František Kuřina
Afinní transformace roviny

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 3, 129–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150898

AFINNÍ TRANSFORMACE ROVINY

FRANTIŠEK KUŘINA

Pojem afinní transformace roviny ϱ neboli afinitu roviny ϱ jsme zavedli v článku [1] jako prosté zobrazení roviny ϱ na rovinu ϱ, které zachovává dělicí poměr, tj. libovolné tři kolineární body X, Y, Z převádí do tří kolineárních bodů X', Y', Z' tak, že platí

$$(XYZ) = (X'Y'Z'). \tag{1}$$

V tomto článku se budeme zabývat některými vlastnostmi afinních transformací roviny.

Ačkoliv se zdá, že požadavek *obrazy tří kolineárních bodů jsou kolineární body* je ekvivalentní s tvrzením, že *obrazem přímky v takovém zobrazení je přímka*, není tomu tak. Snadno sestrojíme příklad zobrazení, které převádí libovolné tři kolineární body v kolineární body, ale obrazem přímky v tomto zobrazení není přímka.

Označme písmenem c zobrazení dané v kartézské soustavě souřadnic předpisem

$$y = [x],$$

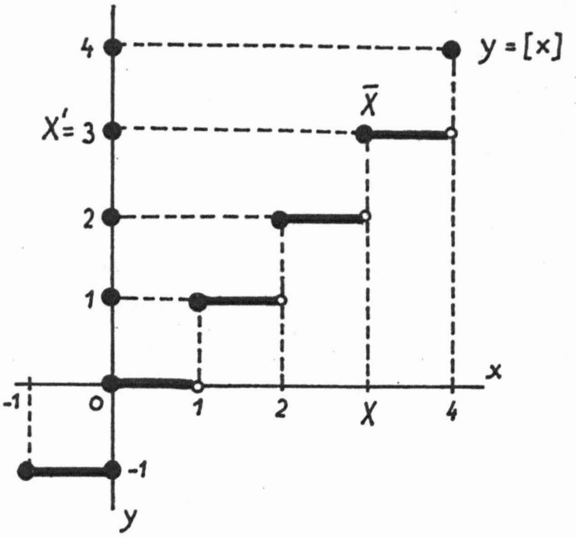
kde $[x]$ je celá část reálného čísla x, tj. největší celé číslo menší nebo rovné x. Obrazem osy x v zobrazení c je nespojitá schodovitá čára nakreslená na obr. 1. Označme dále písmenem d promítání roviny ve směru osy x do osy y. Ve složeném zobrazení

$$z = d \circ c$$

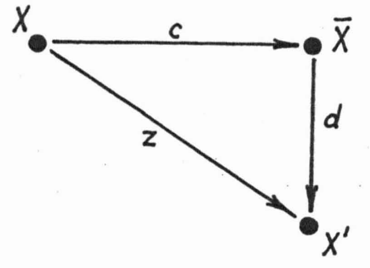
nebude obrazem osy x osa y, ale množina jejích izolovaných bodů.

Tento výsledek můžeme podrobněji sledovat podle schématu na obr. 2. Připomeňme, že pojem složeného zobrazení je zaveden např. v učebnici [3].

Článek byl vypracován s částečnou podporou grantu GAČR 406/99/1996.

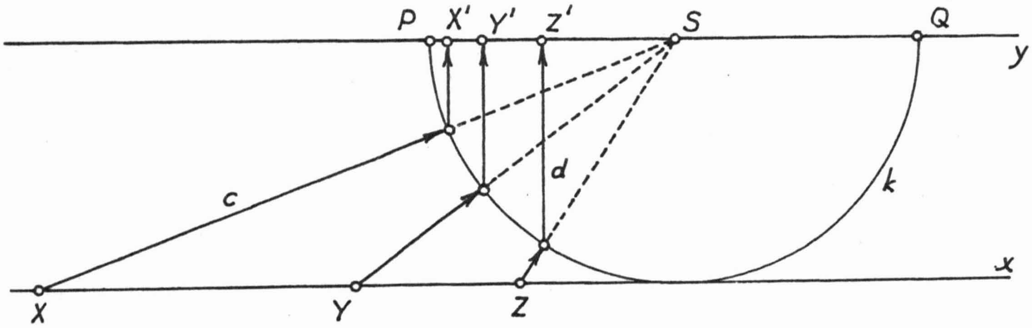


Obr. 1



Obr. 2

V druhém dobře známém příkladu ukážeme, že obrazem přímky v zobrazení, které převádí tři kolineární body do tří kolineárních bodů, může být úsečka.



Obr. 3

Označme symbolem c promítání přímky x ze středu S do polokružnice k (obr. 3), písmenem d pravoúhlé promítání polokružnice k do přímky y rovnoběžné s přímkou x. V zobrazení

$$z = d \circ c$$

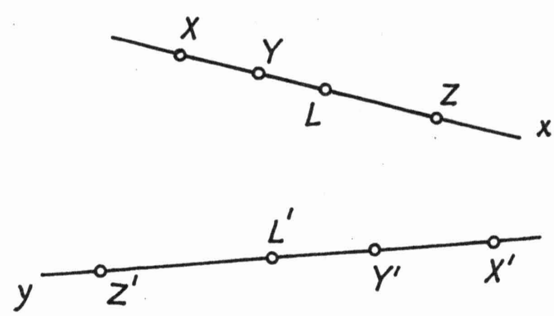
jsou obrazy libovolných tří kolineárních bodů X, Y, Z přímky x tři kolineární body X', Y', Z' přímky y, ale obrazem přímky x není přímka y, ale pouze vnitřek její úsečky PQ.

Je tedy zřejmé, že má smysl otázka, zda je obrazem přímky v afinitě přímka.

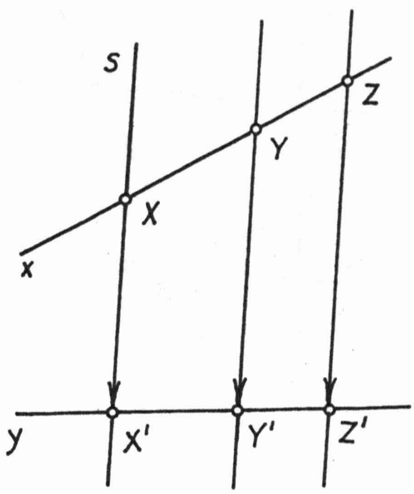
Označme X, Y libovolné dva různé body přímky x, X', Y' jejich obrazy v afinitě f. Body X', Y' jsou různé a určují přímku y. Libovolný bod Z přímky x bude mít svůj obraz v určitém bodě Z' přímky y, je však třeba zjistit, zda libovolný bod L' přímky y je obrazem nějakého bodu L přímky x. Takový bod ovšem snadno určíme, neboť podle definice afinity musí platit (obr. 4)

$$(X'Y'L') = (XYL).$$

Obrazem libovolné přímky v afinitě je tedy přímka.



Obr. 4



Obr. 5

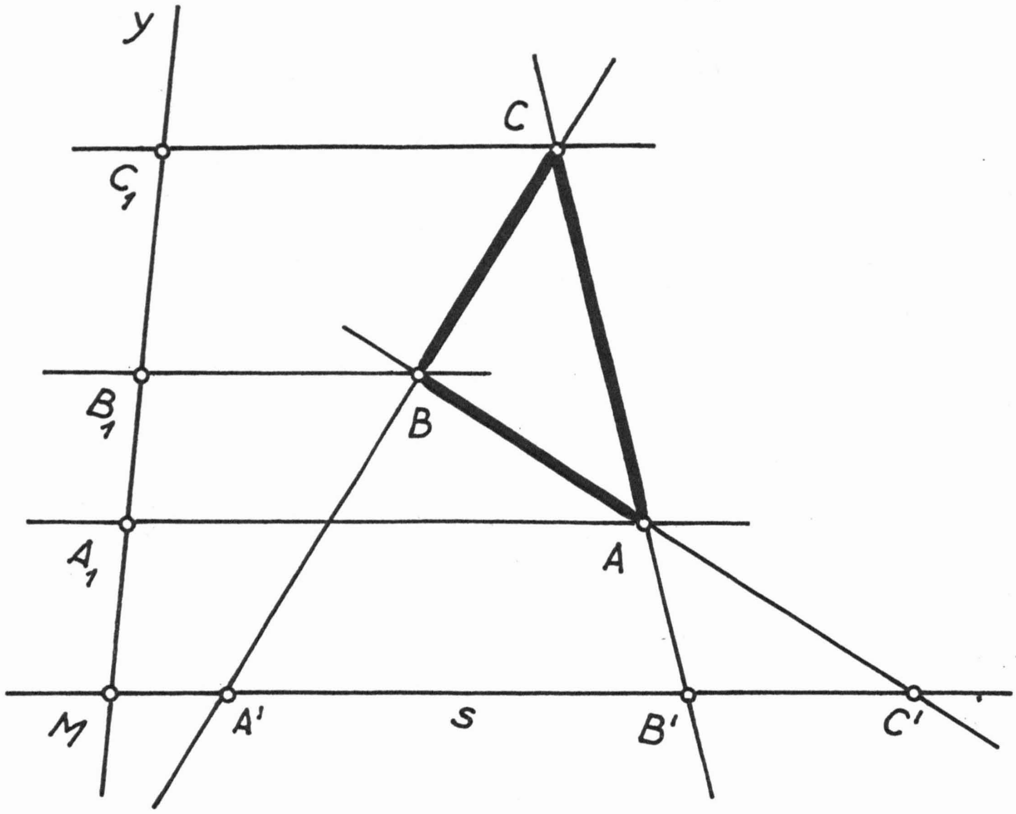
Skutečnost, že rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr, tj. že v označení podle obr. 5 platí (1), má řadu zajímavých důsledků. Zde připomeňme aspoň jeden, který bývá označován jako *Menelaova věta.*

Je-li ABC libovolný trojúhelník, A', B', C' po řadě body přímek BC, AC, AB různé od vrcholů A, B, C, pak platí: body A', B', C' jsou kolineární, právě tehdy, když

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1. \tag{2}$$

Dokažme nejdříve: Leží-li body A', B', C' v přímce (označme ji např. s), pak platí (2).

Promítněme body A', B', C' a vrcholy trojúhelníku ABC do přímky y ve směru s. Protože rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr, platí v označení podle obr. 6:



Obr. 6

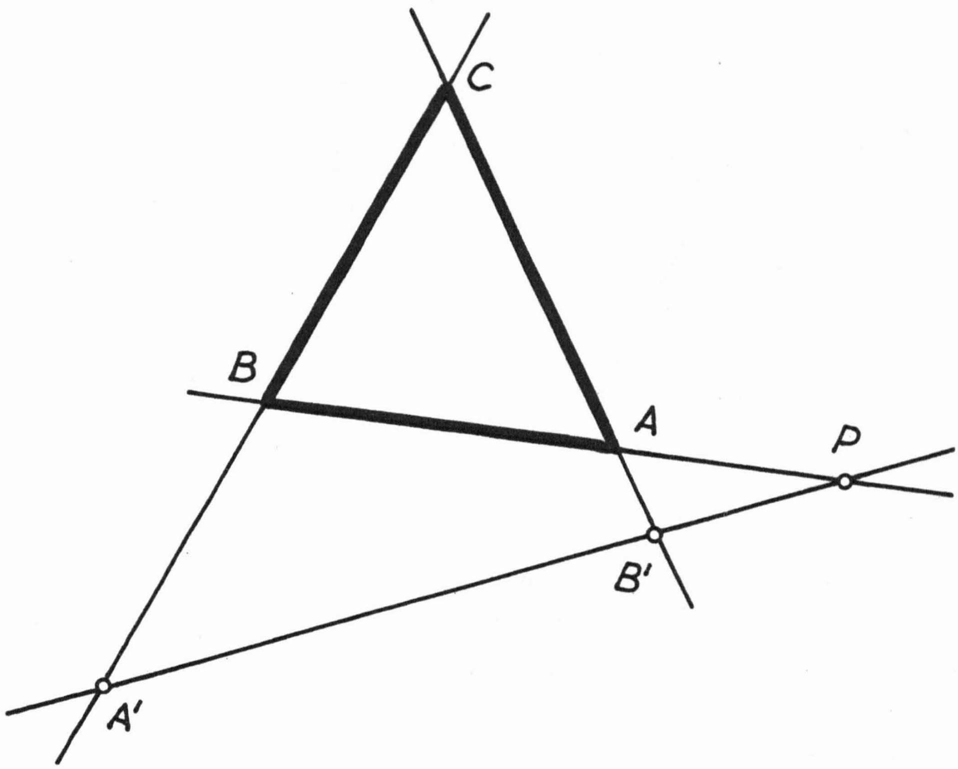
$$|(ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB')| = |(A_1B_1M)\cdot(B_1C_1M)\cdot(C_1A_1M)| =$$
$$= \frac{|A_1M|}{|B_1M|}\cdot\frac{|B_1M|}{|C_1M|}\cdot\frac{|C_1M|}{|A_1M|} = 1.$$

Protože součin $(ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB')$ musí být kladný (přímka s buď strany trojúhelníku neprotíná, nebo protíná právě dvě z jeho stran), platí (2).

Obráceně. Předpokládejme, že platí (2), a dokazujme, že body A', B', C' musí být kolineární. Označme průsečík přímky $A'B'$ s přímkou AB písmenem P (obr. 7). Pak podle první části Menelaovy věty a předpokladu (2) platí:

$$(ABP)\cdot(BCA')\cdot(CAB') = (ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB').$$

To ovšem neznamená, že $(ABP) = (ABC')$. Protože dělicím poměrem je jednoznačně určena poloha třetího bodu vzhledem k prvním dvěma, je $P = C'$. Body A', B', C' jsou tedy kolineární. Tím je Menelaova věta dokázána.



Obr. 7

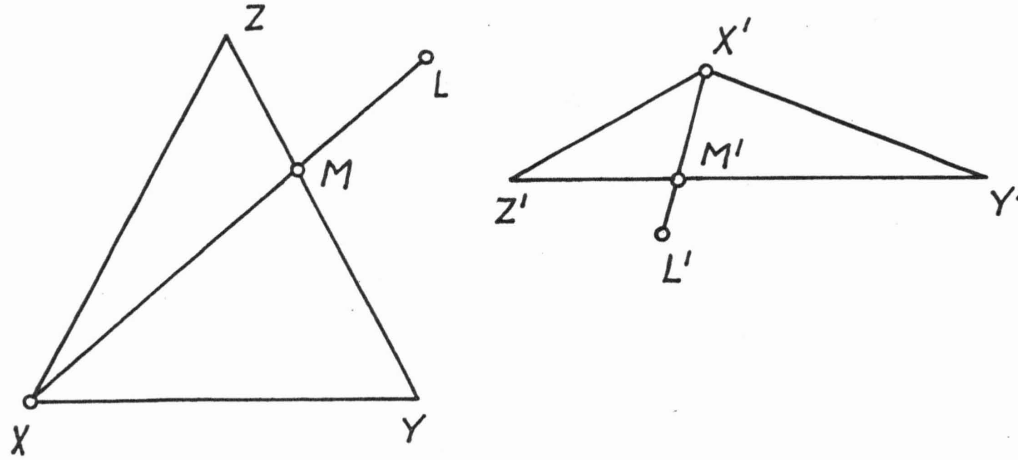
Protože shodná a podobná zobrazení zachovávají dělicí poměr, můžeme je považovat za afinity. Tato skutečnost bude pro nás inspirací k poznání některých dalších vlastností afinit.

Shodné zobrazení je jednoznačně určeno libovolným trojúhelníkem XYZ a trojúhelníkem $X'Y'Z'$, který je s trojúhelníkem XYZ shodný. Ukážeme, že afinita je určena dvěma zcela libovolnými trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$.

V rovině jsou dány nekolineární body X, Y, Z a nekolineární body X', Y', Z'. Uvažujme afinní zobrazení f, které převádí body X, Y, Z po řadě do bodů X', Y', Z'. Ukažme, že touto podmínkou je jednoznačně určen obraz libovolného bodu L v afinitě f.

Spojíme-li bod L např. s bodem X (obr. 8), pak platí pro body X, L a průsečík M přímky ZY s přímkou XL a obrazy těchto bodů v afinitě f: $(ZYM) = (Z'Y'M'), (XML) = (X'M'L')$.

V afinitě f, která převádí nekolineární body X, Y, Z do nekolineárních bodů X', Y', Z', je tedy jednoznačně určen obraz L' libovolného bodu L roviny.



Obr. 8

Příklady shodností napovídají, že afinita nemusí mít žádný samodružný bod (takovou afinitou je např. *translace*), může mít jediný samodružný bod (*rotace*), ale může mít přímku samodružných bodů (*osová souměrnost*). Osové souměrnosti hrají v množině všech shodností roviny mimořádnou roli: *Každou shodnost, která není osovou souměrností, můžeme rozložit na dvě nebo tři osové souměrnosti.*

Osová afinita je afinita, jejíž množinou samodružných bodů je přímka. Tato přímka se nazývá osa osové afinity.

Afinita, která má tři nekolineární samodružné body, je identita. To snadno nahlédneme podle obr. 8, představíme-li si, že platí $X = X', Y = Y', Z = Z'$.

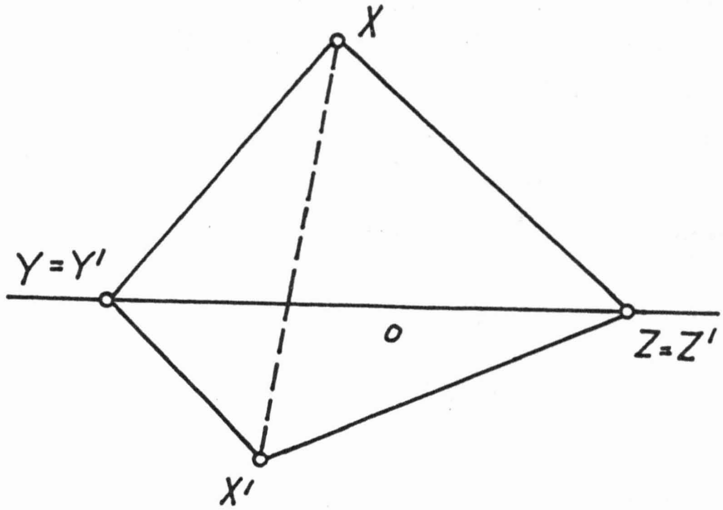
Věta. *Je-li dána přímka o a různé body X, X', které na ní neleží, je touto trojicí jednoznačně určena osová afinita s osou o, v níž je obrazem bodu X bod X'.*

Tato věta je důsledkem věty o určenosti afinity. Volíme-li totiž libovolné dva body Y, Z osy afinity, je $Y' = Y, Z' = Z$ a afinita je určena trojicemi bodů X, Y, Z a X', Y', Z', tedy vlastně osou a dvojicí bodů X, X' (obr. 9).

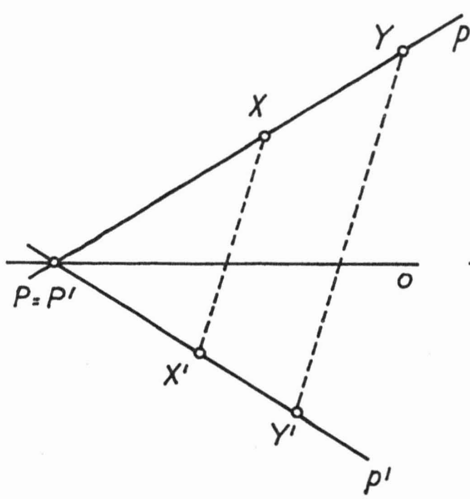
Osovou afinitu f s osou o, v níž je obrazem bodu X bod X', budeme značit

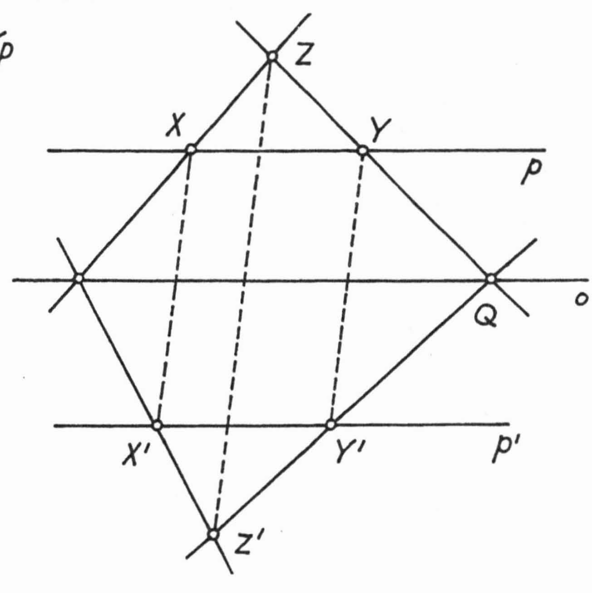
$$f = (o, X, X').$$

Nebude-li nebezpečí omylu, budeme tuto afinitu značit i symbolem o.



Obr. 9





Obr. 10a Obr. 10b

Konstruktivně důležitý je tento poznatek:

V osové afinitě $f = (o, X, X')$ platí pro libovolný bod Y, který neleží na ose, a jeho obraz Y' : $XX' || YY'$.

Tvrzení je bezprostředním důsledkem věty o zachování dělicího poměru. Rozlišujeme dva případy.

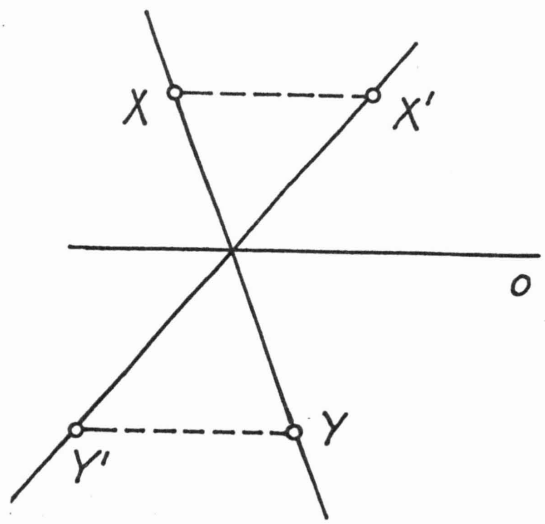
a) Přímka XY protíná osu o v bodě $P = P'$ (obr. 10a). Protože platí $(PXY) = (P'X'Y')$, je $XX' \| YY'$.

b) Je-li přímka XY s osou o rovnoběžná, sestrojíme obraz Z' takového bodu Z, aby přímka ZY osu o protínala, např. v bodě Q. Protože $f = (o, X, X') = (o, Z, Z')$, je $XX' \| ZZ' \| YY'$.

Směr přímky XX' se nazývá *směr afinity*.

Afinita, jejíž směr je rovnoběžný s osou, se nazývá *elace*.

Konstrukce obrazu Y' bodu Y v elaci $e = (o, X, X')$ je patrná z obr. 11.



Obr. 11

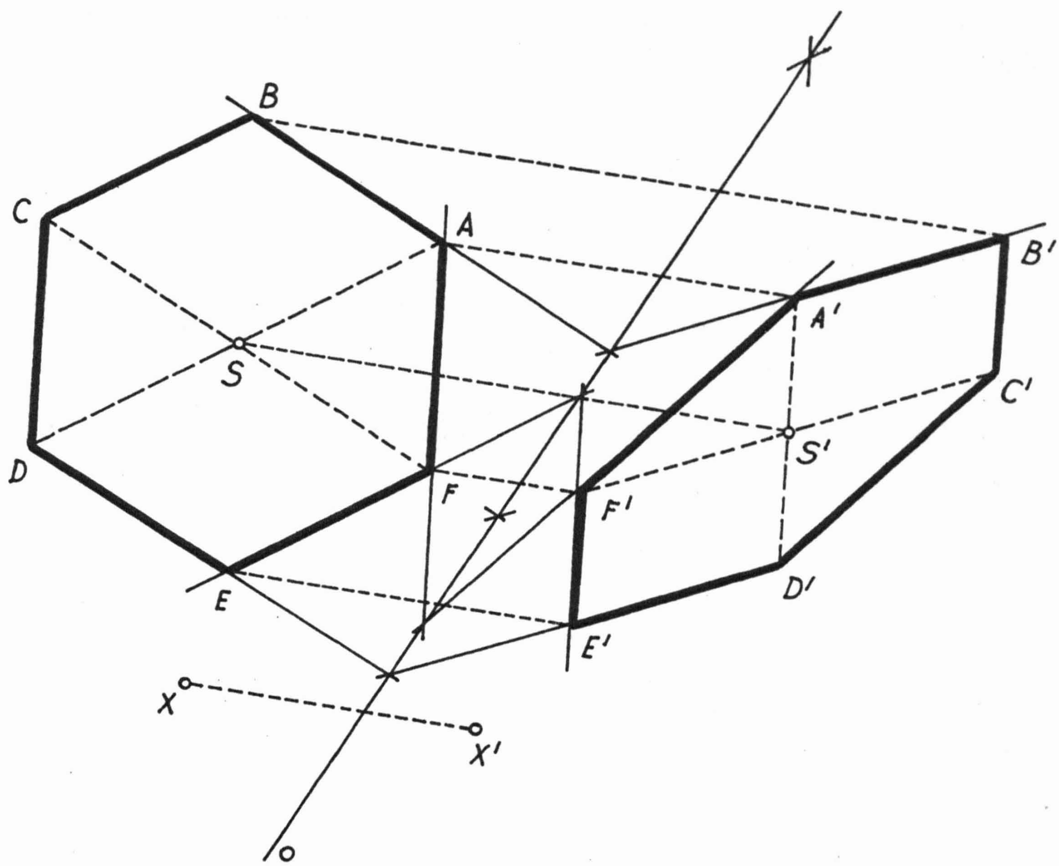
Pro konstrukci obrazu přímky, bodu, úsečky, mnohoúhelníku, ... v afinitě $f = (o, X, X')$ postačí aplikace těchto jejích vlastností:

a) *Je-li přímka p rovnoběžná s osou afinity, je s osou afinity rovnoběžný i její obraz p'. Protíná-li přímka p osu afinity, prochází tímto průsečíkem i její obraz p'.*

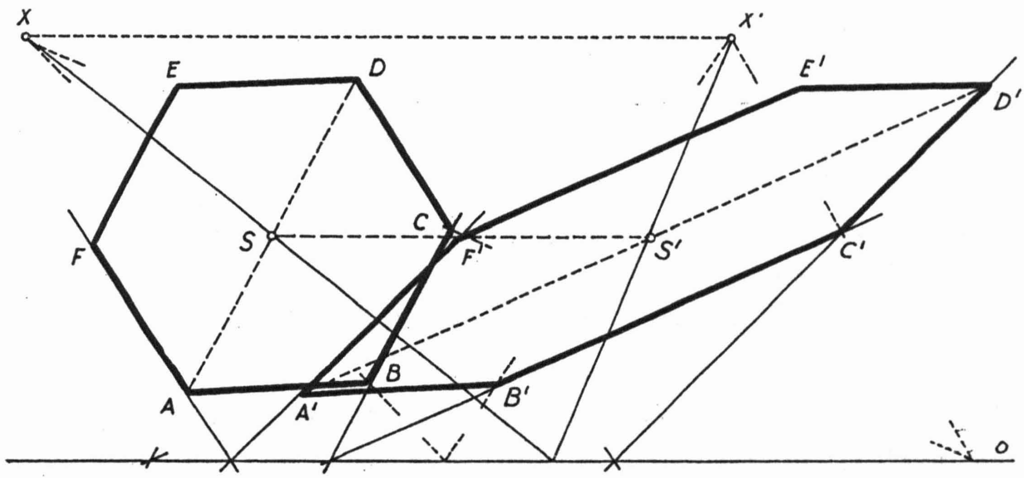
b) *Spojnice sobě odpovídajících bodů $X, X'; Y, Y'; \dots$ jsou navzájem rovnoběžné (náleží směru afinity).*

Úloha 1 *Sestrojte obraz pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ v afinitě $f = (o, X, X')$. Řešte pro případ, kdy přímka XX' osu afinity protíná, i pro případ elace.*

Výsledky jsou nakresleny na obr. 12 a 13.

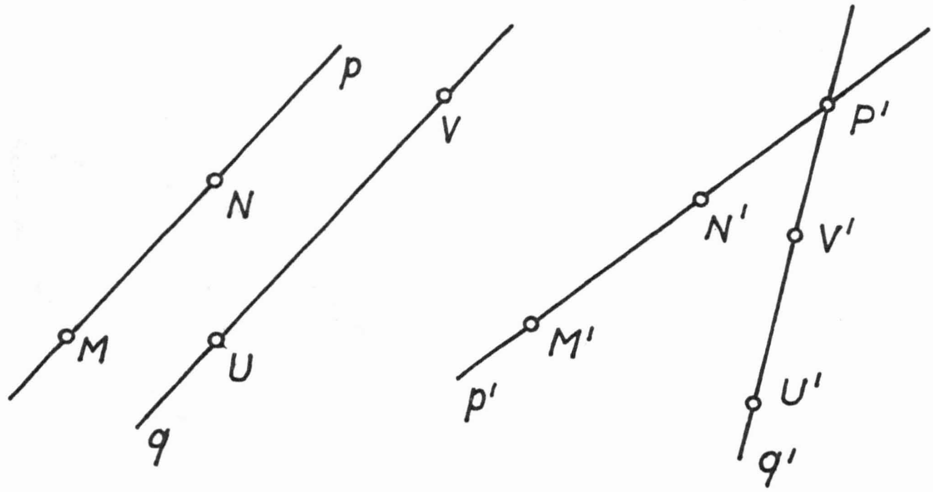


Obr. 12



Obr. 13

Obrazem šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S je šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ se středem S', neboť z rovnosti $(ADS) = -1$ plyne rovnost $(A'D'S') = -1$. To ovšem znamená, že obrazy rovnoběžných přímek v osové afinitě jsou rovnoběžné přímky. Dokažme, že tuto vlastnost má libovolná afinita.



Obr. 14

Jsou dány rovnoběžné přímky $p = MN, q = UV$ a jejich obrazy v afinitě f, přímky $p' = M'N', q' = U'V'$. Kdyby se přímky p', q' protínaly v bodě P', muselo by platit (obr. 14):

$$(M'N'P') = (MNP), \quad (U'V'P') = (UVP).$$

Existoval by tedy bod P, který by ležel na rovnoběžných přímkách p, q. Obrazem rovnoběžných přímek jsou tedy rovnoběžné přímky.

Zřejmě tedy platí: *Obrazem rovnoběžníku (čtverce, obdélníku, ...) v afinitě je rovnoběžník.*

Ukažme, že pro afinity platí analogie věty o rozkladu shodnosti na osové souměrnosti.

Věta. *Každou afinitu, která není osovou afinitou, můžeme rozložit na dvě nebo tři osové afinity.*

Studovanou afinitu označme např. f a určeme obrazy X', Y', Z' libovolných tří nekolineárních bodů X, Y, Z v této afinitě.

Jistě je možné sestrojit osovou afinitu o_1, která převádí bod X do bodu X'. Je-li $X = X'$, volíme osu o_1 tak, aby procházela přímo bodem X'. Je-li $X \neq X'$, volíme osu o_1 tak, aby žádným z bodů X, X' neprocházela. Osou o_1 a body X, X' je tato afinita určena. Sestrojme obrazy Y_1, Z_1 bodů Y, Z v této afinitě. Je-li

$Y_1 = Y', Z_1 = Z'$, je podle věty o určenosti afinity

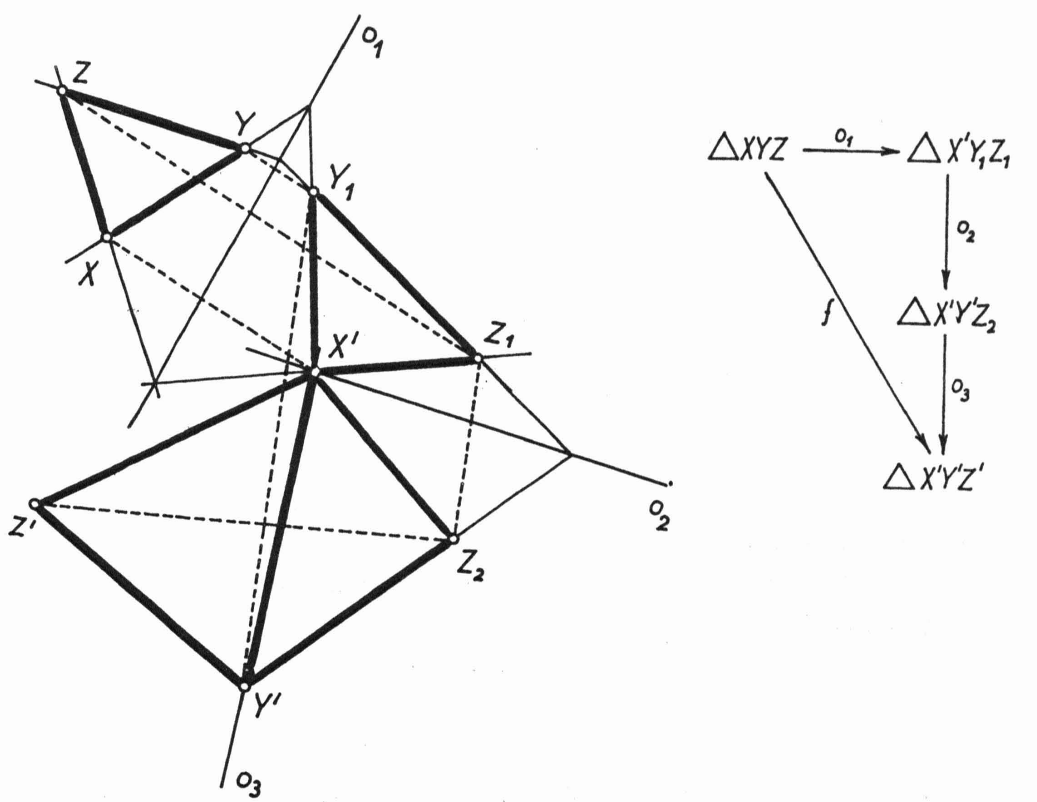
$$f = o_1.$$

Je-li např. $Y_1 \neq Y'$, volíme osu o_2 bodem X' tak, aby neprocházela žádným z bodů Y_1, Y'. Afinita určená osou o_2 a dvojicí bodů Y_1, Y' převádí bod Z_1 do jistého bodu Z_2. Je-li $Z_2 = Z'$, je

$$f = o_2 \circ o_1.$$

Je-li $Z_2 \neq Z'$, pak v afinitě s osou $o_3 = X'Y'$, která převádí bod Z_2 do bodu Z', přejde trojúhelník $X'Y'Z_2$ do trojúhelníku $X'Y'Z'$. Platí tedy (obr. 15)

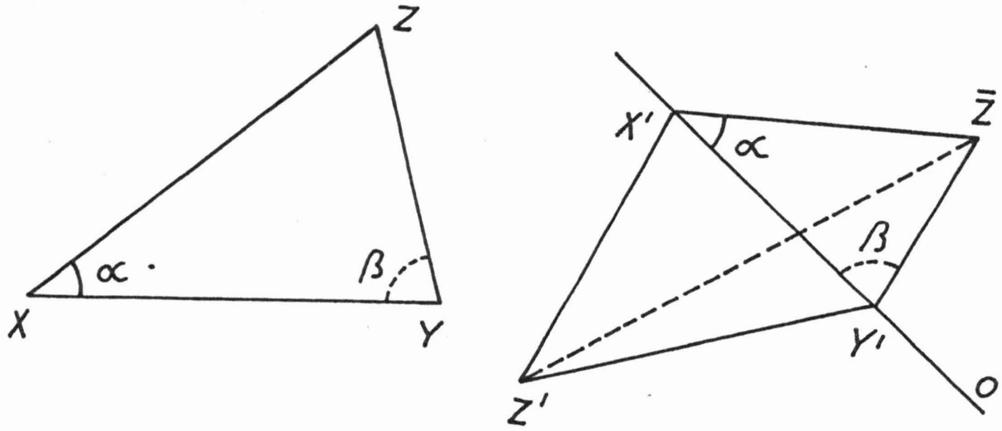
$$f = o_3 \circ o_2 \circ o_1.$$



Obr. 15

Ukažme dále: *Libovolnou afinitu, která není podobností, můžeme rozložit na podobnost a osovou afinitu.*

Označme obraz libovolného trojúhelníku XYZ v afinitě f $X'Y'Z'$. Sestrojíme-li obraz $X'Y'\overline{Z}$ trojúhelníku XYZ v podobnosti p (obr. 16) mohou nastat dvě možnosti. Je-li $\overline{Z} = Z'$, je $f = p$.



$$\begin{tikzcd} \triangle XYZ \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \triangle X'Y'\overline{Z} \arrow[d, "o"] \\ & \triangle X'Y'Z' \end{tikzcd}$$

Obr. 16

Je-li $\overline{Z} \neq Z'$, existuje osová afinita s osou o, která převádí bod $\overline{Z}$ do bodu Z'. Pak je ovšem

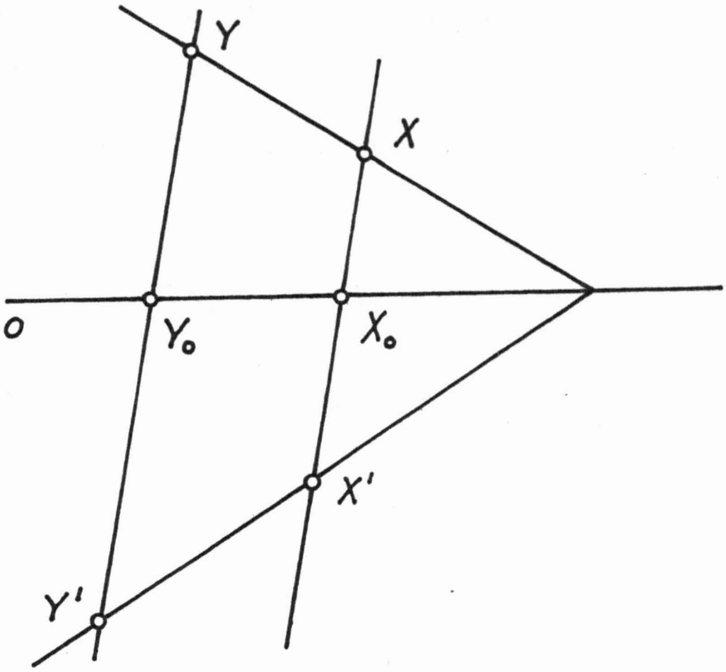
$$f = o \circ p.$$

Libovolnou osovou afinitu $f = (o, X, X')$, která není elací, můžeme určit směrem a tzv. charakteristikou c, definovanou v označení podle obr. 17 takto:

$$c = (X'XX_0).$$

Tato definice má smysl, neboť pro libovolný bod $Y \neq X$ platí

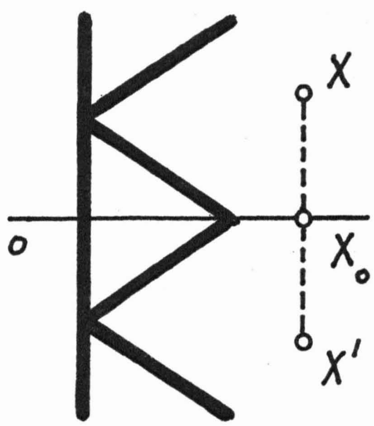
$$(Y'YY_0) = (X'XX_0) = c.$$



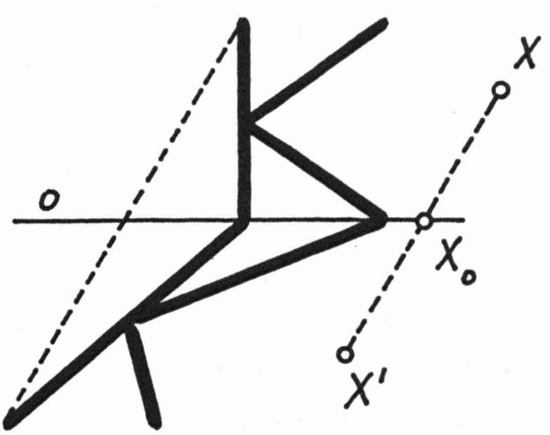
Obr. 17

Osová souměrnost je tedy pravoúhlá afinita (její směr je kolmý k ose) s charakteristikou $(X'XX_0) = -1$ (obr. 18).

Osová afinita s charakteristikou -1, která není pravoúhlá, se nazývá *kosá souměrnost* (obr. 19).



Obr. 18



Obr. 19

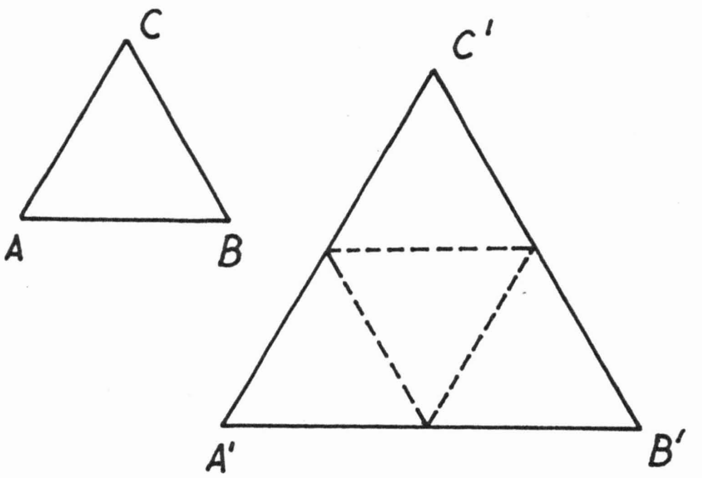
Shodná zobrazení zachovávají obsah útvaru: Je-li M mnohoúhelník, M' jeho obraz ve shodnosti, pak platí pro jejich obrazy

$$S(M) = S(M').$$

Je-li M' obraz mnohoúhelníku v podobnosti s poměrem k, pak platí (obr. 20)

$$S(M') = k^2 \cdot (S(M)).$$

Ověření tohoto tvrzení známého ze školy přenechávám čtenáři.



Obr. 20

Jak se změní obsah útvaru M, zobrazíme-li ho v osové afinitě s charakteristikou c?

Z obr. 21 vidíme, že pro obsah trojúhelníku $X'Y'Z'$, která je obrazem trojúhelníku XYZ v afinitě s charakteristikou c platí

$$S(X'Y'Z') = |c| \cdot S\ (XYZ), \tag{3}$$

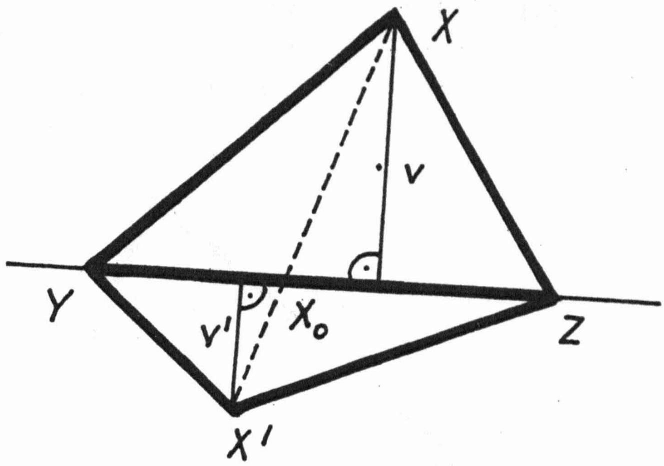
neboť

$$|c| = \frac{|X'X_0|}{|XX_0|} = \frac{v'}{v}.$$

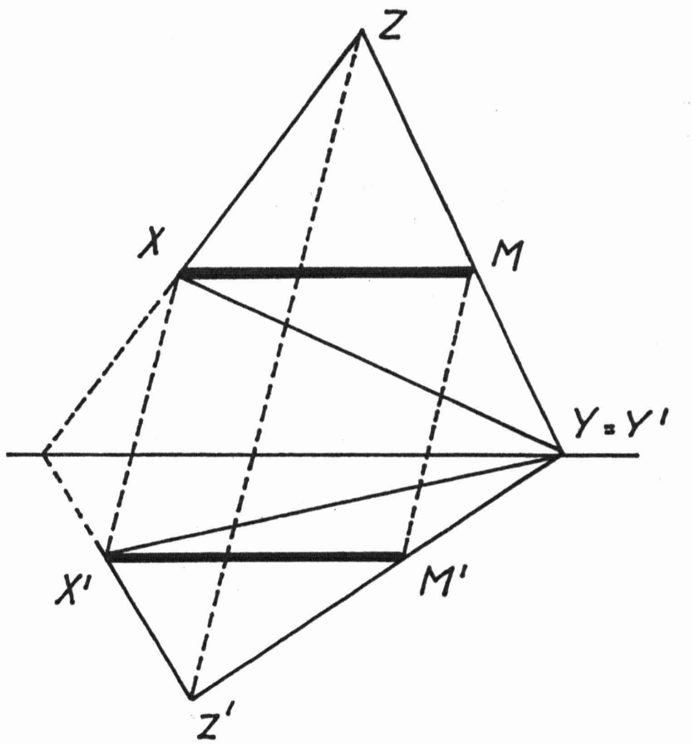
Přenechávám čtenáři, aby podle obr. 22 odvodil, že vztah (3) platí pro libovolný trojúhelník XYZ a jeho obraz $X'Y'Z'$ v osové afinitě s charakteristikou c.

Protože libovolný mnohoúhelník můžeme rozložit na nepřekrývající se trojúhelníky, platí pro libovolný mnohoúhelník M a jeho obraz M' v osové afinitě s charakteristikou c

$$S(M') = |c| \cdot S(M).$$



Obr. 21



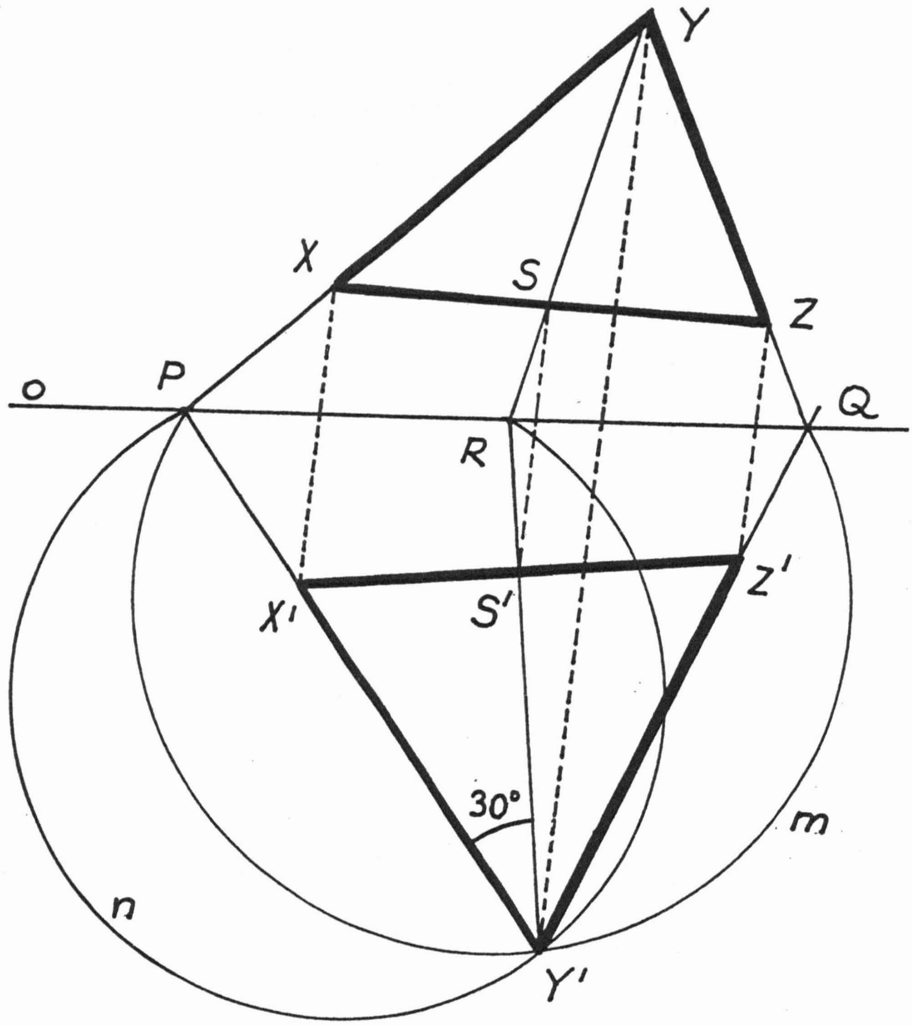
Obr. 22

Na závěr uveďme tři úlohy.

Úloha 2 *Ukažte, že existuje osová afinita, která převádí libovolný trojúhelník do trojúhelníku rovnostranného.*

Předpokládejme, že úloha má řešení. Pak v označení podle obr. 23, kde S je střed strany XZ, platí

$$|\sphericalangle PY'Q| = 60°, \qquad |\sphericalangle PY'R| = 30°. \tag{4}$$



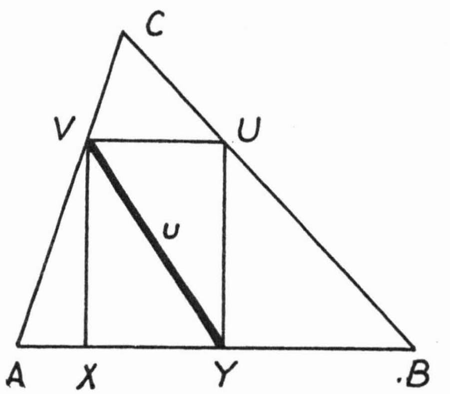
Obr. 23

K danému trojúhelníku XYZ a zvolené ose o můžeme vždy rovnostranný trojúhelník na základě podmínek (4) sestrojit. Bod Y' náleží jednak množině m bodů, z nichž je vidět úsečka PQ pod úhlem 60°, jednak množině n bodů, z nichž je vidět úsečku PR pod úhlem 30°. Protože v jedné polorovině se kružnicové oblouky m, n protínají, můžeme sestrojit podle obr. 23 trojúhelník $X'Y'Z'$. Že je tento trojúhelník rovnostranný vyplývá z toho, že jen v rovnostranném trojúhelníku je těžnice osou úhlu, z něhož vychází. Podrobnější zdůvodnění přenechávám čtenáři.

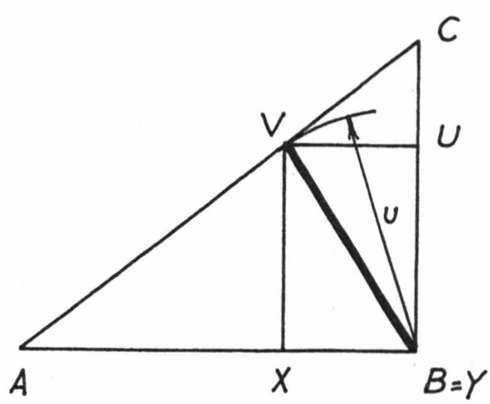
Úloha 3 *Danému trojúhelníku vepište obdélník, který má úhlopříčku dané délky.*

Úlohu se nám patrně zpočátku nedaří vyřešit (obr. 24). Volíme-li např. polohu bodu Y a sestrojíme bod V, nebude čtyřúhelník $XYUV$ obdélníkem.

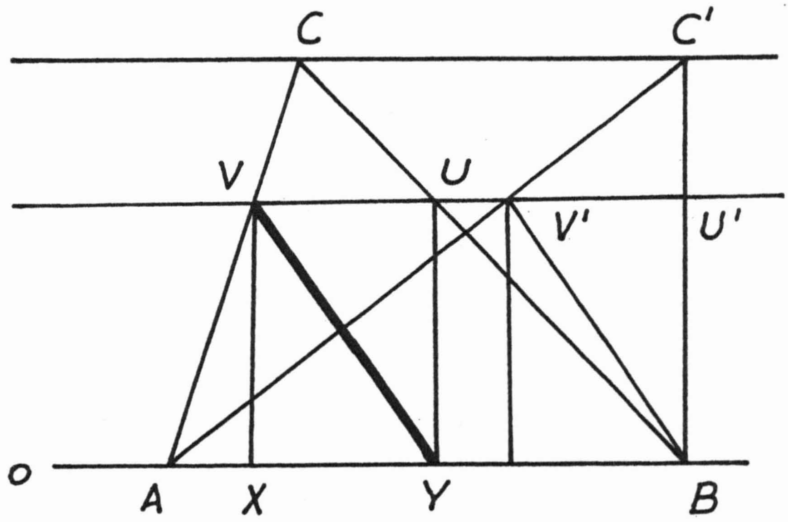
Pokusme se tedy vyřešit úlohu ve speciálním případě, např. je-li trojúhelník ABC pravoúhlý. V tomto případě je řešení zřejmé podle obr. 25.



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

Naší úlohu můžeme převést na zmíněnou speciální úlohu vhodnou elací s osou o, v níž bodu C odpovídá bod C' podle obr. 26, neboť ze stejnolehlostí $h(C', k)$, $h'(C, k)$ vyplývá,

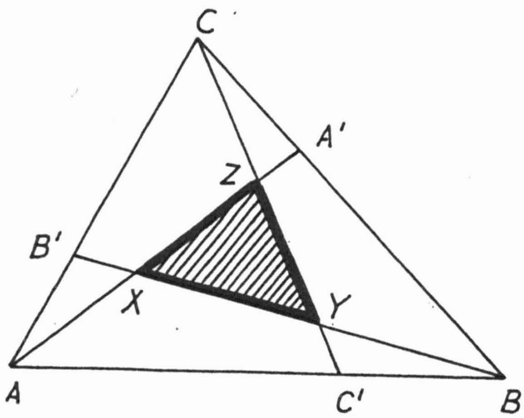
$$|VU| = |V'U'|.$$

Nakonec uveďme velmi známou úlohu, která několikrát obletěla didaktický svět, mám však dojem, že u nás se již delší dobu neobjevila.

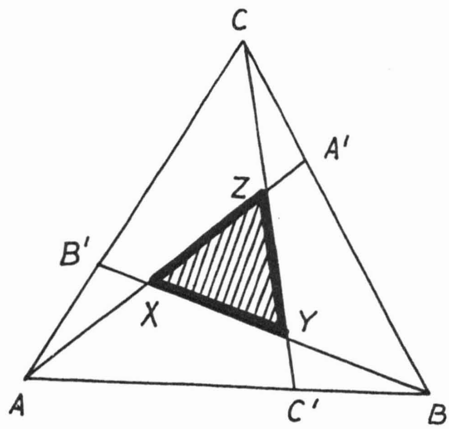
Úloha 4 *V libovolném trojúhelníku ABC jsou dány body A', B', C' tak, že platí*

$$(ABC') = (BCA') = (CAB') = -2.$$

Jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá vyšrafovaný trojúhelník XYZ na obr. 27?



Obr. 27

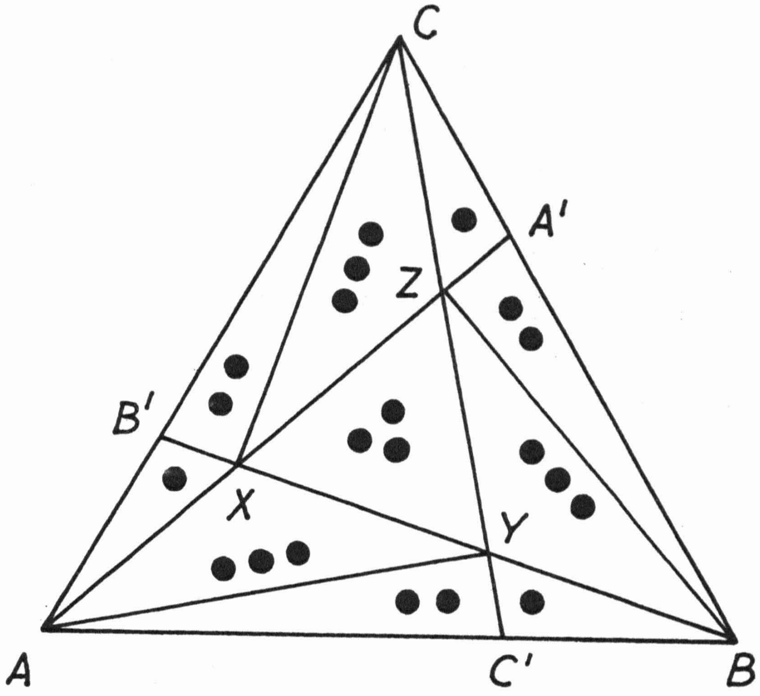


Obr. 28

Vzhledem k tomu, že libovolný trojúhelník můžeme převést osovou afinitou v trojúhelník rovnostranný a pro obsah trojúhelníku v osové afinitě platí vztah (3), můžeme řešit úlohu pro rovnostranný trojúhelník.

V rovnostranném trojúhelníku ABC jsou trojúhelníky $AB'X$, $BC'Y$, $CA'Z$ shodné a obsah každého z nich je roven třetině obsahu trojúhelníku XYZ. To si uvědomíme např. takto. Obsah každého z trojúhelníků ABB', BCC', CAA' je třetinou obsahu trojúhelníku ABC. Budeme-li pokrývat trojúhelník ABC postupně těmito trojúhelníky, bude každý z trojúhelníků $AB'X$, $BC'Y$,

$CA'Z$ pokryt dvakrát, zatímco trojúhelník XYZ zůstává nepokryt (obr. 28). Označíme-li obsah každého z trojúhelníků $AB'X$, $BC'Y$, $CA'Z$ písmenem S (v obr. 29 kreslíme místo S tečku), je obsah trojúhelníku XYZ roven $3S$.



Obr. 29

Z konstrukce je dále zřejmé, že trojúhelníky AYC', BZA', CXB' mají obsah $2S$. Zbývá tedy určit obsahy trojúhelníků AYX, BZY, CXZ.

Vzhledem k tomu, že výška ke straně ZY v trojúhelníku AYZ je dvojnásobkem výšky ke straně ZY v trojúhelníku ZYB (to plyne z toho, že CC' je těžnice), platí pro obsahy těchto trojúhelníků

$$S(AYZ) = 2 \cdot S(ZYB),$$

$$S(XYZ) + S(AXY) = 2 \cdot S(AXY),$$

neboť trojúhelníky ZYB a YXA jsou shodné.

Je tedy

$$S(AXY) = S(XYZ) = 3S.$$

Pro obsah trojúhelníku ABC tedy platí

$$S(ABC) = 3S + 3 \cdot 2S + 4 \cdot 3S = 21S.$$

Obsah trojúhelníku XYZ je sedminou obsahu trojúhelníku ABC.

LITERATURA

[1] Kuřina, F., *Geometrická zobrazení a jejich invarianty.*, Učitel matematiky **9** (2000), 6 – 19.
[2] Kuřina, F., *Orbity geometrických transformací*, Učitel matematiky **9** (2001), 74 – 84.
[3] Hrubý, D., Kubát, J., *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet*, Prometheus, Praha, 1997.

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky Ped. fakulty Univerzity Hradec Králové
nám. Svobody 331, Hradec Králové
email: frantisek.kurina@uhk.cz