Učitel matematiky

Ladislav Beran; Milan Trch

Přímka, kterou hledáte (3)

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 4, 222–227

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150583`

PŘÍMKA, KTEROU HLEDÁTE (3)

Ladislav Beran, Milan Trch

V předchozím článku [2, Věta 1] jsme ukázali, že přímka o rovnici $y = kx + q$ je minimální přímkou bodů

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n],$$

právě když k a q jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} Ak + nq &= B \\ Ck + Aq &= D, \end{aligned} \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned} A &:= a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ B := b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \\ C &:= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,\ D := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \end{aligned}$$

Tento výsledek jsme vyvodili za předpokladu, že

$$n \geq 2 \tag{2}$$

a že

alespoň dvě z čísel $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *se sobě nerovnají.* (3)

Právě uvedený poznatek nyní doplníme.

Věta 1. *Při předpokladech (2) a (3) má soustava (1) právě jedno řešení*

$$k = \frac{nD - AB}{nC - A^2} \quad \& \quad q = \frac{BC - AD}{nC - A^2}. \tag{4}$$

Důkaz: První rovnici soustavy (1) vynásobme číslem $-A$, druhou číslem n a oba vztahy sečtěme. Potom první rovnici vynásobme číslem C a druhou číslem $-A$ a získané sečtěme. Pro pohodlí čtenáře uveďme obvyklý odpovídající zápis těchto úprav:

$$\begin{array}{lll} Ak + nq = B & |\cdot(-A) & |\cdot C \\ Ck + Aq = D & |\cdot n & |\cdot(-A) \end{array}$$

Získáváme tak nejprve

$$k(nC - A^2) = nD - AB$$

a pak také

$$q(nC - A^2) = BC - AD.$$

Vzhledem k tomu, že $nC - A^2 \neq 0$ podle [1, Věta 1], dostáváme pro k a q udané výrazy. Dosazením se snadno přesvědčíme, že splňují soustavu (1). □

Právě uvedený poznatek nyní doplníme.

Věta 2. *Při předpokladech (2) a (3) pro libovolně zadané body* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$ *existuje právě jedna jejich minimální přímka.*

Důkaz: Platnost výroku věty 2 je bezprostředním důsledkem [1, Věta 1] a věty 1. □

Burke a Hodgson [3, str. 103] nazývají *centroidem* bodů $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$ bod $[\overline{a}, \overline{b}]$, kde

$$\overline{a} := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{A}{n} \quad \& \quad \overline{b} := \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{B}{n}.$$

Ve zmíněném článku ukazují, že centroid leží na minimální přímce.

Pro tento výsledek uvedeme velmi krátký alternativní důkaz. Nadto přirozeným způsobem zavedeme tzv. *přidružený centroid* $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, a to takto: Je-li $A = 0$, definujeme

$$\tilde{a} := \frac{C}{n}, \tilde{b} := \frac{B}{n} + \frac{D}{n}.$$

Je-li $A \neq 0$, definujeme

$$\tilde{a} := \frac{C}{A}, \tilde{b} := \frac{D}{A}.$$

Věta 3. *Při předpokladech (2) a (3) leží centroid i přidružený centroid na minimální přímce bodů* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$.

Důkaz: Podle (1) je $\frac{B}{n} = k\frac{A}{n} + q$, což říká, že centroid $[\frac{A}{n}, \frac{B}{n}]$ leží na minimální přímce p_{min}.

Je-li $A \neq 0$, plyne z (1), že $\frac{D}{A} = k\frac{C}{A} + q$, odkud vidíme že přdružený centroid $[\frac{C}{A}, \frac{D}{A}]$ leží na p_{min}.

Je-li $A = 0$, je dle (1) $q = \frac{B}{n}$ a $k = \frac{D}{C}$. To říká, že $y = \frac{D}{C}x + \frac{B}{n}$ je rovnicí minimální přímky. Přitom

$$\frac{D}{C} \cdot \frac{C}{n} + \frac{B}{n} = \frac{B}{n} + \frac{D}{n}$$

ukazuje, že přidružený centroid $[\frac{C}{n}, \frac{B}{n} + \frac{D}{n}]$ leží na p_{min}. □

Věta 4. *Při předpokladech (2) a (3) jsou při zadaných bodech* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$ *centroid a přidružený centroid dva různé body určující jednoznačně minimální přímku.*

Důkaz: Je-li $A = 0$, je centroidem bod $[0, \overline{b}]$ a přidruženým centroidem bod $[\frac{C}{n}, \frac{B}{n} + \frac{D}{n}]$ a podle [2, (5)] je $C \neq 0$.

Předpokládejme nyní, že $A \neq 0$. Kdyby $[\overline{a}, \overline{b}] = [\tilde{a}, \tilde{b}]$, bylo by

$$\frac{A}{n} = \overline{a} = \tilde{a} = \frac{C}{A}$$

a měli bychom $A^2 = nC$, což je spor s [1, Věta 1]. □

Věta 5. *Při předpokladech (2) a (3) pro řešení k a q soustavy (1) platí*

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i - \overline{a})}{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \overline{a})} \tag{5}$$

a

$$q = \frac{\overline{b}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \overline{a}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \overline{a})^2}. \tag{6}$$

Důkaz: Uvažme, že

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\overline{a}\sum_{i=1}^{n}a_i+\overline{a}^2\sum_{i=1}^{n}1=$$
$$=C-2\frac{A^2}{n}+\frac{A^2}{n^2}\cdot n=C-\frac{A^2}{n}$$

a že

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i-\overline{a})=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\overline{a}\sum_{i=1}^{n}b_i=D-\frac{A}{n}B.$$

Vzorec (5) nyní plyne z toho, že podle (4)

$$k\;=\frac{D-\frac{AB}{n}}{C-\frac{A^2}{n}}.$$

Podobně usoudíme, že pravá strana vzorce (6) se podle (4) rovná

$$\frac{\frac{B}{n}C-\frac{A}{n}D}{C-\frac{A^2}{n}}=\frac{BC-AD}{nC-A^2}=q.$$

□

Poznámka. Protože minimální přímka p_{min} prochází podle věty 3 centroidem $[\overline{a},\overline{b}]$, lze její rovnici s užitím vzorce (5) psát ve tvaru

$$y-\overline{b}=k(x-\overline{a})=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i-\overline{a})}{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})^2}(x-\overline{a}),$$

což se shoduje se vzorcem Burkeho a Dodgsona [3, s. 107].

Doplňme na závěr numerický příklad z úvodu článku [1]. Ve zmíněném příkladu je

$$A\;=25,B=19,C=109,D=71 \text{ a } n=7.$$

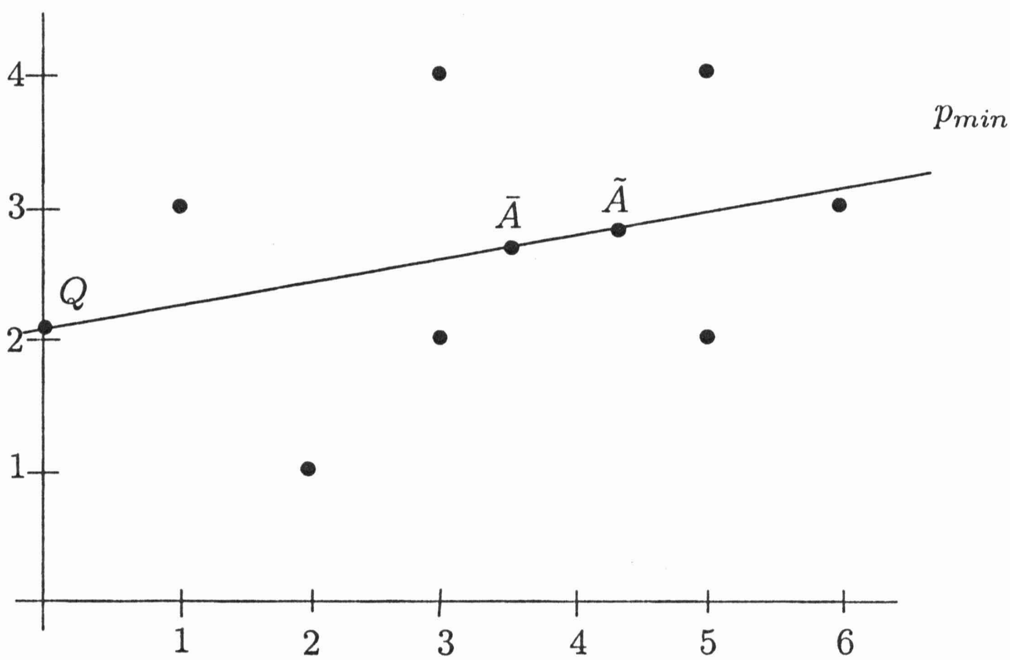
Pro centroid proto nacházíme

$$\overline{A}\;:=[\overline{a},\overline{b}]=[\frac{A}{n},\frac{B}{n}]=[\frac{25}{7},\frac{19}{7}]\doteq[3,57;2,71]$$

a pro přidružený centroid dostáváme

$$\tilde{A} := [\tilde{a}, \tilde{b}] = [\frac{C}{A}, \frac{D}{A}] = [\frac{109}{25}, \frac{71}{25}] \doteq [4,36; 2,84].$$

Minimální přímku p_{min} z [1, obr. 2] bychom tedy mohli určit jako spojnici centroidu $\overline{A}$ s přidruženým centroidem $\tilde{A}$ s kontrolním bodem $Q := [0, q] \doteq [0; 2,14]$ (srovn. připojený obr. 1).



Obr. 1

Poznamenejme, že k vyhledávání minimální přímky lze s výhodou užít pomoci tzv. vědeckých kalkulaček.

Literatura

[1] Beran, L., Trch, M., Přímka, kterou hledáte (1), *Učitel matematiky* **70**(2009)

[2] Beran, L., Trch, M., Přímka, kterou hledáte (2), *Učitel matematiky* **71**(2009)

[3] Burke, M., Hodgson T., Using Technology to Optimize and Generalize: The Least-Squares Line, *Mathematics Teacher* **101**(2007), 102–107.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz