Marie Kupčáková

Modelování pravidelného dvanáctistěnu (2)

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 1, 40–46

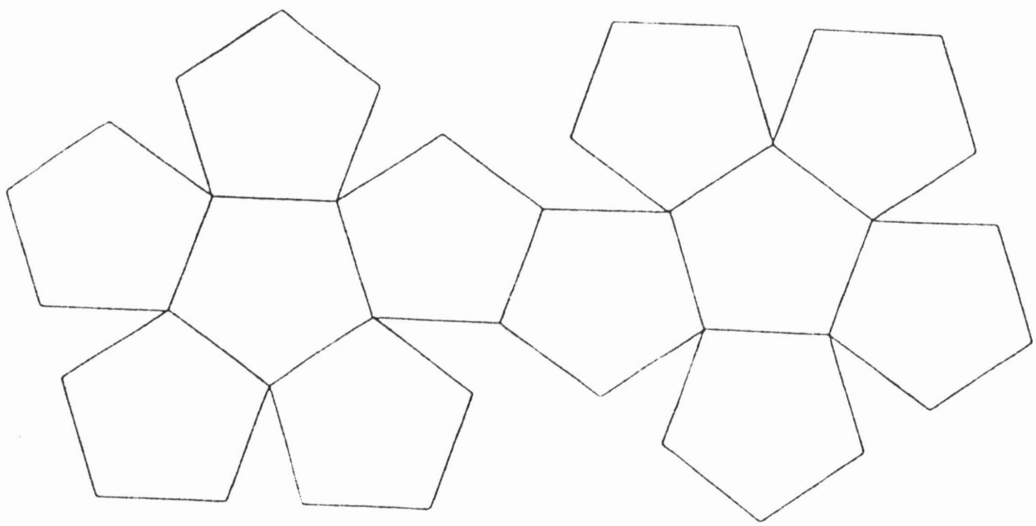
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150874

MODELOVÁNÍ PRAVIDELNÉHO DVANÁCTISTĚNU (2)

Marie Kupčáková

Ve 3. čísle minulého ročníku *Učitele matematiky* jsme sledovali konstrukci pravidelného dvanáctistěnu — dodekaedru z méně známého mnohostěnu, který se v angličtině označuje jako *trapezohedron* a česky jsme jej nazvali *routa*. Jak uvádí F. Knoflíček v [1], byl objevitelem dodekaedru Theaitetos z Athén (asi 410 – 368 př.n.l). Těžko dnes vystopujeme, jakou cestou tento významný řecký matematik došel ke svému objevu, možná že prováděl experimenty podobné těm, se kterými bych Vás ráda seznámila.

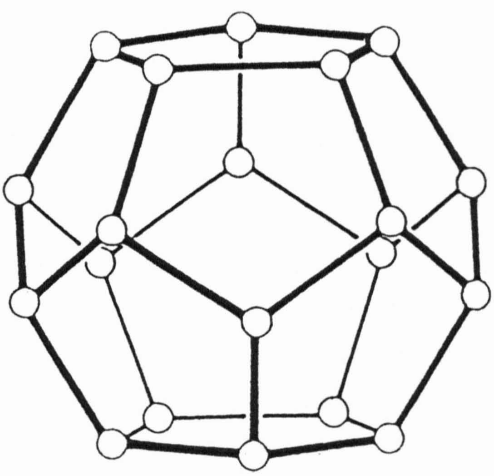
Připomeňme si, že pravidelný dvanáctistěn je konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou navzájem shodné pravidelné pětiúhelníky a v každém vrcholu se sbíhají právě tři hrany. Označíme-li počet stěn s, počet vrcholů v a počet hran h, pak $s = 12$, $v = 20$, $h = 30$. Dvanáctistěn, jako každý konvexní mnohostěn, splňuje Eulerův vztah $s + v = h + 2$. Síť pravidelného dvanáctistěnu tvoří 12 shodných pětiúhelníků (obr. 1). Papírový model byl součástí přílohy zmíněného čísla časopisu. Můžete si jej víckrát okopírovat a použít pro sestavení papírových modelů.



Obr. 1

Hranový model

Velmi jednoduše lze vytvořit tzv. hranový model (obr. 2), máme-li základní představu o mnohostěnu: Připravíme si kuličky modelíny JOVI (vrcholy modelovaného tělesa) a oboustranně zahrocená párátka stejné délky (hrany). Vymodelujeme hranici jedné stěny — pravidelný pětiúhelník a do každého vrcholu zabodneme další špejli. Přidáme další vrcholy a hrany tak, aby se uzavřela spodní „miska“. Víme, že se musí v každém vrcholu sbíhat stejný počet hran (tedy vždy 3) a že všechny stěny budou pětiúhelníkové, a tak můžeme model postupně dokončit. Zjistíme přitom, že konstrukce není pevná. Tvary stěn proto pečlivě poopravíme. Lze použít i na vzduchu tvrdnoucí modelínu JOVI a vyschlý model se může stát učební pomůckou.

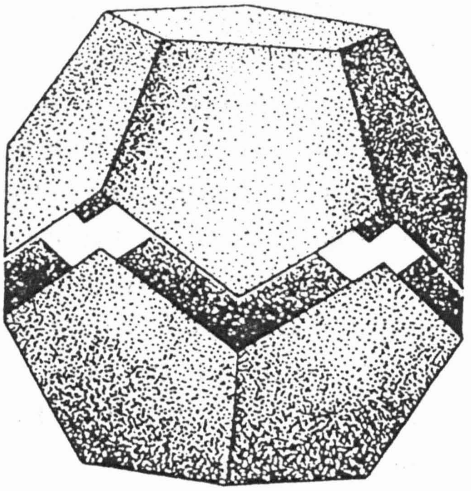


Obr. 2

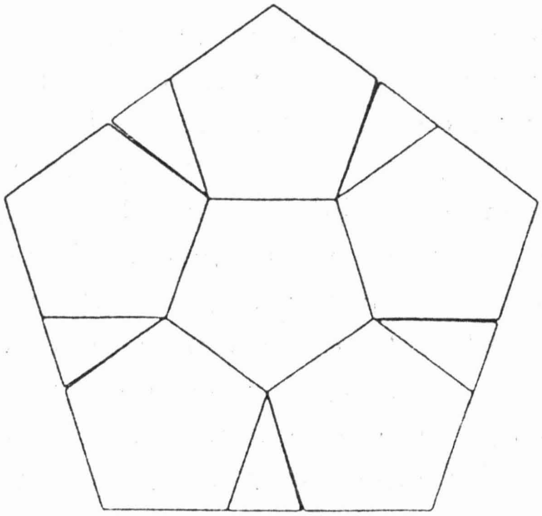
Papírové modely

a) dvojdílný model

Připomeňme, že routu jsme modelovali otočením rovinově souměrných jehlanových prostorů kolem osy spojující jejich vrcholy. Pravidelný dvanáctistěn, který získáme z routy odříznutím těchto vrcholů, bude tedy „otočeně souměrný“. Můžeme jej proto vymodelovat ze dvou shodných částí — misek, které jsou pootočeny o 36° (obr. 3). Síť misky na obr. 4 je již doplněna záložkami na slepení. Pokud přes složený model převlékneme gumičku, ponechá si dvanáctistěn svůj tvar.



Obr. 3



Obr. 4

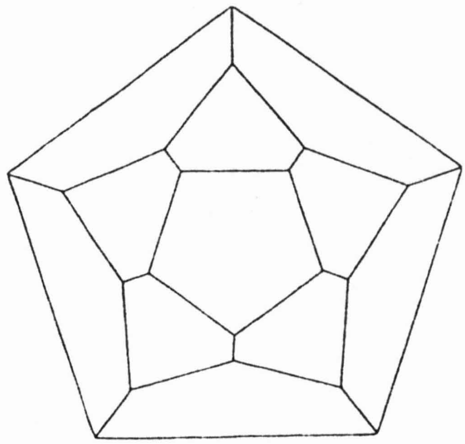
b) barevný papírový model

Stanovme si jako úkol připravený model „pravidelně vybarvit“, tedy obarvit stěny dvanáctistěnu minimálním počtem barev, ale tak, aby se podél žádné hrany nesetkaly dvě stejné barvy. K řešení úlohy užijeme tzv. *Schlegelův diagram.* Jeho prostorovou interpretaci si můžeme představit takto [2]: Zvolme v rovině jedné stěny mnohostěnu průmětnu a střed promítání ve vhodné výšce nad protější rovnoběžnou stěnou. Tato stěna se pak promítne jako velký pětiúhelník, uvnitř kterého leží obraz oné stěny v průmětně. Všechny další stěny a hrany se středově promítají dovnitř obrysového pětiúhelníku (obr. 5). Incidenční vztahy zůstanou zachovány. Do Schlegelova diagramu snadno doplníme symboly pro barvy stěn (obr. 6). Pozor však při přenesení barev na papírový model dodekaedru! Střed promítání byl nad stěnou, jejíž barva je označena 3, proti ní leží stěna s barvou 1 na vnějším povrchu papírového modelu! Plánek pravidelného vybarvení sítě dvanáctistěnu je připraven v obr. 7.

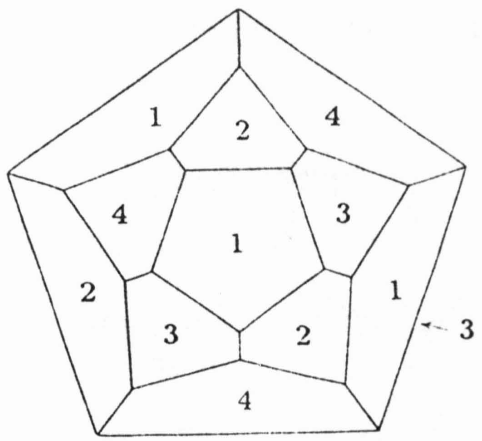
c) žebrový model

Dokonalé kresby žebrových modelů mnohostěnů najdeme i v dílech velikána všech umění Leonarda da Vinci — viz poslední strana v úvodu citovaného čísla *Učitele matematiky.* Avšak i tento nakreslený (pečlivě vyrýsovaný) dodekaedr autor asi nejprve vymodeloval — vyřezal a sestrojil. Papírové žebrové modely mají tu výhodu, že je lze sestavit velmi snadno a mohou plnit úlohu modelů drátěných — předvádět vzájemnou polohu hran a vrcholů, bez toho, že by je zakrývaly neprůhledné stěny.

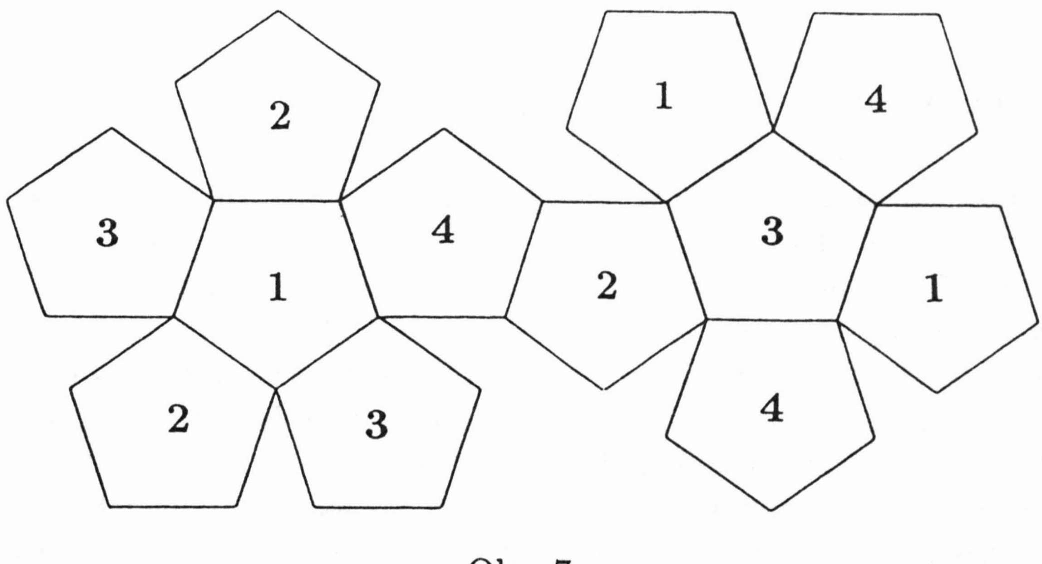
Papírový žebrový model (obr. 8) sestavíte z přílohy — předem však bude nutné vyříznout pětiúhelníkové plochy uvnitř.



Obr. 5



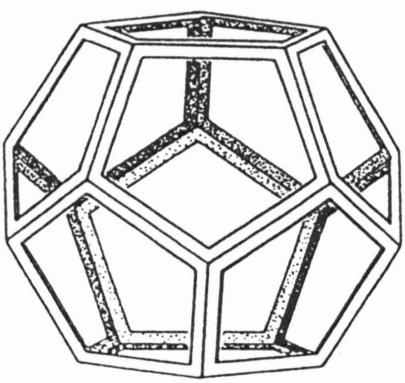
Obr. 6



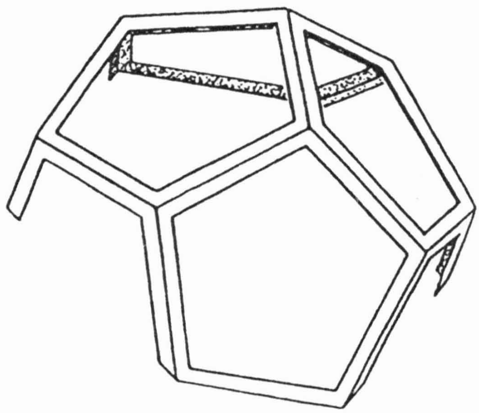
Obr. 7

d) zrcadlový model

Efektní model si připravíme, uvědomíme-li si, že pravidelný dvanáctistěn je rovinově souměrný. Rovinou souměrnosti je přitom vždy rovina určená dvojicí rovnoběžných hran (jsou to hrany středově souměrné, jejich poloha v prostoru se dá odvodit i ze vzniku routy). Tato rovina tedy prochází hranami tělesa a osami souměrností pětiúhelníkových stěn, které protíná. Rozstřihneme-li žebrový model podél protějších hran a ve středech dalších dvou hran (obr. 9), máme zrcadlový model připravený. Stačí jej přiložit ke sklu knihovničky či k zrcadlu a celý dvanáctistěn se jako zázrakem „dokreslí“.



Obr. 8



Obr. 9

Plný model

Modelování, které nyní popíši, má sice blíže k práci sochaře než matematika, probouzí však živý zájem studentů. Cílem je vymodelovat pravidelný dvanáctistěn jako těleso „plné“, ne jako sjednocení mnohoúhelníků nebo hran. Přichystáme si z modelíny JOVI kouli o průměru asi 3,5 cm. Lehce na ni začneme kreslit dvanáct sférických shodných pravidelných pětiúhelníků s odhadnutou délkou strany. Kresbu korigujeme, až jsme s výsledkem spokojeni. Odřežeme dvanáct kulových vrchlíků a máme v ruce hrací kostku ve tvaru dvanáctistěnu, ti nejšikovnější ve tvaru pravidelného dvanáctistěnu. S modelem si můžeme dále pohrát: odřežeme vrcholy mnohostěnu a obdržíme tzv. „ořezaný dvanáctistěn“, který patří mezi Archimédovské mnohostěny.

Při modelování dvanáctistěnu jsme několikrát narazili na shodná zobrazení v prostoru. Nástin klasifikace shodností v prostoru najde čtenář ve středoškolské učebnici stereometrie [5]. Pokusme se odpozorovat z modelů všechna shodná zobrazení v prostoru, v nichž dvanáctistěn přejde sám na sebe.

Již jsme uvedli, že dvanáctistěn je rovinově souměrný. Rovinu souměrnosti určují každé dvě rovnoběžné hrany. Existuje tedy $30 : 2 = 15$ rovinových souměrností, ve kterých se mnohostěn zobrazí sám na sebe. Všimněme si, že dvanáctistěn je středově souměrný. Středová souměrnost je pouze jedna, střed souměrnosti je střed mnohostěnu, který je zároveň středem kulové plochy jemu opsané i vepsané.

V prvém — dvojdílném papírovém modelu jsme na tělese objevili otočenou souměrnost. Uvedli jsme, že misky jsou otočeny o 36°. Podívejme se na obr. 3 ještě jednou. Je zřejmé, že jsme mohli jednu misku oproti druhé otočit také o 108°, 180°, 252° či 324°. Tedy pro zvolenou osu rotace existuje pět možností, ale takových os spojujících středy protějších rovnoběžných stěn najdeme šest, celkem tedy dostaneme $5 \cdot 6 = 30$ otočených souměrností. Všech 46 napočítaných shodností jsou shodnosti nepřímé – nelze je provést manipulací v trojdimenzionálním prostoru (u rovinové souměrnosti nám pomohlo zrcadlo). Pokusme se určit všechny přímé shodnosti, tj. otočení, která převádějí dvanáctistěn na sebe — tzv. „zákrytové pohyby“. Mezi takováto zobrazení patří jistě i identita, která je pouze jedna. Dále najdeme tři skupiny otáčení kolem osy: Dvanáctistěn můžeme otáčet kolem spojnic protějších vrcholů (os rotace je tedy $20 : 2 = 10$), a to vždy o 120° nebo 240° , tedy $10 \cdot 2 = 20$ zobrazení. Dvanáctistěn lze také otáčet kolem spojnic středů protějších hran ($30 : 2 = 15$) vždy o 180°, to je tedy 15 dalších zobrazení. Těleso můžeme otáčet také kolem spojnic středů protějších stěn (os rotace je tedy $12 : 2 = 6$) a to vždy o 72°, 144°, 216° nebo 288°. Celkem přibylo $6 \cdot 4 = 24$ zobrazení. Napočítali jsme 60 zákrytových pohybů (vynechávali jsme identická otočení). V knize [4] se můžeme poučit, že grupa otáčení dvanáctistěnu je izomorfní s grupou zákrytových pohybů dvacetistěnu.

Při řešení posledního úkolu jsme se opírali o zkušenosti nabyté při modelování dodekaedru. Kdybyste však neměli chuť naznačené otázky teoreticky řešit, pouze si hrát a pravidelný dvanáctistěn modelovat, věřte , i to stojí za to. Modelování, jak jsme je v našich úvahách představili, se nám jeví jako zajímavá činnost, která vede k objevování i netriviálních vlastností geometrických útvarů.

LITERATURA:

[1] Knoflíček, F, *O grupách symetrie*, in Geometrie v technice a umění, sborník JČSMF, 1985.

[2] Coxeter, H. S. M, *Introduction to Geometry*, London, 1961.

[3] Steinhaus, H, *Kaleidoskop der Mathematik*, Berlin, 1959.

[4] Alexandrov, P. S, *Úvod do teorie grup*, Moskva, 1985.

[5] Pomykalová, E, *Matematika pro gymnázia — stereometrie*, Prometheus, 1995.

RNDr. Marie Kupčáková

Katedra matematiky Ped. fakulty Univerzity Hradec Králové

nám. Svobody 331, Hradec Králové

email: marie.kupcakova@uhk.cz