naším mozkem. Umíme totiž rozlišit jednotlivé zdroje zvuku, pokud současně slyšíme např. hluk jedoucí tramvaje, hlášení řidiče a k tomu ještě posloucháme hudbu.

[5] Tato vnoření připomínají známou numerickou metodu více sítí (angl. multigrid method) pro řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Podmínka (i) vlastně říká, že každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ lze libovolně přesně aproximovat posloupností funkcí $f_n \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ v L^2-normě $\|\cdot\|$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Poznamenejme, že celočíselná translace z podmínky (iii) se pro některé úlohy nepožaduje. Podmínky podobné (i)–(iv) lze nalézt např. v [17]. Pokud bázové funkce nejsou ortogonální, často se používá známý Gramův–Schmidtův ortonormalizační proces k vytvoření nové báze.[6] Bohužel některé příznivé vlastnosti waveletů nelze splnit současně. Lze např. dokázat[17, s. 95], že neexistují nekonečně hladké wavelety s kompaktním nosičem. Proto slavné wavelety Ingrid Daubechiesové [3] s kompaktním nosičem nejsou třídy C^∞. Na druhé straně Morletův wavelet z obr. 7 je nekonečně hladký, ale zase nemá kompaktní nosič. Pokud bychom zhladili Haarovy bázové funkce regularizační metodou z [19, s. 58], tak vzniklé funkce sice budou mít kompaktní nosič a budou nekonečně hladké, ale nebudou ortogonální.

4. Praktické použití waveletů

Teorie waveletů má obrovské množství nejrůznějších aplikací, srov. [3], [6], [22], [23]. Používá se především ke kompresi dat, jejich archivaci a odstraňování šumu. Kupříkladu bezeztrátové bitové mapy otisků prstů jedné osoby vyžadují cca 6 MB paměti počítače, zatímco po úpravě ztrátovou waveletovou transformací stačí paměť 26krát menší a výsledný obrázek je téměř k nerozeznání od bitové mapy (viz obr. 8 a [5, s. 12]). Proto FBI k uchovávání a analýze otisků prstů používá formát opírající se o wavelety [2]. Komprese pomocí standardního JPEG formátu není totiž vhodná, protože se obraz rozkládá na čtverečky 8×8 pixelů a ty se zpracovávají samostatně. Na otiscích se pak zřetelně projevují nežádoucí artefakty JPEG formátu, viz [5, s. 5].

V současnosti se pomocí waveletové reprezentace běžně analyzují jednorozměrná, dvourozměrná[7] či vícerozměrná data, například seismické vlny, změny kurzů na finančních trzích, řeč, hudba, rozmanité obrázky či video. Waveletová redukce umožňuje sledovat filmy v různých stupních rozlišení. Wavelety umožňují dokonce detekovat detaily, které nemohou být našimi smysly rozlišeny, protože analyzují signál na mnoha úrovních rozlišení současně. Mají tak rozsáhlé použití v lékařství při rekonstrukci obrazu např. pomocí magnetické rezonance. Podstatně totiž urychlují výpočet, protože vznikají řídké struktury, které lze úsporně ukládat. Nový obor počítačového vidění využívá wavelety k digitalizaci zraku navrhovaných inteligentních robotů. S wavelety se setkáváme také ve skenerech.

Teorie waveletů se používá i k řešení diferenciálních a integrálních rovnic například Galerkinovou metodou, viz [5] a [17]. Slouží též k detekci hran či ostrých hrotů, k rozpoznávání obrazců, ke zjišťování dlouhodobých trendů (např. sezónní oscilace)

[6] Báze běžně používané v metodě konečných prvků pro řešení diferenciálních rovnic obvykle nejsou ortogonální, ale vedou na řídké matice. Přidáním jedné bázové funkce je proto třeba znovu vyřešit celou soustavu algebraických rovnic pro neznámé koeficienty bázových funkcí. Existují však výjimky. Např. Szabó a Babuška [20, s. 38]. konstruují ortonormální bázi v Sobolevově prostoru $H_0^1((-1,1))$ se skalárním součinem $(v', w')_{L^2((-1,1))}$ tak, že integrují Legendreovy polynomy, které jsou ortogonální v $L^2((-1,1))$.

[7] Dvourozměrné (vícerozměrné) wavelety lze zkonstruovat pomocí jednorozměrných waveletů, viz např. přednášky v [24].

Obr. 8. Vlevo je bitová mapa otisku prstu, vpravo její waveletový obraz, který má 26krát menší nároky na paměť počítače (foto Chris Brislawn, Los Alamos National Laboratory).

či k počítačovému modelování křivek a ploch. Pomocí teorie waveletů lze analyzovat struktury s velice komplikovaným tvarem (např. multifraktály). Wavelety přispěly i k současným úspěchům mise Herschelova vesmírného dalekohledu a k objevu gravitačních vln [1].

5. Meyerův odkaz

Yves Meyer je specialista na klasickou harmonickou analýzu, což mu umožnilo rozšířit teorii waveletů o mnohé výsledky z teorie operátorů. Zabýval se jak spojitou, tak diskrétní waveletovou transformací. Společně s Ronaldem R. Coifmanem vybudoval Calderónovu–Zygmundovu teorii v harmonické analýze [16]. Yves Meyer s Ingrid Daubechiesovou a Alanem Grossmannem v polovině osmdesátých let minulého století zkonstruovali speciální báze Hilbertových prostorů funkcí s využitím dilatačních a translačních technik [4]. V roce 1988 Y. Meyer se Stéphanem G. Mallatem publikovali své první průkopnické práce o konstrukci ortonormálních waveletových bází. Meyer též vyvinul rychlou waveletovou transformaci využívající pyramidální multirezoluční algoritmus. Ukázal rovněž, že wavelety jsou vysoce účinným nástrojem k řešení singulárních integrálních rovnic.

Yves Meyer je autorem několika monografií (viz např. [10], [11], [13], [14], [16]). První dvě jsou o teorii čísel, které se Meyer věnoval v sedmdesátých letech minulého století. Další se už zabývají teorií waveletů. Databáze Mathematical Reviews eviduje přes 200 Meyerových vědeckých prací, na něž získal kolem 5 000 citací.

Poděkování. Děkuji Jaroslavu Kautskému, Filipu Křížkovi, Karlu Segethovi, Antonínu Slavíkovi a Janě Žďárské ze cenné připomínky. Článek byl podpořen RVO 67985840.

L i t e r a t u r a

[1] Abbott, B. P., et al.: *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger.* Phys. Rev. Lett. [online] *116* (2016), paper No. 061102, 1–16.

[2] Brislawn, C. M.: *Fingerprints go digital.* Notices Amer. Math. Soc. *42* (1995), 1278–1283.

[3] Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets.* SIAM, CBMS Lecture Notes *61* (1992).

[4] Daubechies, I., Grossmann, A., Meyer, Y.: *Painless nonorthogonal expansions.* J. Math. Phys. *27* (1986), 1271–1283.

[5] Frazier, M. W.: *An introduction to wavelets through linear algebra.* Springer, New York, 1999.

[6] Graps, A.: *An introduction to wavelets.* IEEE, 1995.

[7] Klimenko, S., et al.: *Method for detection and reconstruction of gravitational wave transient with networks of advanced detectors.* Phys. Rev. D [online] *93* (2016), paper No. 042004.

[8] Koukal, S., Křížek, M., Potůček, R.: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru.* Academia, Praha, 2002.

[9] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím.* Edice Galileo, sv. 39. Academia, Praha, 2011.

[10] Meyer, Y.: *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* Lecture Notes in Math. 117, Springer-Verlag, 1970.

[11] Meyer, Y.: *Algebraic numbers and harmonic analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1972.

[12] Meyer, Y.: *Wavelets, quadrature mirror filters and numerical image processing (in French).* Les ondelettes en 1989 (Orsay, 1989), Lecture Notes in Math. 1438, Springer, Berlin, 1990, 14–25, 196–197.

[13] Meyer, Y.: *Wavelets and operators.* Cambridge Stud. Adv. Math. 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[14] Meyer, Y.: *Wavelets. Algorithms & applications.* SIAM, Philadelphia, 1993.

[15] Meyer, Y.: *Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers.* Beyond Quasicrystals. F. Axel, D. Gratias (eds.), Les Editions de Physique, Springer, 1995, 3–16.

[16] Meyer, Y., Coifman, R.: *Wavelets. Calderón–Zygmund and multilinear operators.* Cambridge Stud. Adv. Math. 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[17] Najzar, K.: *Základy teorie waveletů.* Karolinum, Praha, 2004.

[18] Najzar, K., Holman, P.: *Wavelets.* PMFA *44* (1999), 294–303.

[19] Nečas, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Academia, Prague, 1967.

[20] Szabó, B., Babuška, I.: *Finite element analysis.* John Wiley, New York, 1991.

[21] Vand, V.: *Magnifying 100 million times.* The Meccano Magazine *36* (1951), 247.

[22] Walnut, F. W.: *An introduction to wavelet theory.* Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, 2002.

[23] Wojtaszczyk, P.: *Mathematical introduction to wavelets.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[24] `http://www.abelprize.no`