Martina Janáčková
Prečo sú niektoré kombinatorické úlohy ťažké? (2)

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 4, 211–217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150735

PREČO SÚ NIEKTORÉ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY ŤAŽKÉ? (2)

MARTINA JANÁČKOVÁ

Dokončení z minulého čísla

5.3. Úloha „Hokej"

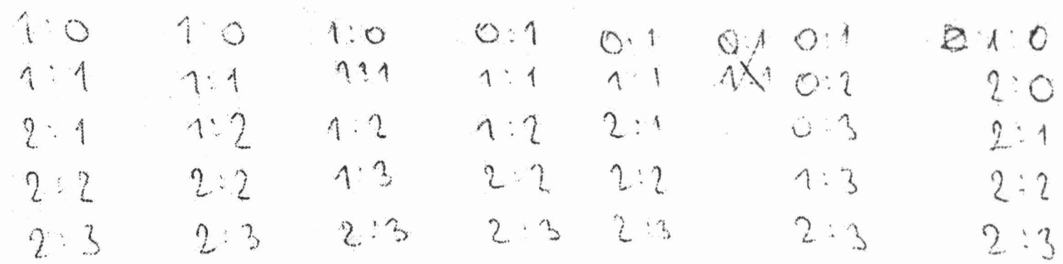
Pri riešení úlohy „Hokej" je situácia ešte komplikovanejšia. Kým pri vypisovaní jednotlivých permutácií vo všetkých ostatných úlohách zapisujem po každom priradení objektu pozícii len jeden symbol (○ alebo □, čiaru „nahor" alebo „vpravo", jedno z písmen A, B, C, D, E), v úlohe „Hokej" dva symboly (počet gólov, ktoré dalo 1. mužstvo i počet gólov, ktoré dalo 2. mužstvo). Okrem toho treba zobrať do úvahy predchádzajúci gólový stav, na ktorý treba nadviazať. Nestačí teda uvažovať len o tom, ktoré mužstvo dalo gól, ale tento treba pripočítať k výslednému stavu po predchádzajúcom góle. Obe skutočnosti zapríčiňujú, že priebehy zápasov sú na 1. pohľad neprehľadné. Tým sa systematické vypisovanie permutácií bez možnej spätnej kontroly stáva náročné. Žiak preto radšej volí len nejaký – na vonkajších znakoch založený – menej dokonalý systém. Dokazuje to aj komentár Martiny k jej postupu pri riešení tejto úlohy (obr. 2). V hranatých zátvorkách uvádzame časť riešenia, na ktoré žiačka v danom momente ukazovala: „*Najprv som začínala, že som si ich rozdelila na prvé a druhé družstvo. Najskôr vyhrávalo prvé družstvo a druhé sa to snažilo dorovnať.* [1. riadok] *Potom som dala tak, že sa naháňali viac-menej. Že dal prvý, potom to dorovnal* [1:1, 2. riadok], *potom dal znova ten* [1:2], *zas dorovnal* [2:2] *a tak. Tu som si dala preskakovano. Tento dal prvý gól* [0:1], *ten dal tiež – dorovnal* [1:1], *ale vzápätí na to dal ďalší gól* [2:1], *tento ich vzápätí dobehol* [2:2] *a vzapätí znova dal o gól viac* [2:3]. *To isté som urobila tu, lenže opačne* [4. riadok]."

0:1	0:2	0:3	1:3	2:3
0:1	1:1	1:2	2:2	2:3
0:1	1:1	2:1	2:2	2:3
1:0	2:0	2:1	2:2	2:3
1:0	1:1	2:1	2:2	2:3
1:0	1:1	1:2	1:3	2:3

Obr. 2

Pre ďalšie úvahy bola pre nás podnetná 1. Martinina veta: „*... som si ich rozdelila na prvé a druhé družstvo.*“ Domnievame sa, že nejde o uvedomenie si dvoch aktérov úlohy (1. a 2. družstvo), ale ňou popisuje rozdelenie riešenia úlohy na dve časti: 1. „Hľadaj všetky možnosti, keď prvý gól dá prvé družstvo“, 2. „Hľadaj všetky možnosti, keď prvý gól dá druhé družstvo“. Takýto postup sa vyskytol v piatich riešeniach. Domnievame sa, že žiak má potrebu vniesť do neprehľadnej množiny priebehov všetkých zápasov určitý systém. Už prvý krok – ktoré mužstvo dalo 1. gól – umožňuje členiť všetky priebehy na dve podmnožiny, čím súčasne dochádza k transformácií úlohy na dve úlohy s menšou pracovnou množinou a tým aj k jej zjednodušeniu. Častým (5 zo 6 riešení) sprievodným javom bolo však to, že žiaci pri hľadaní priebehov všetkých zápasov druhej skupiny v poradí (v tomto prípade ide o zápasy, keď 1. gól dalo 2. družstvo) napodobňujú priebeh zápasov prvej skupiny s výnimkou prvého kroku: „*To isté som urobila tu, lenže opačne.*“ Dôvodom môže byť zdanie, že „ak je možnosť, že dá prvý gól 1. družstvo s možnosťou, že najskôr bude skórovať 2. družstvo rovnocenná, potom budú rovnocenné aj obe skupiny zápasov“. Tento spôsob tvorby možností je tiež nenáročný na rozmýšľanie, pričom jeho aplikáciou vznikajú permutácie nové. V prípade, že v 1. skupine neboli vyčerpané všetky možnosti a ani pri asymetrických úlohách (počet riešení 1. skupiny sa odlišuje od počtu 2. skupiny) však ku kompletnému riešeniu zvyčajne nevedie.

Z rovnakého dôvodu nevedie k úspechu ani samotné uplatnenie myšlienky, že počet zápasov v oboch skupinách bude rovnaký. Predpokladanie symetrie, či už počtu zápasov alebo samotných priebehov v jednotlivých skupinách, je očividné v Janinom riešení:



(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
10100	**10010**	**10001**	**01010**	**01100**	**01**	**00011**	**11000**

Obr. 3

V priebehu (d) je zamenené každé družstvo, ktoré v priebehu zápasu (a) skórovalo, za opačné až po 5. gól v poradí, kde už zmena nebola z dôvodu presne stanoveného počtu gólov 1. a 2. družstva možná. Podobný vzťah je aj medzi priebehmi (e) a (b). Priebeh (f) je nedokončený a preškrtnutý. Jedno zo zdôvodnení takéhoto javu by mohlo byť práve to, že Jana možnosti (d)–(f) vytvára popísaným spôsobom podľa možností (a)–(c) (symetria priebehov v skupinách). Tým má však skupina zápasov, kde dalo 1. gól 2. družstvo, o priebeh menej. Po prestávke pripisuje priebeh (g). V zápätí sa pýta: *„Šesť ich je tých možností?“* K našim úvahám o tendencii zachovať rovnaký počet permutácií v oboch skupinách nás priviedli 3 postrehy:

1. Jana sa neuspokojila s vypísanými priebehmi (a)–(e), hoci podľa systému, ktorým boli vytvárané, už ďalšie neexistujú.
2. Priebeh (g) začína gólom 2. družstva ako aj (d) a (e).
3. Zopakovaním predchádzajúceho postupu by mohla vytvoriť ďalší priebeh ((h)), ale neurobí to a riešenie vyhlási za konečné.

Na základe týchto postrehov sa domniavame, že menší počet zápasov v 2. skupine ((d)–(e)) vyvolalo potrebu túto doplniť o jeden zápas, ktorý začína gólom 2. družstva. Vieme si predstaviť, že že okončenie riešenia sa mohlo riadiť nasledovnou úvahou: „Keďže zápasy 1. skupiny boli vypísané systematicky, táto skupina je z hľadiska vypísania všetkých možností vyčerpaná. Z dôvodu symetrie 2. skupina tiež. Toto sú teda všetky možnosti.“

Všetky spomínané aspekty môžu prispievať k tomu, že riešenia úlohy „Hokej“ sa budú vyznačovať nižšou úspešnosťou z hľadiska vypísania všetkých možností než riešenia všetkých ostatných úloh.

6. ZÁVER

Hoci žiaci riešili úlohy, ktoré boli z matematického hľadiska identické, príslušné riešenia jednotlivých úloh sa od seba odlišovali počtom nájdených možností i ich poradím. Naše pozorovania sú v súlade s pozorovaniami iných autorov (*Bauersfeld* [1], *English* [9], *Hefendehl-Hebeker* a *Törner* [10], *Trner* [28] ...) (viď kapitola 2). Domnievame sa, že tieto rozdiely môžu byť podmienené viacerými skutočnosťami, napr.:

- či ide o úlohu, u ktorej je zrejmá príslušnosť k niektorému zo základných typov úloh
- grafickým znázornením prostredia úlohy
- či zadanie úlohy navádza k prehľadnému zápisu jednotlivých možností a pod.

Tým sme zoznam faktorov vplývajúcich na úspešnosť riešenia rozšírili o ďalšie potenciálne položky.

Neúspešnosťou spomedzi ostatných vynikla najmä úloha „Hokej“. Myslíme si, že príčina tohoto javu tkvie v spôsobe zápisu riešenia. Ukazuje sa, že žiaci gymnázia majú tendenciu vypisovať možnosti podľa určitého systému. Aby tento mohli dodržať, je potrebné udržiavať prehľadnosť v tom, čo je už objavené. Kým zo zápisu riešenia v úlohe „Priehradky“ je na prvý pohľad zrejmé, ktorými spôsobmi už gule boli do priehradiek uložené, v úlohe „Hokej“ sa táto prehľadnosť stráca. Totiž to, čo klasifikujeme (góly jednotlivých družstiev), sa priamo v zápise nevyskytuje. Zapísané je iba skóre pred a po nejakom góle resp. zmena skóre, ktorú tento gól spôsobil. Ide teda len o akýsi opisný spôsob zápisu udalostí, ktoré však samé nie sú reprezentované. Gól je reprezentovaný len nepriamo, implicitne. Nakoľko riešenie úlohy typu „Hokej“ požaduje popísanú postupnú klasifkáciu úkonov (udalostí, činností), rozhodli sme sa ju pomenovať ako „klasifikácia implicitných krokov“.

V blízkej budúcnosti plánujeme uskutočniť podobný výskum na širšej vzorke, a teda zistiť, do akej miery sú výsledky našej sondy štatisticky relevantné. Tiež by bolo zaujímavé vyskúmať, za akých podmienok, prípadne v akom veku respondentov, sa chybovosť úlohy „Hokej“ v populácii dostane do blízkosti chybovosti matematicky izomorfných úloh.

Uvádzaná kvalitatívna analýza mala za cieľ získať podkladové informácie pre štatistický výskum. Pre učiteľov má uskutočňovanie podobných analýz aj ďalší význam – núti nás vcítiť sa do myslenia žiakov. Vedieť, čo sa deje v hlave žiaka, keď rieši úlohu, je jedna z dôležitých podmienok pre poskytnutie účinnej pomoci žiakom v pedagogickej praxi.

Literatura

[1] Bauersfeld, H., *Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens.* In: Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Dörfler, W., Fischer, R., Wien: Hölder, Pichler, Tempsky; Stuttgart, Teubner, 1985, s. 7–25.

[2] Caroll, J. M., Thomas, J. C., Malhotra, A., Presentation and representation in design problem-solving, *British Journal of psychologie* **71**, 1980, s. 143–153.

[3] Clement, E., Léffet du contexte semantique dans lélaberation de la representation du probleme, *Lánnee Psychologique* **96**, 1996, s. 409–442.

[4] English, L., Young children's combinatoric strategies, *Educational studies in mathematics* **22**(5), 1991, s. 451–474.

[5] English, L., Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving, *British journal of educational psychology* **62**(2), 1992, s. 203–216.

[6] English, L., Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems, *Journal for research in mathematics education* **24**(3), 1993, s. 255–273.

[7] English, L., Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form, *The journal of mathematical behavior* **15**(1), 1996, s. 81–112.

[8] English, L., Children's perspectives on the engagement potential of mathematical problem task, *School science and mathematics* **98**(2), 1998, s. 67–73.

[9] English, L., *Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning.* In: Developing mathematical reasoning, K–12. Stiff, L. V., Curcio F. R. National Council of Teachers of Mathematics. 1999, s. 22–36.

[10] Hefendehl-Hebeker, L., Törner, G., Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik, *Didaktik der Mathematik* **4**, 1984, s. 245–262.

[11] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990, s. 472–479.

[12] Hejný, M., Michalcová, A., *Skúmanie matematického riešiteľského postupu 2*, Metodické centrum, Bratislava, 2001.

[13] Hesse, F. W., Vergleichende Analyse kognitiver Prozesse bei semantisch unterschiedlichen Problemeinbettungen, *Sprache und Kognition* **4**(3), 1985, s. 139–153.

[14] Hoffmann, A., Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit, *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre* **21**, 2003, s. 342.

[15] Janáčková, M., Ako žiaci SŠ riešili jeden kombinatorický príklad, *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* **33**(2), 2004, s. 8–21.

[16] Jodas, V., *Propedeutika kombinatoriky a teórie pravdepodobnosti vo vyučovaní matematiky na ZŠ a v nižších triedach gymnázia*, Metodické centrum mesta Bratislavy, Bratislava, 1998, s. 8–10.

[17] Kotovsky, K., Hayes, J. R., Simon, H. A., Why are some problems hard? Evidence from tower of hanoi, *Cognitive Psychology* **17**, 1985, s. 248–294.

[18] Kratochvílová, J., *Pupil's Strategies in Abracadabra problem* In: Proccedings SEMT 95, 1985, s. 103–105.

[19] Kratochvílová, J., *Strategie řešení jedné kombinatorické úlohy*. Diplomová práca, Praha, 1995.

[20] Martino, A. M., *Elementary student's construction of mathematical knowledge: Analysis by profile*, Rutgers The State University of New Jersey, New Brunswick, 1992.

[21] Reed, S. K., Ackinclose, C., Voss, A., Similarity versus inclusiveness, *Memory-and-Cognition* **18**(1), 1990, s. 83–98.

[22] Siegler, R., The twenty questions game as a form of problem solving, *Child-Development* **48**(2), 1977, s. 395–403.

[23] Smida, J., *Kombinatorika pre 2. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1989, s. 32.

[24] Stein, M., Untersuchungen zum Lsungsverhalten von Grundschlern bei der Bearbeitung unlsbarer geometrischer Puzzles, *Mathematica didactica* **1**(17), 1994, s. 86–122.

[25] Stein, M., Elementare Bausteine von Problemlseprozessen: Gestaltorientierte Verhaltensweisen., *Mathematica didactica* **2**(18), 1995, s. 59–84.

[26] Stein, M., Elementare Bausteine der Problemlsefähigkeit: Problemlösetechniken., *Journal für Didaktik der Mathematik* **2**(17), 1996, s. 123–146.

[27] Stein, M., Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Logisches Denken und Argumentieren, *Journal für Didaktik der Mathematik*, 1999.

[28] Törner, G., Isomorphie – ein unterrichtsrelevanter Aspekt in der Kombinatorik, *Zentralblatt fr Didaktik der Mathematik* **3**, 1987, s. 118–123.

Martina Janáčková
Gymnázim Veľká okružná
Veľká okružná 22
010 01 Žilina
e-mail: janackova@gvoza.sk