Naďa Stehlíková

Motivační způsoby nácviku základních matematických dovedností

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 1, 25–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150872`

MOTIVAČNÍ ZPŮSOBY NÁCVIKU ZÁKLADNÍCH MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

NAĎA STEHLÍKOVÁ

Podíváme-li se do současné didaktické a matematicko-didaktické literatury, zjistíme, že se velká pozornost věnuje způsobům osvojování nových poznatků. I v českých časopisech pro učitele se již delší dobu objevují články např. o aplikaci konstruktivismu ve vyučování matematice. Nicméně pro vykonání mnoha komplexních úkolů je nutné, aby si žáci také některé základní činnosti zautomatizovali, což jim později umožní věnovat pozornost složitějším úkolům. Učitelům je zřejmé, že je nutné určité elementární úkony zvládnout, z hlediska žáka jde však často o nudný dril.

Hlavní metodou, kterou se utvářejí, procvičují a upevňují dovednosti, je **nácvik**. Představuje cílevědomé a plánovité opakování výkonů. Při nácviku jde o zvládnutí výkonu a zároveň o to, aby získávané dovednosti byly pružné a použitelné v různých situacích (Skalková, 1999).

Činnosti zautomatizování, nácviku základních (matematických) dovedností se v současném didaktickém výzkumu nevěnuje příliš velká pozornost, jak uvádí např. Skalková (1999):

V didaktické literatuře se uvedeným metodám (metodám opakování a procvičování vědomostí a dovedností) věnuje málo pozornosti, jako by šlo o zastaralou problematiku. Nepochybně i to přispívá k situaci, kdy tyto etapy vyučovacího procesu bývají realizovány šablonovitě, jednotvárně, s nízkou aktivní účastí žáků. Vzhledem k tomu, že zde nepůsobí ani přitažlivost látky svou novostí, dochází nezřídka k nezájmu a nudě, které snižují účinnost procesů učení.

Jak tedy děti motivovat, aby nácvik prováděly s větším nadšením? Lokšová, Lokša (1999) uvádějí ve své knize 25 metod rozvíjení motivace. Pro naše účely se nejlépe hodí tyto: problémové

Článek vznikl v rámci řešení grantu GAUK 302/1998/A PP/PedF.

vyučování, vyučování hrou, zajímavé úlohy, soutěže, kooperativní učení. Dodejme, že jde do jisté míry o otázku odlišné prezentace úloh. Zadáme-li dětem sloupce úloh z učebnice či sbírky, nelze očekávat, že se (až na výjimky) do jejich řešení pustí s velkou radostí. Pokud však dokážeme tyto úlohy dětem předložit v jiné podobě, situace se může radikálně změnit. Často stačí pouze malá obměna.

V tomto článku předložíme čtenáři některé způsoby prezentace úloh[1]. Mezi jejich výhody patří mimo jiné to, že umožňují **individualizaci**. Žáci, kteří již nácvik na nižší úrovni zvládli, řeší náročnější úlohy a nejsou „otráveni" stereotypními, lehkými úlohami. Naopak slabším žákům umožní, aby déle procvičovali základní úroveň obtížnosti.

1. „Vytvoř číslo"

Tato technika bude jistě většině učitelů známá. Existuje nepřeberné množství variant, z nichž si zde uvedeme pouze některé.

V této technice jde o to, že při řešení zadaných úloh provedou žáci velké množství výpočtů, aniž by si to uvědomovali. Jsou vedeni snahou dospět k nějakému cíli (např. sestavit nějaké číslo, najít co nejvíce řešení) a výpočty jsou jen prostředkem k jeho dosažení.

Žáci procvičují operace s čísly v určitém číselném oboru, použití závorek, pořadí operací, práci s mocninami a odmocninami, pojem dělitel a násobek, počítání „v duchu", odhady.

Téměř všechny varianty můžeme použít dvojím způsobem. Buď jsou čísla i znaménka operací napsána na kartičkách (výhodou je lepší manipulace, naproti tomu provedený výpočet existuje v podstatě jen chvíli, pokud si ho žák nezapíše), nebo si žáci výpočty zapisují (to je nevýhodné pro žáka, který si nedokáže své výpočty přehledně uspořádat).

Varianty:

1. *Napište co nejvíce čísel pomocí číslic 1, 9, 9, 3 (v tomto*

---

[1]Mezi motivační způsoby nácviku základních matematických dovedností můžeme zařadit také např. „plošné domino" (viz Šarounová, 1995) či „početní hvězdice" (viz Šarounová, 1998).

pořadí) pomocí znamének operací, závorek, umocňování, odmocňování, případně faktoriálu.

Např. $19 - \sqrt{9} - 3 = 13$, $-1 - (\sqrt{9})! + 9 \cdot 3! = 47$

Lze použít i jiné číslice.

2. Jako 1., ale nezáleží na pořadí číslic.
3. *Vytvořte čísla od jedné do jedenácti z čísel 11, 14, 3, 19 a 9 pomocí znamének ... (jako 1.).*
4. *Vytvářejte přirozená čísla počínaje číslem 1 pomocí čísel 2, 3, 4 a 5 a znamének ... (jako 1.).*
5. *Vytvořte číslo 24 co nejvíce způsoby. Hledejte další čísla, která lze vytvořit více způsoby.*

   Např. $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 23 + 1 = 12\sqrt{4} = 4! = 3! \cdot 4 = 2^3(4 - 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
6. *Na kartičkách máte k dispozici čísla od jedné do devíti, každé právě jednou. Namátkou si vyberte čtyři z nich. Pomocí znamének ... (jako 1.) vytvořte číslo, které se co nejvíce blíží číslu 150. Dostanete tolik bodů, o kolik se vaše číslo liší od cílového čísla.*

   Cílové číslo můžeme libovolně měnit. Vyhrává ten, kdo má nejméně bodů.
7. Jako 6., žáci však mají vytvořit libovolné jednociferné číslo.

Škála variant je nevyčerpatelná. Úlohy tohoto typu se dají s úspěchem využít v rámci kooperativního učení či soutěže. Dobře se také hodí jako domácí práce, protože některé z nich jsou poměrně časově náročné. Zařadíme-li je do třídní matematické soutěže a budeme-li každý objev odměňovat body, budou se této práci žáci věnovat vesměs s nadšením (a to i ti slabší, třebaže s pomocí sourozenců či rodičů). Přitom provedou mnohem více výpočtů, než kolik přinesou nových čísel (musí experimentovat).

2. **„Uspořádej čísla“** (Tapson, 1986)

Technika „Uspořádej čísla“ se podobá předchozí technice a v podstatě se liší jen způsobem prezentace. Obě techniky seznamují žáka s experimentováním a učí ho systematizovat si své řešení (pokud požadujeme všechna řešení úlohy).

Zadání: „Doplňte do čtverečků čísla zapsaná v závorce vlevo. Každé číslo smí být použito jen jednou.“

Příklad: $(1,2,3,4,6)$ $\square\cdot\square+\square=6$

Řešení: $\boxed{1}\cdot\boxed{4}+\boxed{2}=6$

Další úlohy:

$(3,3,4,5,7)$ $\square\cdot\square+\square=26$

$(4,5,6,7,8)$ $\square\cdot\square-\square=36$

$(2,3,4,5,6)$ $\square\cdot\square+\square-\square=24$

$(5,6,7,8,9)$ $\square\cdot\square+\square-\square=66$

Snadno dokážeme udělat úlohy těžší. Obtížnost můžeme zvýšit počtem činitelů, druhem operací či umístěním operací. V uvedených příkladech pořadí operací odpovídá směru zleva doprava, umístíme-li násobení na druhé či třetí místo, žák musí dávat pozor ještě na pořadí operací.

Příklad: $(1,3,5,5,6)$ $\square+\square\cdot\square-\square=32$

Řešení: $\boxed{5}+\boxed{6}\cdot\boxed{5}-\boxed{3}=32$

Nesprávné řešení: $\boxed{1}+\boxed{6}\cdot\boxed{5}-\boxed{3}=32$

(žák provádí operace zleva doprava, nedává přednost násobení)

Dalšího ztížení docílíme použitím závorek.

Příklad: $(2,3,4,5,8,9)$ $\square\cdot\left(\square+\square\right)\cdot\square-\square=92$

Řešení: $\boxed{4}\cdot\left(\boxed{2}+\boxed{3}\right)\cdot\boxed{5}-\boxed{8}=92$

Otázkou pro čtenáře zůstává, zda by se tato technika dala využít i pro jiné číselné obory (např. pro zlomky), nebo zda by vzniklé úlohy byly již příliš obtížné.

3. Aritmetické závody

V článku Hejný, Stehlíková (1997) byla podrobně rozebrána technika aritmetických závodů a ilustrována na příkladu nácviku operací s přirozenými čísly. Protože se chceme dále zabývat jejím obecnějším použitím, připomeňme si nejdůležitější pravidla.

- Jedná se o soutěž s více koly, v každém kole řeší žák jednu „kartičku".
- Pro každé kolo je dán časový limit.
- Kartička obsahuje dvojici (trojici, čtveřici, ...) matematických úloh.
- Kartičky jsou stupňovány podle náročnosti (kategorie A je nejlehčí, kategorie B je obtížnější atd.)
- V každé kategorii je více kartiček stejné úrovně (A1, A2 atd., většinou šest až deset kartiček stejné úrovně, více kartiček v kategorii A, méně v kategorii B atd.).
- Každá kartička je ohodnocena n body, se zvyšující se kategorií se počet bodů zvyšuje.
- Získá-li žák n nebo $n-1$ bodů, postupuje do vyšší kategorie, získá-li méně než polovinu bodů, sestupuje do nižší kategorie. Jinak zůstává ve stejné kategorii.
- Žák si vede evidenci o tom, které kartičky již řešil.
- Učitel poskytuje žákům zpětnou vazbu co nejdříve po proběhnutí kola.

Motivačně bude na žáky působit, pokud si budou moci na začátku (před prvním kolem) zvolit úroveň, na které začnou. Nebudou tedy všichni začínat u kategorie A, ale nejdříve sami sebe ohodnotí, na jakou úroveň mají znalost. Výsledky soutěže nebudou negativně ovlivněny, protože pokud se „podhodnotí", rychle postoupí do vyšších kategorií, a naopak, pokud se „nadhodnotí", sestoupí do nižší kategorie.

Poznámka: Aritmetické závody patří mezi soutěživé techniky, které ve vyučování aktivizují sociální potřeby (Lokšová, Lokša, 1999). Jejich využívání však může být zpochybněno, zejména pokud díky nim vynikají stále stejní žáci. To může negativně působit nejen na slabší žáky (neustálé srovnávání s nejlepšími žáky působí demotivačně), ale i na vynikající žáky, kteří si zvyknou jen vítězit. Soutěživé techniky by se měly ve výuce střídat tak, aby pokud možno vynikli všichni žáci. Můžeme také, po vzoru sportu, vytvořit určité ligy, kdy spolu ve stejné lize soutěží žáci s přibližně stejnými schopnostmi a odměňujeme nejlepší v každé lize. Samozřejmě hodně záleží na atmosféře v konkrétní třídě.

Technika aritmetických závodů patří mezi účinné techniky nácviku základních matematických dovedností a navíc se jedná o techniku „zastřešující". Tím myslíme, že se dá použít všude tam, kde se něco nacvičuje (automatizuje) a kde se úlohy dají gradovat. Navíc se dá kombinovat i s jinými technikami, např. „Uspořádej čísla" by se dala s úspěchem využít i zde.

Ve zbývající části článku se zaměříme na rozpracování této techniky. Pokud bude čtenář chtít tyto návrhy využít ve výuce, měl by si opatřit zmíněný článek, kde najde podrobná pravidla. Při tvorbě nových aritmetických závodů je nutné mít na paměti, že úlohy na kartičky musíme gradovat, nárůst obtížnosti mezi jednotlivými kategoriemi však nesmí být příliš velký.

3.1 Desetinná čísla

Závody na desetinná čísla byly vytvořeny poté, co děti „prošly" aritmetickými závody na přirozená čísla (viz Hejný, Stehlíková, 1997) a dožadovaly se nových. Desetinná čísla se přímo nabízela.

V příloze najdete ukázky vždy dvou kartiček od kategorií A až E[2], zbylé kartičky stejné úrovně obtížnosti se dají lehce doplnit. V kategorii A se přičítají pouze celá čísla, násobí se číslem 10 a dělí se číslem 100. V kategorii B přistupuje násobení jednociferným přirozeným číslem. V kategorii C se přičítá desetinné číslo s jedním desetinným místem, násobí se dvojciferným číslem (jiným než 10) a dělí se jednociferným číslem. V kategorii D se přičítá desetinné číslo se dvěma desetinnými místy a násobí se dvojciferným číslem. V kategorii E se násobí i dělí desetinným číslem s jedním

[2]Návod: např. čísla v prvním řádku v kartičce A1 jsou: $0{,}8 + 5 = 5{,}8$; $5{,}8 \cdot 10 = 58$; $58 : 100 = 0{,}58$.

desetinným místem.

Pokud si vytvoříte výsledkovou listinu pro všechny kartičky, snadno a rychle zkontrolujete správnost každé kartičky.

Bodové hodnocení udává počet bodů za každé políčko kartičky i za celou kartičku.

Kat. A:	-	1	1	1	Kat. D:	-	1	2	3
(9 bodů)	1	-	1	1	(19 bodů)	1	-	2	3
	1	1	-	1		1	3	-	3
Kat. B:	-	1	2	1	Kat. E:	-	1	3	4
(12 bodů)	1	-	2	1	(25 bodů)	1	-	3	4
	1	2	-	1		1	4	-	4
Kat. C:	-	1	2	2					
(15 bodů)	1	-	2	2					
	1	2	-	2					

Prémiové body se přidělují, pokud žák odevzdá kartičku dříve a pokud ji správně vyplnil. Časový limit je pro každé kolo 2 až 3 minuty (na vyšší kategorie můžeme dát delší čas dle situace ve třídě).

Čas odevzdání (v sek.)	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80	70	60	...
Kat.A	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	...
Kat. B	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	...
Kat. C	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	...
Kat. D	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	...
Kat. E	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	...

3.2 Minitabulky

K dalšímu využití techniky aritmetických závodů mě inspiroval článek Tapson (1986). Autor zde předkládá způsob, jak procvičovat násobilku a pojem dělitel pomocí tzv. minitabulek.

Protože lze jednotlivé tabulky gradovat dle obtížnosti, bylo snadné převést je do podoby aritmetických závodů. V dalším uvedeme návrhy jednotlivých kategorií, od každé uvádíme jeden příklad. Všechny kategorie popíšeme. Doporučujeme čtenáři, aby si všechny příklady nejprve vyřešil, pak mu bude následující text jasnější.

Poznámka: Čísla v prvním sloupci a v prvním řádku minitabulky budeme nazývat čísla ze zadávacího pole. Čísla mimo zadávací pole budeme nazývat čísla v poli.

Zadání úlohy: Čísla v prvním sloupci a v prvním řádku se mezi sebou násobí, výsledek se zapíše do prázdných čtverečků. Doplňte všechna čísla. V prvním sloupci a prvním řádku jsou použita čísla 2 až 9 a každé z nich právě jednou.

Kategorie A: Chybějící číslo v zadávacím poli se dá snadno najít ($72 : 9 = 8$).
Kategorie B: Je nutné nejprve rozhodnout, kterým číslem v poli začít. V našem případě rozložíme číslo 24 na $3 \cdot 8$ a umístění čísla 8 v prvním sloupci je jednoznačné.
Kategorie C: Musíme nejprve rozložit obě čísla v poli na součin dvou čísel a navzájem je zkombinovat. $28 = 4 \cdot 7$, $35 = 7 \cdot 5$. Číslo 7 musí být ve sloupci (strategie – ve sloupci musí být společný dělitel obou čísel v poli). Zbytek jako v kategorii B.
Kategorie D: Ve hře jsou tentokrát již tři čísla. Důležité je uvědomit si, že stačí najít společný dělitel čísel 36 a 12 (ten bude v prvním sloupci) a dále společný dělitel čísel 36 a 54 (ten bude v prvním řádku). Je-li více společných dělitelů jako v případě čísel 36 a 12, je nutno ještě kombinovat druhou podmínku ve sloupci. V našem případě se budeme rozhodovat mezi číslem 2 (ale to už v zadávacím poli je), 6 (to nejde, protože pak by se číslo 36 rozložilo na součin $6 \cdot 6$, ale žádné číslo nesmí být v zadávacím poli dvakrát) a 4.
Kategorie E: Zde je situaci složitější díky tomu, že žádné číslo v poli neleží ve sloupci či řádku, který by měl vyplněné číslo v zadávacím poli. Je obtížné popsat řešení, je nutno do jisté míry experimentovat a kombinovat.
Kategorie F: V zadávacím poli chybí jakákoli čísla. V poli nutno najít společného dělitele tří čísel, pak už je situace obdobná jako

v předchozích kategoriích.

Kategorie G: Od předchozí kategorie se liší tím, že v poli je o jedno číslo méně.

A1

x	7		6	2
3				
9		72		
5				
4				

B1

x	5		2	3
4				
		48		24
7				
9				

C1

x	3		9	
8				
		28		35
2				
6				

D1

x	7			5
8				
		36	12	
		54		
2				

E1

x	4			
		14		42
8				
			45	30
6				

F1

x				
		72	16	
		63		
		45		
	12			18

G1

x				
			36	
			12	
	30	42		48

3.3 Dělitelnost

Další tematický celek, na který se teď zaměříme, je dělitelnost. Ve sbírkách a učebnicích najdeme různé způsoby procvičování dělitelnosti úlohami typu „Je číslo 250 dělitelné pěti?“ počínaje a algebrogramy konče (tj. úlohami typu „Najděte všechna trojciferná čísla ABB dělitelná čtyřmi.“). V dalším se pokusíme uspořádat je tak, aby se daly použít v aritmetických závodech. Jednu z výhod prezentace těchto typů úloh pomocí aritmetických závodů vidíme v tom, že protože jsou žáci omezeni časem, jsou nuceni hledat efektivnější způsoby zjišťování dělitelnosti. Někde sice stačí experimentovat (např. pomocí kalkulačky), ale jinde už je rychlejší nebo dokonce nezbytné použít kritéria dělitelnosti.

Stanovení náročnosti jednotlivých úloh není v tomto případě tak jednoduché jako u minitabulek. Kromě náročnosti jednotlivých kritérií (předpokládáme, že kritérium dělitelnosti dvěma a pěti je nejlehčí) je nutno vzít v potaz i počet chybějících číslic, počet řešení či počet kritérií dělitelnosti, které je nutno kombinovat.

Předkládáme tedy čtenáři náš návrh gradace úloh, který nechí si upraví dle vlastní zkušenosti s vyučováním celku dělitelnost.

Kategorie A: pouze kritérium dělitelnosti dvěma, pěti a čtyřmi.
Kategorie B: kromě předchozích ještě dělitelnost třemi, devíti a osmi.
Kategorie C: kombinace dvou kritérií.
Kategorie D: algebrogramy s použitím maximálně dvou kritérií.
Kategorie E: algebrogramy s kombinací více kritérií.

Kartičky kategorie A až C obsahují dvě úlohy, kartičky kategorie D a E jednu úlohu[1].

A1

1. Z číslic 2, 3, 4 vytvořte všechna trojciferná čísla dělitelná dvěma.
2. Pro jaké číslice X je číslo $315X$ dělitelné číslem 4?

[1]Inspirací pro některé úlohy byly knihy Bušek a kol. (1994) a Herman a kol. (1994).

A2

1. Pro jaké číslice X dostaneme z čísla $35X4$ co největší číslo dělitelné čtyřmi?
2. Z cifer 5, 6, 3 vytvořte všechna trojciferná čísla dělitelná pěti.

B1

1. V zápise $34 * 5$ nahraďte hvězdičku číslicí tak, aby vzniklo číslo dělitelné třemi.
2. Z cifer 1, 2, 8 vytvořte všechna čísla dělitelná osmi.

C1

1. Kterou číslici musíte v čísle 5342 škrtnout, abyste dostali trojciferné číslo dělitelné šesti?
2. V zápise $71 * 5$ nahraďte hvězdičku číslicí tak, aby vzniklo číslo dělitelné patnácti.

D1

Najděte všechna čísla ABA dělitelná číslem 15 tak, aby $ABA >$ > 100. Číslice A a B jsou různé.

D2

Najděte všechna čísla tvaru AAB, která jsou dělitelná číslem 18. Číslice A a B jsou různé.

E1

Najděte takové různé číslice X, Y, Z, aby platilo $120|XY244Z$ a současně aby
$XY244Z < 250000$. (Poznámka: Symbol | čtěte „dělí".)

E2

Najděte takové různé číslice X, Y, Z, aby platilo $216|XY32Z$.

U obou návrhů aritmetických závodů 3.2 i 3.3 musí učitel sám rozhodnout o bodování (v případě 3.3 navrhujeme přidělovat body i za částečná řešení) i o časovém rozpětí. Nejlépe je provést takzvané „zahřívací kolo", pomocí kterého stanovíme časový limit.

Poznámka: Jakmile s dětmi jednou techniku aritmetických závodů použijeme, osvojí si ji a není pak problémem používat ji i u dalších témat dle potřeby. Příprava závodu na nový tematický celek je sice časově náročná, nicméně z dlouhodobého hlediska se vyplatí.

Závěr

Článek měl za cíl seznámit čtenáře s určitými technikami nácviku základních matematických dovedností, které jsou podle mínění autorky pro žáky motivující. Nepředstavují samozřejmě jediné správné a dostatečné způsoby, přispívají však k větší rozmanitosti vyučování, což není málo.

LITERATURA

[1] Bušek, I., Kubínová, M., Novotná, J., *Mám to dobře 1*, Prometheus, Praha, 1994.
[2] Hejný, M., Stehlíková, N., *Aritmetické závody*, Učitel matematiky **5** (1997), 213 - 219.
[3] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J., *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Dělitelnost*, Prometheus, Praha, 1994.
[4] Lokšová, I., Lokša, J., *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*, Portál, Praha, 1999.
[5] Skalková, J, *Obecná didaktika*, ISV nakladatelství, Praha, 1999.
[6] Šarounová, A, *Malý nápadník - D*, Učitel matematiky **4** (1995), 32 - 33.
[7] Šarounová, A, *Malý nápadník - L*, Učitel matematiky **6** (1998), 97 - 102.
[8] Tapson, F, *More basic practice*, Mathematics in School **15** (1986), 22 - 25.

RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky PdF UK
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
email: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz

A1

O — +5 —> O —*10 —>O — :100 —>O

0,8			
	6,3		
		71	

A2

O —+7 —> O —*10 —>O — :100 —>O

2,5			
	8,2		
		76	

B1

O —+3 —> O —*5 —>O —:10 —>O

0,7			
	3,9		
		21,5	

B2

O —+2 —>O —*6 —>O —:10 —>O

0,6			
	2,1		
		21	

C1

O —+0,7 —>O —*21 —>O —:3 —>O

0,2			
	1,2		
		37,8	

C2

O —+0,3 —>O —*15 —>O —:5 —>O

0,4			
	1,2		
		25,5	

D1

O—+0,62 —>O —*21 —>O —:7 —>O

0,3			
	3,12		
		195,72	

D2

O—+0,85 —>O —*42 —>O —:6 —>O

0,1			
	4,25		
		350,7	

E1

O—+1,54 —>O—*2,5 —>O—:0,5 —>O

0,7			
	7,74		
		22,6	

E2

O—+1,72 —>O —*4,5 —>O—:0,9 —>O

0,8			
	4,22		
		42,39	