František Kuřina

Geometrická zobrazení a jejich invarianty

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 1, 6–18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150870

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ A JEJICH INVARIANTY

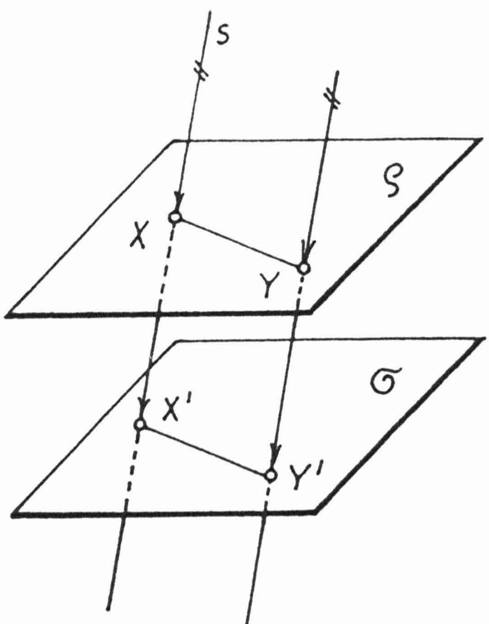
FRANTIŠEK KUŘINA

V tomto příspěvku bych chtěl připomenout některé geometrické souvislosti, kterými můžeme za příznivých okolností obohatit učivo o geometrických zobrazeních na střední škole.

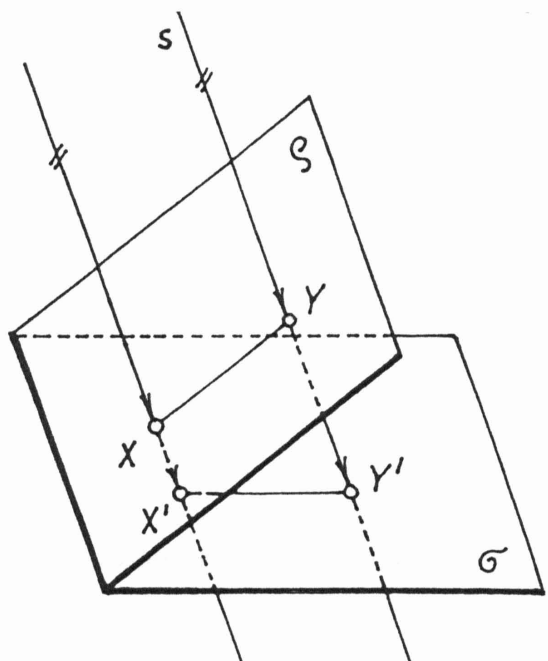
Název zobrazení napovídá, že problematika souvisí (aspoň historicky) se zobrazováním např. prostorových útvarů do roviny. Pro jednoduchost budeme uvažovat o zobrazení roviny ρ do roviny σ. Připomeňme si příslušné pojmy.

Jsou dány rovnoběžné různé (různoběžné) roviny ρ a σ a přímka s, která je s oběma rovinami různoběžná.

Zobrazení, v němž je libovolnému bodu $X \in \rho$ přiřazen bod $X' \in \sigma$ tak, že přímka XX' je rovnoběžná s přímkou s, se nazývá *rovnoběžné promítání roviny ρ do roviny σ ve směru s* (obr. 1 a 3).



Obr. 1



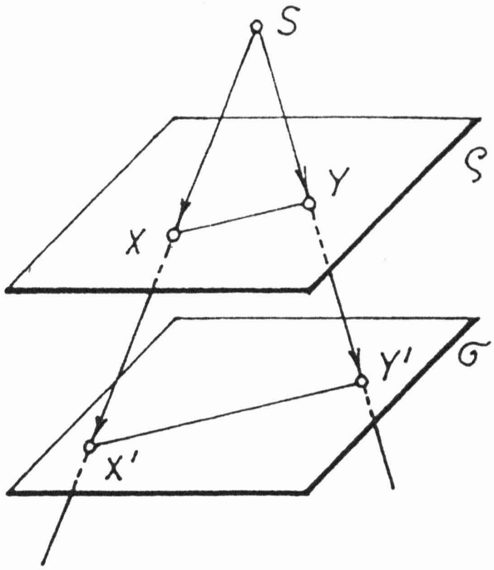
Obr. 3

Tento článek je první ze zamýšlené tématické řady o geometrických transformacích.

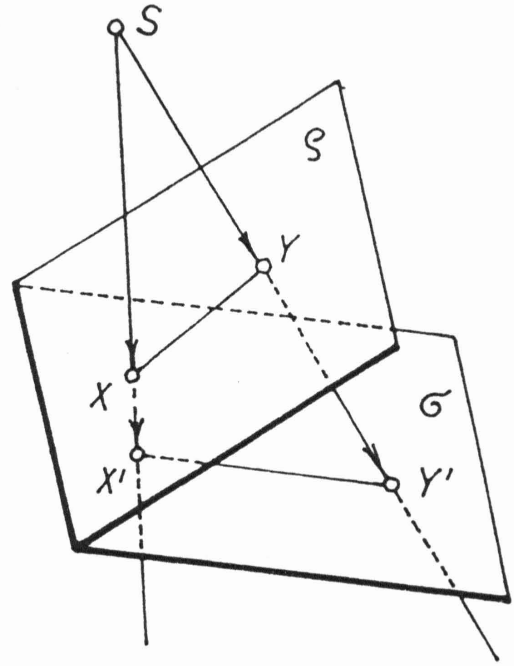
Středové promítání můžeme definovat takto:

Jsou dány rovnoběžné různé (různoběžné) roviny ρ, σ a bod S, který neleží v žádné z nich.

Zobrazení, v němž je libovolnému bodu $X \in \rho$ přiřazen bod $X' \in \sigma$ tak, že přímka XX' prochází bodem S, se nazývá *středové promítání roviny ρ do roviny σ se středem S* (obr. 2 a 4).



Obr. 2



Obr. 4

Všimněme si některých vlastností těchto zobrazení.

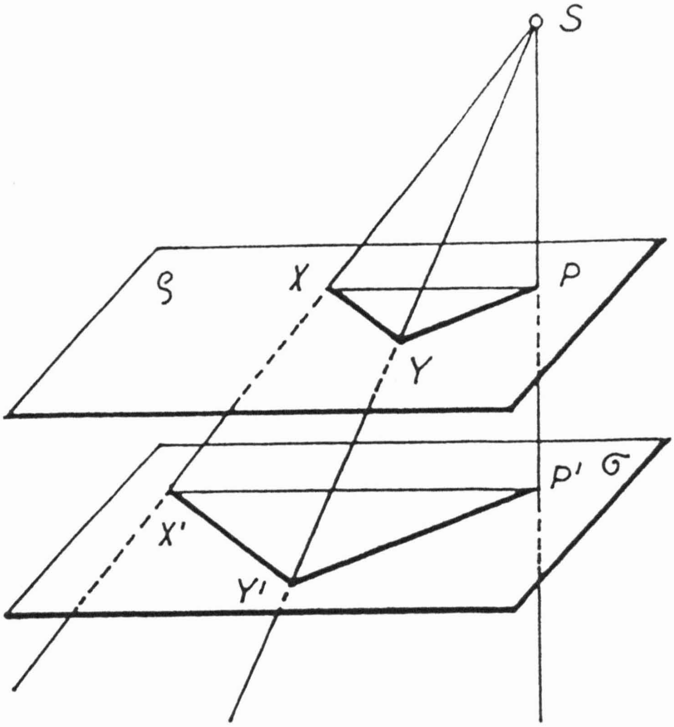
Z obr. 1 je zřejmé, že čtyřúhelník $XYY'X'$ je rovnoběžník a libovolná úsečka XY roviny ρ je shodná a rovnoběžná se svým průmětem $X'Y'$. Rovnoběžné promítání roviny ρ do roviny σ s ní rovnoběžné je příkladem *shodného zobrazení.*

V případě středového promítání roviny ρ do roviny σ s ní rovnoběžné je podle obr. 2 zřejmé, že trojúhelníky $SXY, SX'Y'$ jsou podobné. Sestrojíme-li bodem S přímku p kolmou k oběma rovinám, dostaneme v označení podle obr. 5

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = \frac{|X'S|}{|XS|} = \frac{|SP'|}{|SP|}. \tag{1}$$

Pro danou vzájemnou polohu rovin ρ a σ a bodu S je tento poměr konstantní a je roven kladnému číslu k:

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = k. \tag{2}$$



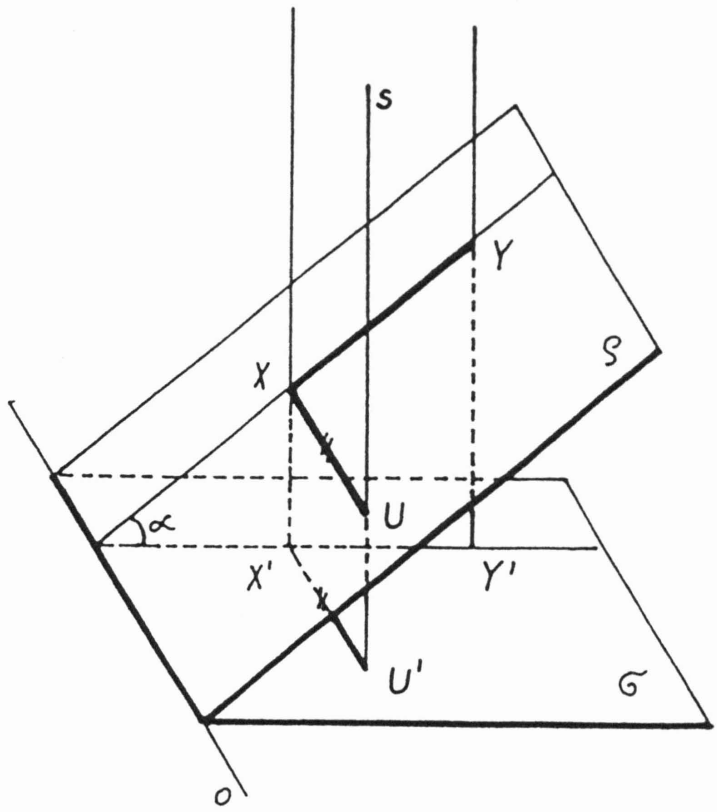
Obr. 5

Říkáme, že poměr velikosti vzoru a obrazu je *invariantem* středového promítání roviny ρ do roviny σ s ní rovnoběžné. Středové promítání roviny ρ do roviny s ní rovnoběžné je *podobné zobrazení.*

Rovnoběžné promítání roviny ρ do roviny σ s ní různoběžné poměr velikosti vzoru a obrazu nezachová (obr. 6). Např. pro úsečky YX a XU v označení podle obr. 6 dostáváme

$$\frac{|X'U'|}{|XU|} = 1, \quad \frac{|X'Y'|}{|XY|} = k \neq 1.$$

Co je invariantem rovnoběžného promítání roviny ρ do roviny σ s ní různoběžné?



Obr. 6

Libovolné tři kolineární body X, Y, Z roviny ρ se promítnou do tří kolineárních bodů X', Y', Z' roviny σ, přičemž platí v označení podle obr. 7:

$$\frac{|XZ|}{|YZ|} = \frac{|X'Z'|}{|Y'Z'|} \tag{3}$$

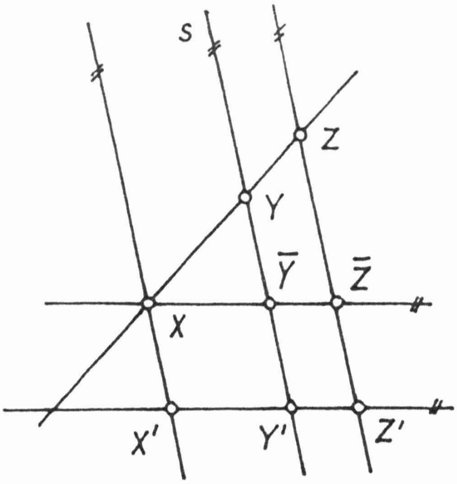
V tomto smyslu říkáme, že rovnoběžné promítání zachovává *dělicí poměr*, který je definován takto:

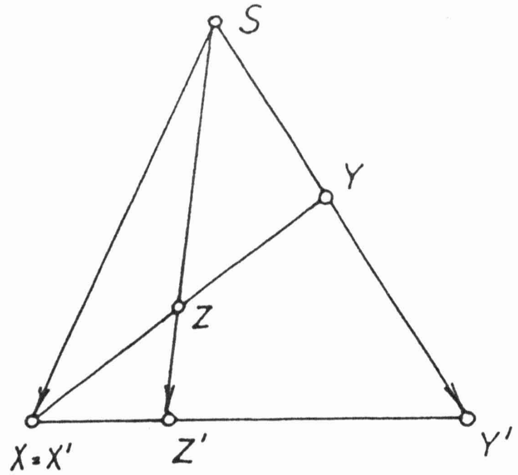
Jsou-li X, Y, Z jsou tři různé kolineární body, rozumíme *dělicím poměrem* bodu Z vzhledem k bodům X, Y reálné číslo (XYZ), pro jehož absolutní hodnotu platí

$$|(XYZ)| = \frac{|XZ|}{|YZ|},$$

přičemž $(XYZ) > 0$, leží-li bod Z vně úsečky XY, a $(XYZ) < 0$, je-li bod Z vnitřním bodem úsečky XY.

Středové promítání nezachovává dělicí poměr. O tom se můžeme přesvědčit takto.





Obr. 7 Obr. 8

Promítněme úsečku XY se středem Z z bodu S do úsečky $X'Y'$, kde $X' = X$ (obr. 8). Kdyby platilo

$$(XYZ) = (X'Y'Z'),$$

byla by úsečka ZZ' střední příčkou trojúhelníku XYY' a musela by být rovnoběžná s přímkou SY. Podle definice dělicího poměru je

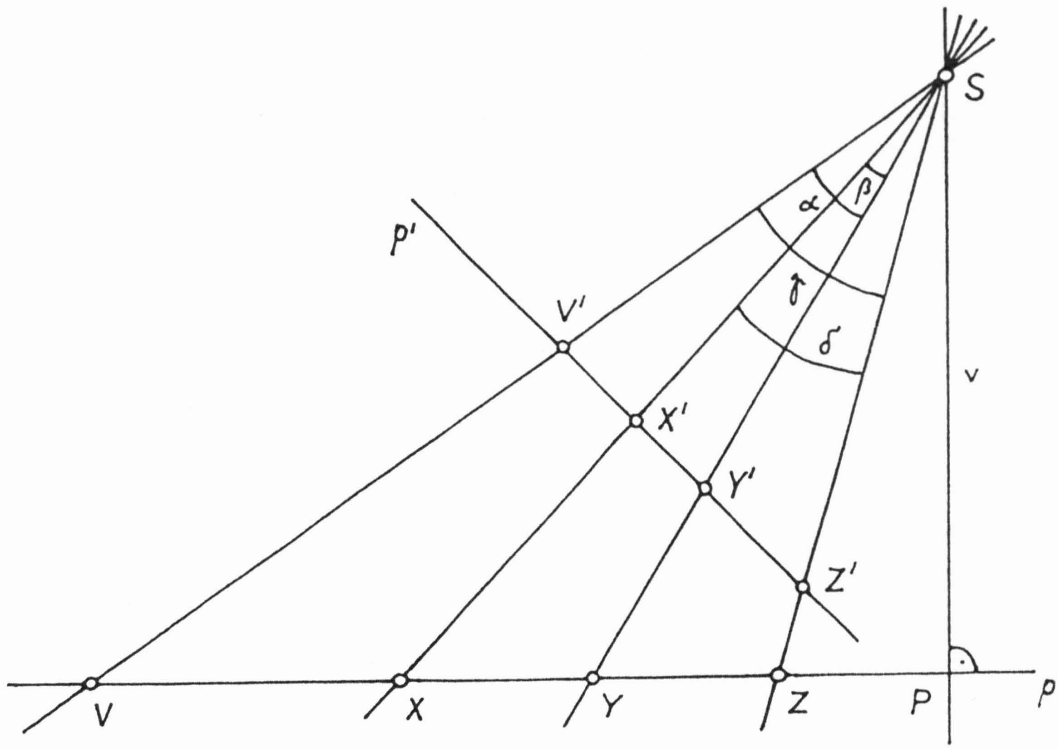
$$(XYZ) = -1, \ (X'Y'Z') \neq -1.$$

Ukážeme, že invariantem středového promítání je tzv. *dvojpoměr*, který zavedeme takto:

Jsou-li V, X, Y, Z čtyři různé kolineární body, rozumíme *dvojpoměrem* $(VXYZ)$ poměr dělicích poměrů

$$(VXYZ) = \frac{(VXY)}{(VXZ)}. \tag{4}$$

Tvrzení, že dvojpoměr se středovým promítáním nemění, můžeme ukázat pro situaci nakreslenou na obr. 9 takto:



Obr. 9

Vzhledem k tomu, že uspořádání bodů V, X, Y, Z na přímce p je stejné jako uspořádání jejich průmětů V', X', Y', Z' na přímce p', stačí uvažovat pouze o poměru velikostí příslušných úseček, bez ohledu na znaménka dělicích poměrů (VXY) , (VXZ).

Máme tedy ověřit, zda platí

$$\frac{|VY|}{|XY|} : \frac{|VZ|}{|XZ|} = \frac{|V'Y'|}{|X'Y'|} : \frac{|V'Z'|}{|X'Z'|}. \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že pro obsahy S_1, S_2, S_3, S_4 trojúhelníků SYV, SYX, SZV, SZX platí v označení podle obr. 9:

$$S_1 = \frac{1}{2}v \cdot |VY| = \frac{1}{2}|SV| \cdot |SY| \cdot \sin\alpha,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}v \cdot |XY| = \frac{1}{2}|SX| \cdot |SY| \cdot \sin\beta,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}v \cdot |VZ| = \frac{1}{2}|SV| \cdot |SZ| \cdot \sin\gamma,$$

$$S_4 = \frac{1}{2} v \cdot |XZ| = \frac{1}{2} |SX| \cdot |SZ| \cdot \sin\delta,$$

můžeme levou stranu rovnosti (5) přepsat na tvar

$$\frac{|VY|}{|XY|} : \frac{|VZ|}{|XZ|} = \frac{|VY| \cdot |XZ|}{|XY| \cdot |VZ|} =$$

$$= \frac{|SV| \cdot |SY| \sin\alpha |SX| \cdot |SZ| \cdot \sin\delta}{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin\beta |SV| \cdot |SZ| \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\sin\beta \sin\gamma}.$$

Levá strana rovnosti (5) závisí tedy jen na velikostech úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, které hrají stejnou roli pro analogické vyjádření její pravé strany (obsahy trojúhelníků $SY'V'$, $SY'X'$, $\cdots$). Platí tedy rovnost (5).

Úvahy o charakteru zobrazení, které vytváří rovnoběžné a středové promítání roviny do roviny s ní různoběžné, začneme konstrukčními úlohami, jejichž podrobné řešení si čtenář podle obrázků jistě sám snadno provede.

Příklad 1. *Je dán trojboký hranol $XYZX_1Y_1Z_1$ podle obr. 10 a rovina $\rho = oX'$ tak, že přímka o je částí roviny $\sigma = XYZ$ a bod X' leží na hraně XX_1 daného hranolu. Sestrojte řez hranolu rovinou ρ.*

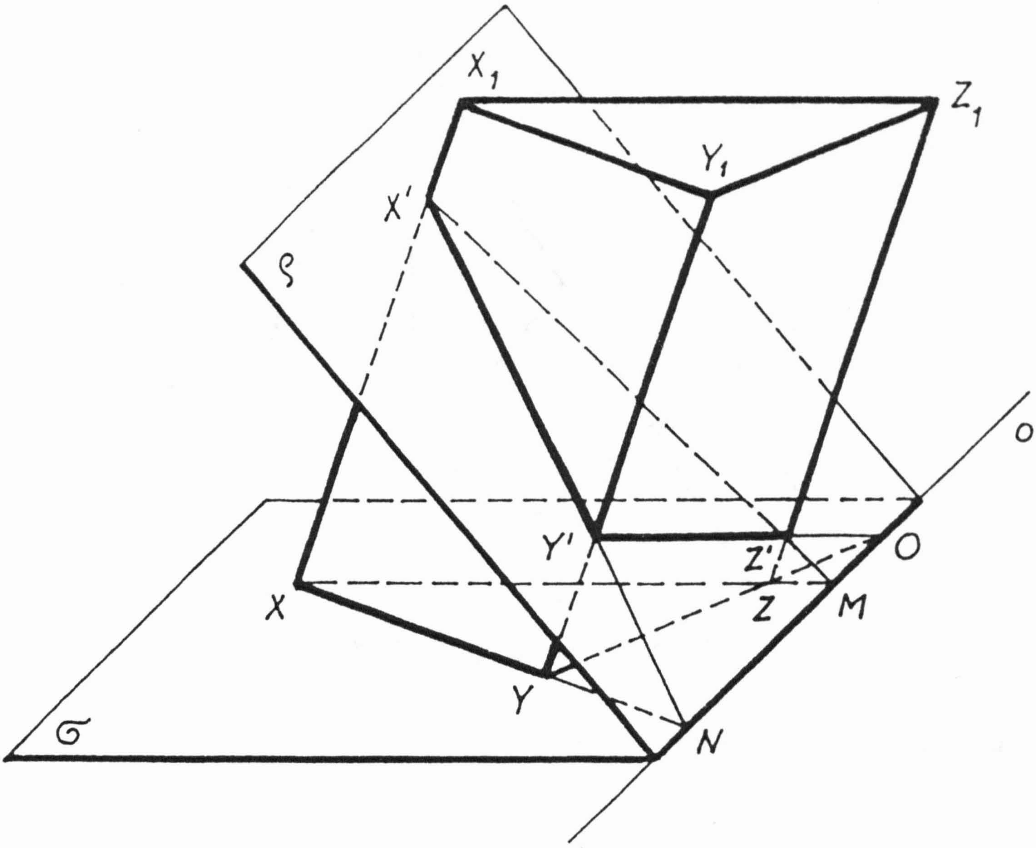
Interpretujme tu část obr. 10, která je překreslena na obr. 11 jako zobrazení roviny, které bodům $X, Y, Z, \cdots$ přiřazuje body X', Y', Z' tak, že platí

přímky $XX', YY', ZZ', \cdots$ jsou spolu rovnoběžné,

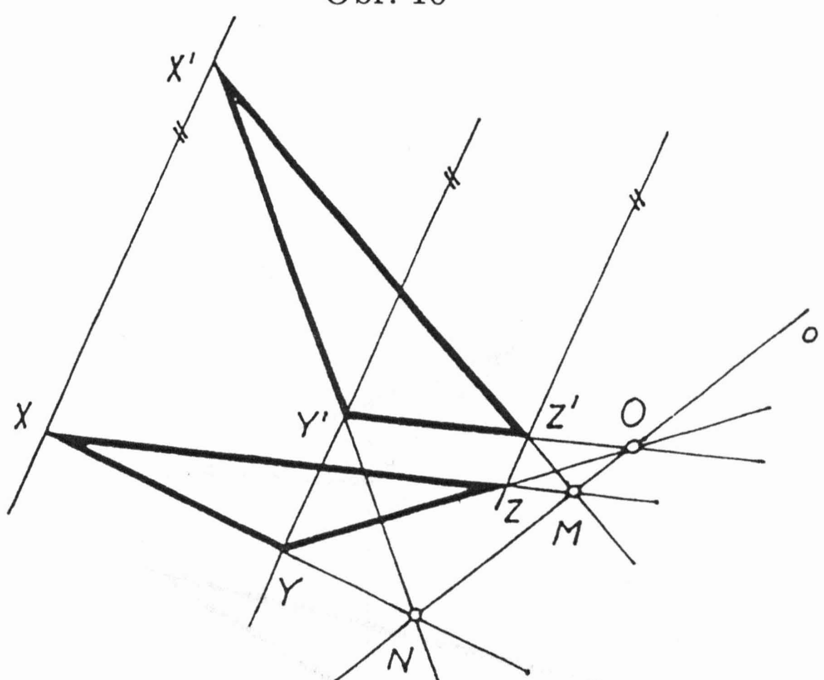
přímky $\begin{matrix} XY, X'Y' \\ XZ, X'Z' \\ ZY, Y'Z' \end{matrix}$ se protínají v bodech přímky o.

Takovéto zobrazení se nazývá *osová afinita s osou o a směrem afinity $s = XX'$.*

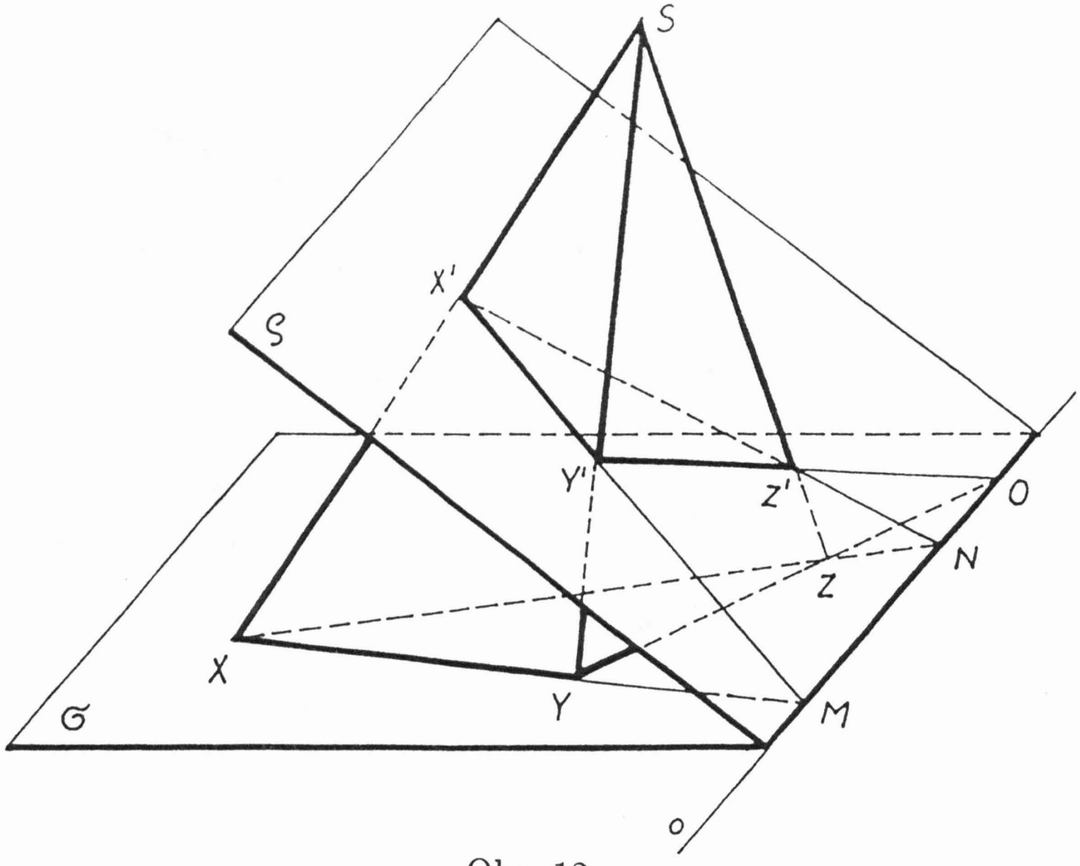
Je to příklad afinní transformace roviny, které si všimneme podrobněji dále.



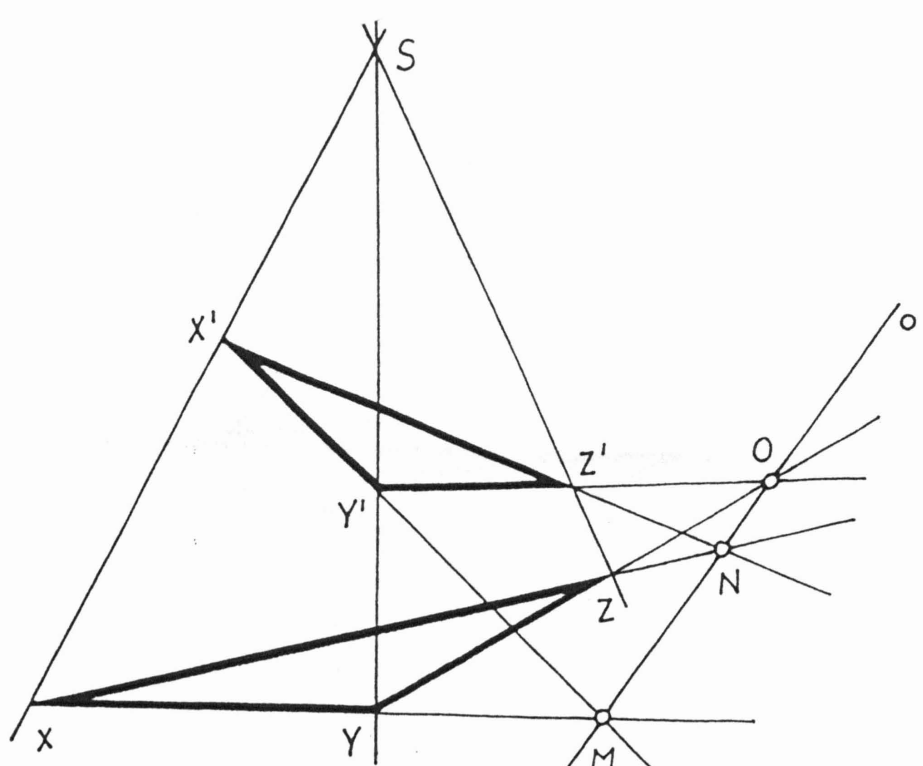
Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Jaké podněty nám může dát úloha o rovinném řezu na jehlanu?

Příklad 2. *Je dán trojboký jehlan $XYZS$ podle obr. 12 a rovina $\rho = oX'$, kde o je přímka roviny $\sigma = XYZ$ a bod X' leží na hraně XS tohoto jehlanu. Sestrojte řez jehlanu rovinou ρ.*

Interpretujme opět tu část obr. 12, která je překreslena na obr. 13 jako zobrazení roviny s těmito vlastnostmi.

Bodům $X, Y, Z, \cdots$ jsou přiřazeny body $X', Y', Z', \cdots$ tak, že platí

přímky $XX', YY', ZZ', \cdots$ procházejí bodem S,

přímky $\begin{matrix} XY, X'Y' \\ XZ, X'Z' \\ ZX, Z'X' \end{matrix}$ se protínají v bodech přímky o.

Takovéto zobrazení se nazývá *osová kolineace s osou o* a středem S. Stručně budeme toto zobrazení nazývat kolineací.

Kolineace je příkladem tzv. projektivní transformace, která však, nemá-li vést k rozporům, vyžaduje změnu pohledu na charakter roviny. Pokusme se to dále poněkud osvětlit.

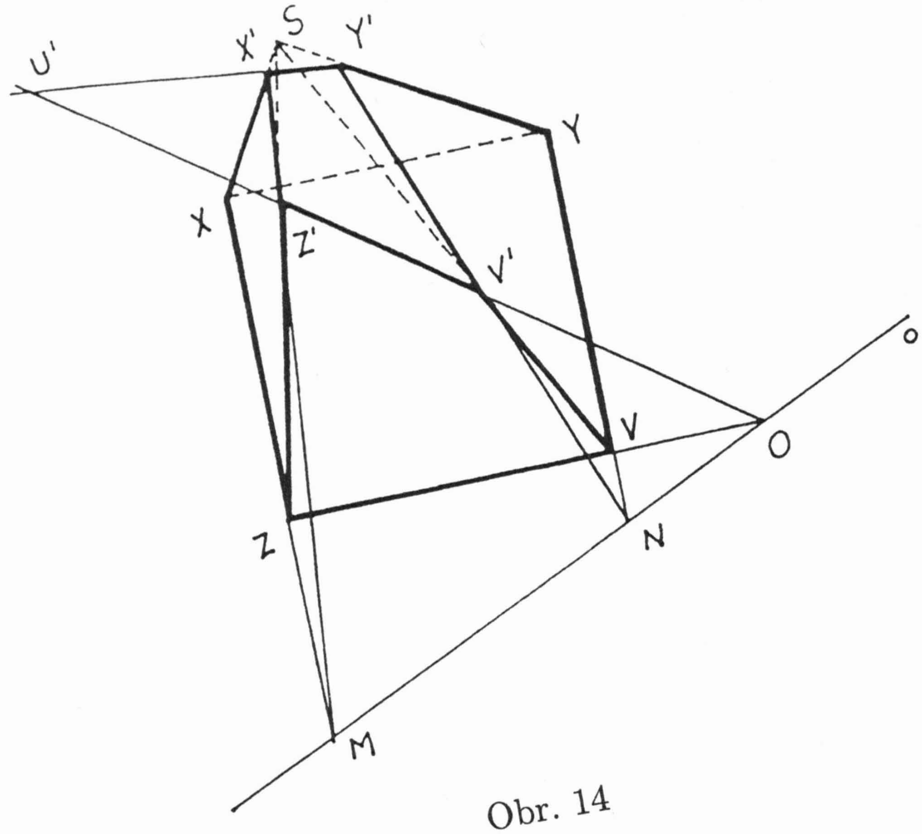
Příklad 3. *Je dán čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou $XYVZ$ a hlavním vrcholem S. Sestrojte jeho řez rovinou $\sigma = o\,X'$, kde o je přímka roviny jeho podstavy a X' je bod hrany XS.*

Na obr. 14 je naznačeno řešení po odejmutí odříznuté části jehlanu.

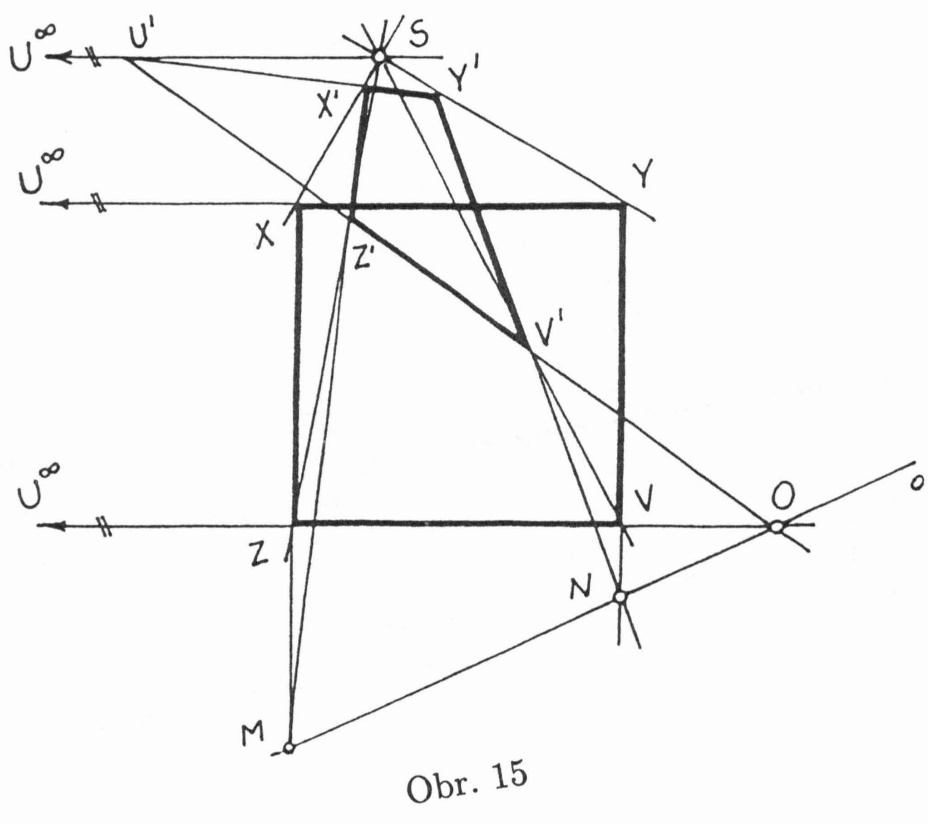
Interpretujeme-li opět obrázek planimetricky (obr. 15), dostaneme kolineaci se středem S a osou o,v níž je obrazem čtverce $XYVZ$ čtyřúhelník $X'Y'V'Z'$.

V tomto zobrazení nemá průsečík U' přímek $Z'V'$ a $X'Y'$ vzor. Kdybychom považovali body $X', Y', \cdots$ za vzory a body $X, Y, \cdots$ za obrazy, dostali bychom kolineaci inverzní, v níž bod U' nemá obraz. Abychom odstranili tyto nepříjemnosti, rozšíříme chápání pojmu rovina touto úmluvou:

Libovolným dvěma rovnoběžným přímkám přiřaďme tzv. nevlastní bod (na obr. 15 označený U^∞). Na každé přímce leží ovšem jen jeden nevlastní bod a množinu nevlastních bodů roviny spolu s takto zavedenými nevlastními elementy budeme nazývat *projektivní rozšíření roviny* nebo stručně *projektivní rovina.*



Obr. 14



Obr. 15

Je-li Z^∞ nevlastní bod přímky VX, definujeme dvojpoměr $(V\,XYZ^\infty)$ jako dělicí poměr (VXY):

$$(VXYZ^\infty) = (VXY).$$

Je to v souladu s představou, že platí $(VXZ^\infty) = 1$.

Kolineace, tak jak jsme ji zavedli, je prosté zobrazení projektivní roviny na projektivní rovinu.

Předchozí úvahy nám dovolují vymezit aspoň trochu přesněji hlavní předmět našeho článku, totiž pojem geometrické transformace.

Transformací roviny ρ rozumíme prosté zobrazení roviny ρ na rovinu ρ.

Důležité příklady transformací roviny.

Zobrazení roviny ρ na rovinu ρ se nazývá *shodnou transformací roviny* ρ *neboli shodností roviny* ρ, právě když pro libovolné různé body X, Y roviny ρ a jejich obrazy X', Y' platí

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = 1, \tag{6}$$

neboli

$$|X'Y'| = |XY|.$$

Zobrazení roviny ρ na rovinu ρ se nazývá *podobnou transformací roviny* ρ neboli *podobností roviny* ρ, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro libovolné dva různé body $X, Y \in \rho$ a jejich obrazy X', Y' platí

$$\frac{|X'Y'|}{|XY|} = k, \tag{7}$$

neboli

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá *poměr podobnosti.*

Zobrazení roviny ρ na rovinu ρ se nazývá *afinní transformací roviny* ρ neboli *afinitou* ρ, právě když jsou obrazy X', Y', Z'

libovolných tří kolineárních bodů X, Y, Z rovněž kolineární a pro jejich dělicí poměry platí

$$(XYZ) = (X'Y'Z').$$

Zobrazení projektivní roviny $\overline{\rho}$ na projektivní rovinu $\overline{\rho}$ se nazývá *projektivní transformací roviny* $\overline{\rho}$ neboli *kolineací*, právě když jsou obrazy V', X', Y', Z' libovolných čtyř různých kolineárních bodů V, X, Y, Z rovněž kolineární a pro dvojpoměry platí

$$(VXYZ) = (V'X'Y'Z').$$

Vlastnosti uvedených transformací roviny můžeme shrnout do tabulky, v níž + znamená zobrazení zachovává a – znamená, že zobrazení nezachovává vlastnost uvedenou v záhlaví tabulky.

Vlastnosti geometrických útvarů, které určité zobrazení zachovává, jsou *invarianty tohoto zobrazení.*

	Kolinearita bodů	Shodnost úseček	Poměr velikostí úseček	Dělící poměr tří bodů	Dvojpoměr čtyř bodů
Shodnost	+	+	+	+	+
Podobnost	+	-	+	+	+
Afinita	+	-	-	+	+
Kolineace	+	-	-	-	+

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky Ped. fakulty Univerzity Hradec Králové
nám. Svobody 331, Hradec Králové
email: frantisek.kurina@uhk.cz