Učitel matematiky

Ladislav Beran; Petr Kovář; Radko Pöschl

Incidenční matice uspořádání má determinant rovný jedné

Učitel matematiky, Vol. 12 (2004), No. 3, 184–188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150833

INCIDENČNÍ MATICE USPOŘÁDÁNÍ MÁ DETERMINANT ROVNÝ JEDNÉ

Ladislav Beran, Petr Kovář, Radko Pöschl

Tento článek má být mj. příspěvkem ke stále trvající diskusi, zda lze matematiku počítat mezi experimentální vědy. Základem článku je výsledek, který je motivován diskusemi, které vedl první z autorů se svými studenty při cvičeních na matematicko-fyzikální fakultě UK.

Připomeňme nejprve tyto známé pojmy: Relace θ na množině $M \neq \emptyset$ se nazývá *reflexívní,* jestliže pro každé $a \in M$ je $(a, a) \in \theta$; nazývá se *symetrická,* jestliže ze vztahu $(a, b) \in \theta$ plyne $(b, a) \in \theta$ pro každé $a, b \in M$; říkáme, že je *antisymetrická,* jestliže z toho, že $(a, b) \in \theta$ a $(b, a) \in \theta$ plyne pro každé $a, b \in M$, že $a = b$. Relace θ je *tranzitivní,* jestliže

$$\forall a, b, c \in M \quad [(a, b) \in \theta \quad \& \quad (b, c) \in \theta] \quad \Rightarrow \quad (a, c) \in \theta$$

Relace θ se nazývá *relace ekvivalence* na M, je-li na M reflexívní, symetrická a tranzitivní; nazývá se *relace uspořádání* na M, je-li reflexívní, antisymetrická a tranzitivní.

Třetí z autorů pro kolektiv připravil tabulkové zpracování přehledu platnosti výše zmíněných vlastností pro všechny relace na dvouprvkové množině $\{a, b\}$ (srovnej s tabulkou).

Všichni ze studijní skupiny měli tak tento přehled před očima a byli dotázáni, jaké hypotézy (i tzv. „šílené") by z tohoto materiálu mohli utvořit. Tak přišla na svět tato domněnka:

Hypotéza A. Incidenční matice relace θ na množině M je incidenční maticí uspořádání právě tehdy, když má determinant rovný jedné.

relace	inc. mat.	graf	ref.	sym.	antis.	tr.	ekv.	usp.
$\theta_0 = \emptyset$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$a \quad b$	0	1	1	1	0	0
$\theta_1 = \{(a,a)\}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \quad b$	0	1	1	1	0	0
$\theta_2 = \{(a,b)\}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$a \rightarrow b$	0	0	1	1	0	0
$\theta_3 = \{(b,a)\}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$a \leftarrow b$	0	0	1	1	0	0
$\theta_4 = \{(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$a \quad \underset{\circlearrowleft}{b}$	0	1	1	1	0	0
$\theta_5 = \{(a,a),(a,b)\}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \rightarrow b$	0	0	1	1	0	0
$\theta_6 = \{(a,a),(b,a)\}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \leftarrow b$	0	0	1	1	0	0
$\theta_7 = \{(a,a),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \quad \underset{\circlearrowleft}{b}$	1	1	1	1	1	1
$\theta_8 = \{(a,b),(b,a)\}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$a \rightleftarrows b$	0	1	0	0	0	0
$\theta_9 = \{(a,b),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	$a \rightarrow \underset{\circlearrowleft}{b}$	0	0	1	1	0	0
$\theta_{10} = \{(b,a),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	$a \leftarrow \underset{\circlearrowleft}{b}$	0	0	1	1	0	0
$\theta_{11} = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \rightleftarrows b$	0	1	0	0	0	0
$\theta_{12} = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \rightarrow \underset{\circlearrowleft}{b}$	1	0	1	1	0	1
$\theta_{13} = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \leftarrow \underset{\circlearrowleft}{b}$	1	0	1	1	0	1
$\theta_{14} = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$a \rightleftarrows \underset{\circlearrowleft}{b}$	0	1	0	0	0	0
$\theta_{15} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\underset{\circlearrowleft}{a} \rightleftarrows \underset{\circlearrowleft}{b}$	1	1	0	1	1	0

Druhý z autorů podal promptně protipříklad, že pro tříprvkovou množinu existuje incidenční matice s determinantem rovným jedné, ale není to incidenční matice relace uspořádání: Vskutku, matice

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

je incidenční maticí relace $\theta = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)\}$ a má determinant rovný jedné. Relace θ nicméně nesplňuje požadavek tranzitivity: platí $(b,c) \in \theta$ a $(c,a) \in \theta$, ale $(b,a) \notin \theta$. Tato relace proto není relací uspořádání na množině $M = \{a,b,c\}$.

To vedlo k nové formulaci:

Hypotéza B. Je-li A incidenční maticí uspořádání na množině M, pak $\det A = 1$.

Dospěli jsme tak ke klasické situaci (citujeme [2, IV.7]): „... *Co jsme získali?* ... pouhý opis faktů v rámci našeho experimentálního materiálu a naději, že popsané lze aplikovat i nad rámec experimentálního materiálu.

Jak jsme získali naši domněnku? V podstatě shodně jako získávají domněnky obyčejní lidé nebo vědci pracující v nějaké nematematické oblasti. Shromáždili jsme pozorování vztahující se k vyšetřované otázce, prozkoumali jsme je a porovnali je; zaznamenali jsme úryvkovité zákonitosti, byli jsme na pochybách, klopýtali jsme, ale v závěru se nám podařilo *spojit jednotlivé detaily v jediný význačný celek.* Zcela obdobně archeolog z několika oddělených písmen na setřelém kameni může zrekonstruovat celý nápis nebo paleontolog může z několika zkamenělých kostí vymřelého živočicha zrekonstruovat jeho hlavní rysy ....

První z autorů převedl po úvaze hypotézu B v matematickou větu a podal její důkaz:

Věta. *Nechť M je libovolná konečná množina o n prvcích. Je-li „$\leq$“ relace uspořádání na M a značí-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ incidenční matici relace „$\leq$“, je* $\det A = 1$.

Důkaz. Postupujme indukcí podle n.

První krok: $n = 1$. S ohledem na to, že $\det(1) = 1$, je patrné, že v tomto případě výrok věty platí.

Druhý krok: Předpokládejme, že $n \geq 2$, a že výrok věty platí pro determinanty všech incidenčních matic zachycujících relaci uspořádání na množině mající méně než n prvků.

Připomeňme, že prvek m nějaké uspořádané množiny $(P, \leq)$ se nazývá *maximální,* jestliže pro každé $h \in P$ platí implikace

$$m \leq h \;\Rightarrow\; h = m.$$

Každá konečná uspořádaná množina má alespoň jeden maximální prvek.

Využijme tuto poznámku pro naše účely a předpokládejme nejprve, že $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, kde a_1 nechť značí maximální prvek uspořádané množiny $(M, \leq)$.

Pak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ * & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$B := \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Vidíme, že B je incidenční maticí uspořádané množiny $(\{a_2, \dots, a_n\}, \leq)$, kde $\leq$ značí uspořádání množiny $\{a_2, \dots, a_n\}$ indukované uspořádáním $\leq$ na celé množině $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Podle indukčního předpokladu je proto $\det B = 1$. Užijeme-li pro výpočet determinantu matice A větu o rozvoji podle prvního řádku, vidíme, že $\det A = 1 \cdot \det B = 1$.

Přejděme nyní k obecné situaci, kdy prvky $a_1, a_2, \dots, a_n$ máme přeskupeny do permutace $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$. Zbývá dokázat, že determinant incidenční matice se rovná 1 i při tomto přeskupení.

Vyjděme z následující interpretace: Matici A můžeme chápat jako matici endomorfismu f vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ vzhledem k (uspořádané) bázi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Incidenční matice C pro relaci $\leq$ při přeskupení $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ prvků z M je pak maticí *téhož* endomorfismu f vzhledem k bázi

$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Podle známé věty platí $C = P^{-1}AP$, kde P značí matici přechodu od báze $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ k bázi $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$. Podle věty o determinantu součinu čtvercových matic a s užitím toho, že $\det A = 1$ je proto

$$\det C = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det P^{-1} \cdot \det P = \\ = \det(P^{-1} \cdot P) = \det E,$$

a protože determinant jednotkové matice E je 1, plyne odtud, že $\det C = 1$.

V našem článku jsme se mimoděk dotkli problematiky experimentů v matematice. Čtenáře zajímajícího se o podobné otázky upozorňujeme na velmi hezky napsaný článek [1, zejména str. 898], kde lze nalézt i odkazy na internetové stránky věnované příbuzným námětům.

Literatura

[1] Borwein P., Jörgsen L., Visible Structures in Number Theory, *Amer. Math. Monthly* **108**(2001), 897 – 910.

[2] Pólya G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1954

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Katedra algebry MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: lberan@karlin.mff.cuni.cz