Jaroslav Hora

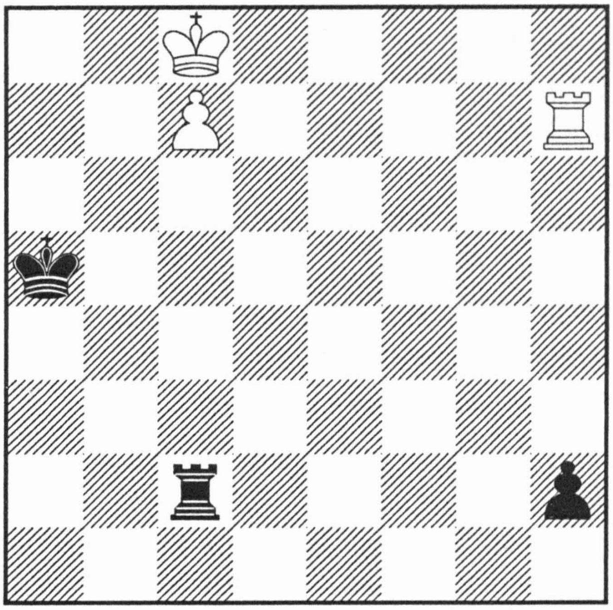
Nejen o větě Laskera-Noetherové o rozkladu ideálu

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 2, 65–78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150926

NEJEN O VĚTĚ LASKERA — NOETHEROVÉ O ROZKLADU IDEÁLU

JAROSLAV HORA



Emanuel Lasker, 1890
Bílý: Kc8, Vh7, pc7, černý Ka5, Vc2, ph2. Bílý na tahu vyhraje.

Výhoda bílého tkví v tom, že jeho král podporuje pěšce, který se po úvodním tahu **1. Kb7** hrozí proměnit v dámu. Proto černý hraje **1. ... Vb2+ 2. Ka7 Vc2**. Nyní má bílý příležitost vytěsnit černého krále na čtvrtou řadu tahy **3. Vh5+ Ka4** a po **4. Kb7 Vb2+ 5. Ka6 Vc2** dokonce na řadu třetí **6. Vh4+ Ka3**. Po **7. Kb6** již bílý hrozí tahem **Vxh2**, proto černý opět musí šachovat **7. ... Vb2+ 8. Ka5 Vc2**. Následuje odtěsnění černého krále na druhou řadu **9. Vh3+ Ka2**. Tahem **10. Vxh2!** se ukazuje smysl celého postupu, neboť po **10. ... Vxh2 11. c8D** přechází bílý do technicky vyhrané koncovky, v níž má rozhodující materiální výhodu.

„Výstup po Laskerových schodech" se stal standardním technickým prostředkem mezi hráči vyšší úrovně. Nejde tedy o vyumělkovanou záležitost. Ve studentských letech jsem měl více času na přehrávání partií, a tak si vzpomínám na dvě partie, kde znalost této studie pomohla českým velmistrům k vítězství (partie V. Jansa – J. Geller, Budapešť 1970 a V. Tukmakov – J. Smejkal, Leningrad 1973).

Autorem studie nebyl nikdo menší než nejdéle kralující mistr světa v šachu, Emanuel Lasker. Narodil se 24. 12. 1868 v Berlinchenu, tehdy asi sedmitisícovém městečku s německým, polským i židovským obyvatelstvem (dnes leží v Polsku) v chudé židovské rodině. Traduje se, že již jako osmiletý uměl násobit dvoumístná čísla. Šachy se naučil od staršího bratra. Střední školu absolvoval v Berlíně (šlo o reálné gymnázium se základními předměty matematikou a anglickým a francouzským jazykem). Ředitelem školy byl prof. Kewitz, shodou okolností i prezident místního šachového klubu. Díky jemu se zachovalo i zadání písemných prací z matematiky, které museli vypracovat abiturienti gymnázia v roce 1888 a tedy i E. Lasker (přeloženo ze [13]):

1. *Nalezněte největší kužel, vepsaný do kulové plochy, a nejmenší kužel, opsaný kulové ploše.*
2. *Nalezněte společné tečny elipsy a koncentrické hyperboly se stejnou délkou os.*
3. *Sestrojte a trigonometricky vyřešte trojúhelník se základnou $c = 273$ a výškou $h = 156$, je-li rozdíl zbývajících stran $a - b = 91$.*
4. *Rozložte následující výrazy na parciální zlomky:*

$$\text{A)}\ \frac{7x^2 + 7x - 88}{x^3 - 9x^2 + 6x + 56} \qquad \text{B)}\ \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4}$$

Podle Kewitzova svědectví potřebovali žáci k vypracování této práce asi 5 hodin, zatímco Lasker 2 hodiny. Pak Lasker svého profesora požádal o příklad navíc (ten se týkal Dioklovy kisoidy), který vyřešil také.

Je tu však jedna nejasnost. Lasker byl přijat do školy o dva roky výše než jeho vrstevníci, ale gymnázium dokončil téměř ve dvaceti, zatímco věk ostatních abiturientů byl 16 – 17 let. Zdá se tedy, že 3 – 4 roky zřejmě věnoval šachové hře v berlínských kavárnách. Šachy mu poskytovaly výdělek. Laskerův šachový vzestup v dalších letech byl prudký: od prvních turnajových vystoupení v r. 1889 přes řadu vítězných zápasů s předními německými a anglickými mistry až po výzvu k zápasu o mistrovství světa Wilhelmu Steinitzovi koncem srpna 1893. Pak následovala delší jednání o podmínkách zápasu. Ten začal v březnu 1894 v New Yorku, pokračoval ve Philadelphii a skončil 26. 5. v Montrealu. Lasker v něm zvítězil 12 : 7 a stal se mistrem světa. Titul pak udržel i v odvetném zápase, kdy stárnoucího Steinitze porazil 12 : 4. Poté následovala pro Laskera doba „velkých turnajů", kdy znovu potvrdil před šachovým světem své kvality. Získal materiální zajištění a — vrátil se na univerzitu v Erlangenu, kde v lednu 1902 obhájil doktorskou disertaci (práce nesla název *Über Reihen auf der Konvergenzgrenze*).

Lasker zřejmě mohl volit kariéru matematika, přednášel v r. 1893 na Tulane Univerzity v New Orleans, v r. 1901 na Victoria University v Manchesteru ve Velké Británii, ale celý život byl profesionálním šachistou. V poměrně dlouhých obdobích, kdy se nezúčastňoval turnajů, se i nadále věnoval matematice a filozofii. Některé Laskerovy práce by patřily do matematické disciplíny zvané dnes teorie her, věnoval se rovněž matematickému studiu karetních her, ale těmito záležitostmi se však nebudeme zabývat. Článek motivovaný jednou z Laskerem studovaných karetních her lze nalézt v [2]. V r. 1902 pak Lasker přesídlil do USA a do Německa se vrátil až r. 1907. V r. 1905 vychází v Math. Annalen článek *Zur Theorie der Moduln und Ideale*, k jehož významu se ještě vrátíme a pokusíme se tento Laskerův příspěvek zařadit do širšího kontextu vývoje moderní algebry.

Po roce 1907 nastala pro Laskera éra *velkých zápasů*, kdy obhajoval titul mistra světa v šachu. Své umění velkého šachového psychologa využil snad nejvíce v těžkém zápase s Dr. Siegbertem Tarraschem v r. 1908. Existuje zajímavá česká kniha věnovaná psychologickým aspektům šachové partie [15], v níž čtenář nalezne podrobnější informace. Zestručníme-li další vývoj, můžeme konstatovat, že opravdu vážný soupeř vyrostl Laskerovi teprve v J. R. Capablankovi. Jednání o zápase s ním přerušila v r. 1914 válka, která obecně znamenala velmi těžké období pro profesionální šachisty, a tak k zápasu mezi těmito klasiky šachové hry došlo teprve v r. 1921. Lasker ztratil titul mistra světa, který držel 27 let, když zápas vzdal za stavu 0 : 4 při deseti remízách. Avšak i poté zůstal velice silným turnajovým hráčem a Capablanku dokázal předstihnout na turnajích v New Yorku 1924 či v Moskvě 1925. Přišly však i rány osudu, kdy nacistický režim zabavil berlínský byt rodiny Laskerových, jejich farmu v Thyrowě a životní úspory. Nastala léta bez vlasti a životních jistot. Bez prohry absolvoval Lasker dokonce ještě i turnaj v Moskvě v r. 1935. Po dalším turnaji v Moskvě 1936 byl Laskerovi nabídnut pobyt v Moskvě a členství v Akademii věd. Lasker tuto nabídku přijal. Během návštěvy USA v r. 1937 onemocněla Marta Laskerová a nemohla cestovat, takže oba už zůstali ve Spojených státech. Lasker zemřel v New Yorku v roce 1941.

Ještě dvě zmínky o Laskerově všestrannosti. Spolu s bratrem Bertholdem byl autorem divadelní hry *Vom Menschen die Geschichte.* Telegram se zprávou od ženy, která mu sdělovala, že tato hra bude brzy uvedena na scéně, obdržel prý Lasker v průběhu partie s Mexičanem Torrem v Moskvě 1925. Tato radostná zpráva vyvedla jindy plně koncentrovaného Laskera natolik z rovnováhy, že dobře stojící partii ještě prohrál. Celou kombinaci, tzv. „mlýnek“, lze najít na šachové stránce časopisu Kvant, 1999, č. 2.

Druhá zmínka se týká Laskerova přátelství s A. Einsteinem. Kniha [5] obsahuje Einsteinovu předmluvu. Ten v jejím závěru děkuje *tomu neúnavnému, nezávislému a skromnému člověku za besedy, kterými mne obdaroval* a zmiňuje se zároveň o jednom tématu vztahujícímu se k teorii relativity, které dokládá šíři Laskerových zájmů. Lasker konstatuje, že nikdo nemá bezprostřední informaci o rychlosti světla v **absolutně** prázdném prostoru, a ptá se, kdo by mohl popírat, že tato rychlost je nekonečná. V uvedené předmluvě Einstein s tímto názorem polemizuje. Laskerovu ideu srovnává s pokusem rozetnout gordický uzel a píše (přeloženo z knihy [13]):

Je naprostá pravda, že nikdo nemá bezprostřední experimentální zkušenost o tom, jak se šíří světlo v **absolutně** *prázdném prostoru. Ale zároveň nelze vybudovat rozumnou teorii světla, která by připouštěla, že výskyt minimálního množství hmoty v prostoru má nějaký podstatný vliv na rychlost šíření světla. Dokud není zformulována takováto teorie, která by byla v souladu s pozorováními optických jevů v* **téměř** *prázdném prostoru, žádný fyzik nepřijme předkládaný mu způsob rozetnutí gordického uzlu a počká, dokud nebude nalezen pravdivý způsob.*

Einstein srovnává Laskera s Benediktem Spinozou, který si zajišťoval materiální nezávislost broušením optických čoček. Laskerův úděl byl podle Einsteina těžší, neboť hra v šachy zatěžuje mozek. Šachová hra prošla za minulá desetiletí pozoruhodným vývojem. V poslední době jsou k analýzám užívány počítače. Laskerova studie končila v pozici K + D : K + V. Programátor Ken Thompson podrobil koncem osmdesátých let tyto pozice počítačové analýze. Na šachové olympiádě v Soluni v r. 1988 nedokázali tuto koncovku proti počítači v limitu 50 tahů vyhrát J. Speelman, B. Spasskij a A. Běljavskij. Počítač se bránil perfektně a bylo nutné nacvičit vítězný manévr. Nyní existuje jako komerční produkt hamburské firmy ChessBase úplná databáze pěti (a méně) kamenových koncovek — více o tom ve [14]. Změnily se i zápasy o titul šachového mistra světa: od „boxu intelektu", zápasů jednotlivců za Laskerových dob nastal posun k zápasům předních hráčů, podporovaných v zákulisí celými týmy sekundantů, resp. počítačovými programy a databázemi. Objevy Kasparova a jeho týmu v jedné variantě sicilské hry byly srovnány s bádáním o lidském genomu.

Nyní se však vraťme ke zřejmě hlavnímu Laskerovu matematickému dílu, tj. k práci [10]. Tato práce je pro historii matematiky zajímavá tím, že se tu objevuje pojem *primárního ideálu.* Celá oblast primárních rozkladů ideálů zaznamenala pozoruhodný vývoj a nejnověji již existují počítačové programy, které ji činí dostupnou i pro širokou matematickou veřejnost, nikoli jen pro úzký okruh specialistů. Pokusíme se teď tento vývoj popsat.

Ze školních let si dobře vzpomínáme na hledání prvočíselných rozkladů v oboru integrity celých čísel, např. $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$ atd. Obor integrity celých čísel patří mezi obory integrity s jednoznačným rozkladem (dokonce jde o eukleidovský obor integrity). Bohužel se ukázalo, že ne každý obor integrity je oborem integrity s jednoznačným rozkladem. Bylo tedy nutné hledat „silnější", „obecnější" alternativu. V oboru integrity celých čísel se však nejsnáze seznámíme s některými základními pojmy a získáme představu o tom, jak se věci vyvinuly.

Buď $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Lze psát

$$a = j \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \tag{1}$$

kde j je jednotka ve smyslu dělitelnosti, p_i jsou prvočísla a $n_i > 0$ celá čísla pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$. Připomeňme, že podmnožina I komutativního okruhu R se nazývá *ideálem*, jestliže

(i) $o \in I$
(ii) jestliže $i, j \in I$, potom též $i + j \in I$
(iii) jestliže $i \in I$, $r \in R$, potom $r \cdot i \in I$.

Definice: Ideál I komutativního okruhu R se nazývá *prvoideál*, jestliže z $a, b \in R$, $a \cdot b \in I, a \notin I$, plyne $b \in I$.

Definice: Ideál I komutativního okruhu R se nazývá *primární*, jestliže z $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$, $a \neq I$, plyne $b^n \in I$ pro nějaké přirozené číslo n.

Příklad: Ideál (7) je prvoideál v $(\mathbb{Z}, +, .)$ a samozřejmě jde též o primární ideál. Ideál (10) není prvoideál. Ideály (72) či (53) jsou primární ideály v $(\mathbb{Z}, +, .)$.

V jazyce ideálů lze psát

$$(a) = (p_1^{n_1}) \cdot (p_2^{n_2}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{n_k}) = (p_1^{n_1}) \cap (p_2^{n_2}) \cap \ldots (p_k)^{n_k} \tag{2}$$

Ve studovaném případě se zdá, že každý vlastní ideál v $\mathbb{Z}$ je možné zapsat jakožto průnik konečného počtu primárních ideálů. Povšimněme si, že každému z těchto primárních ideálů

(p^n) je možno zřejmým způsobem přiřadit jistý prvoideál, totiž (p). Vidíme, že v oboru integrity celých čísel je každý primární ideál (p^n) mocninou prvoideálu (p) a také je dobře známo, že $(\mathbb{Z}, +, .)$ je oborem integrity hlavních ideálů. Bohužel toto není pravda vždy: ne každý obor integrity je oborem integrity hlavních ideálů a obecně není ani každý primární ideál mocninou prvoideálu. (Kupř. množina všech polynomů se sudými absolutními členy v $\mathbb{Z}[x]$ tvoří ideál, který není hlavní).

Lasker studoval obory integrity polynomů více neurčitých, resp. obory integrity konvergentních mocninných řad. Ve své práci [10] právě v těchto oborech objevil ideu primárních rozkladů naznačenou ve (2). Laskerovy důkazy jsou ovšem velmi komplikované a využívá se tu teorie eliminace a rezultantů k tomu, aby bylo možné provést indukci na počet proměnných. Posléze celou látku přepsala Emma Noetherová v [11]. Ukázala, že celou teorii primárních rozkladů lze vyvodit z maximální podmínky pro ideály. Naznačíme, jaký charakter tím teorie získala. Slovem okruh míníme v dalším okruh s jednotkovým prvkem.

Definice: Komutativní okruh R se nazývá *noetherovský*, jestliže splňuje maximální podmínku pro ideály.

Byly nalezeny i ekvivalentní charakterizace, např.: *Okruh R je noetherovský, právě když každý ideál okruhu R je konečně generovaný.* Je rovněž známo, že *pokud je okruh R noetherovský, je i každý faktor-okruh R/I noetherovský.* Platí také klasická Hilbertova věta o bázi: *Je-li R noetherovský okruh, pak i okruh polynomů jedné neurčité $R[x]$ je noetherovský.* Odtud ovšem indukcí obdržíme, že *pro každé přirozené n je i okruh $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ noetherovský.* Nakonec uveďme, že za daných předpokladů o R je noetherovský i $R[[x]]$, tj. okruh formálních mocninných řad nad R.

Definice: Ideál A okruhu R se nazývá *ireducibilní*, jestliže A nelze vyjádřit ve tvaru $A = I \cap J$, kde I, J jsou ideály okruhu R, $A \subset I$, $B \subset I$. $A \neq J$, $B \neq J$.

Příklad: Ideál (7) v oboru integrity celých čísel $\mathbb{Z}$ je ireducibilní, ale ideál (10) je reducibilní, neboť lze psát $(10) = (2) \cap (5)$.

Věta 1: *Každý ideál komutativního noetherovského okruhu R je průnikem konečného počtu ireducibilních ideálů.*

Důkaz: Označme $\mathbb{M}$ množinu všech ideálů komutativního noetherovského okruhu R, které nelze napsat jako průnik konečného počtu ireducibilních ideálů a předpokládejme, že $\mathbb{M}$ je neprázdná. Podle předpokladu $\mathbb{M}$ splňuje maximální podmínku pro ideály, tj. $\mathbb{M}$ obsahuje maximální prvek M. Ideál M není ireducibilní, tj. $M = A \cap B$, kde A, B jsou ideály okruhu R, $M \subset A$, $M \neq A$, $M \subset B$, $M \neq B$. Avšak $A, B \neq \mathbb{M}$, tj. $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, $B = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m$, kde $A_i, i = 1, \ldots, n$, $B_i, i = 1, ..., m$, jsou ireducibilní ideály okruhu R. Pak ideál $M = A \cap B = A_1 \cap A2 \cap \cap \ldots \cap A_n \cap B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m$ je rozložitelný na průnik konečného počtu ireducibilních ideálů, což je spor.

Vidíme, že klasická „noetherovská" teorie rozkladů ideálů má nepříjemnou vadu — důkazy nejsou konstruktivní.

Připomeňme, že ideál I komutativního okruhu R se nazývá *primární*, jestliže z $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$, $a \neq I$, plyne $b^n \in I$ pro nějaké přirozené číslo n.

Lze dokázat, že v komutativním noetherovském okruhu R platí, že každý ireducibilní ideál tohoto okruhu je primární.

Věta 2: *Každý ideál komutativního noetherovského okruhu R je průnikem konečného počtu primárních ideálů.*

Věta 3 (Lasker — Noetherová): *Buď R komutativní noetherovský okruh. Pak každý ideál I okruhu R lze vyjádřit jako nezkratitelný průnik primárních ideálů $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, přičemž prvoideály $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jsou navzájem různé. Přitom číslo k a prvoideály $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jsou ideálem I určeny jednoznačně.*

Takto vybudovaná teorie je sice elegantní, ale vadou je její nekonstruktivnost. Jak se má nalézt např. rozklad nějakého polynomiálního ideálu? Počet příkladů uváděných v různých učebnicích algebry je nevelký a celá záležitost byla dostupná spíše jen pro specialisty v oboru. Zdálo se, že ani nástup programů počítačové algebry jako je kupř. MATHEMATICA či MAPLE situaci nezměnil. Tyto programy jsou zaměřeny obecněji, obsahují sice i některé „příbuzné" výpočty (Gröbnerova báze ideálu), ale nepokrývají tyto specializovanější záležitosti.

Nyní několik dobrých zpráv. Byly objeveny algoritmy pro nacházení primárního rozkladu (více o nich v [4] či [12]). Dále, tyto algoritmy byly implementovány do některých specializovaných programů počítačové algebry. Nakonec, některé z těchto programů jsou volně dostupné (tj. bez poplatku). V závěru tohoto příspěvku naznačíme, jak souvisí problematika primárního rozkladu s řešením soustav polynomiálních rovnic. Užití počítačových programů činí tuto oblast matematiky dostupnější širšímu okruhu zájemců. Momentálně asi nejlepším programem je německý **Singular**. Jeho vývoj začal v r. 1984 na Humboldtově univerzitě v Berlíně, od začátku roku 1990 bylo domovské město programu přesunuto do Kaiserslauternu. Program provádí výpočty s polynomy s důrazem na potřeby komutativní algebry, algebraické geometrie a teorie singularit. Momentálně je k dispozici verze 1.2 a ta má dodatečné knihovny např. pro primární rozklad ideálu.

Příklad: V souřadnicové rovině zobrazte množinu bodů $M(x,y)$, jejichž souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 9y^2 &= 0 \\ (x+3y)(x+y-1) &= 0 \end{aligned}$$

(přijímací zkoušky na Moskevskou státní univerzitu, 1996, fakulta technologie a podnikání).

Řešení: A) „Lidský“ přístup k problému by zřejmě vedl přes rozložení (faktorizaci) polynomu na levé straně první rovnice. Psali bychom tedy $(x-3y)(x+3y) = 0$ a ihned bychom nahlédli, že původní soustava bude má právě ta řešení $[x,y]$, pro něž

$$\text{I. } x + 3y = 0 \quad \text{nebo} \quad \text{II. } x - 3y = 0 \wedge x + y - 1 = 0.$$

V případě I. dostáváme nekonečně mnoho řešení tvaru $[-3t, t]$, $t \in R$ a při znázornění v souřadnicové rovině dostáváme přímku $y = -\frac{1}{3}x$.

V případě II. je řešením dané soustavy jediný bod $\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

B) Aplikujme teorii Gröbnerových bází a k vyřešení zadané soustavy rovnic využijme např. program MAPLE. Po nahrání „balíčku“ (package) **grobner** necháme vypočítat příslušnou Gröbnerovu bázi a pak užijeme povel gsolve, který soustavu řeší právě pomocí Gröbnerovy báze:

```
with(grobner);
gbasis([x^2-9*y^2,(x+3*y)*(x+y-1)],[x,y],plex);
```

$$[x^2-9y^2, 12y^2+4xy-x-3y]$$

```
gsolve([x^2-9*y^2=0,(x+3*y)*(x+y-1)=0],[x,y]);
```

$$[[x+3y], [x,y], [4x-3, 4y-1]]$$

Je vidět, že řešení bylo nalezeno „vcelku“ správně. Námitky bychom zřejmě měli jen proti „neestetickému“ zápisu bodu $[0,0]$ dvakrát — jednou leží na přímce o rovnici $x+3y=0$, podruhé je uveden zvlášť. I vzhledem k tomu, že varieta $V(x^2-9y^2, (x+3y)(x+y-1))$ je „slepena“ ze dvou „jednodušších“ útvarů (přímka a bod), mohlo by být lákavé vyzkoušet „laskerovský“ rozklad ideálu $I = \langle x^2-9y^2, (x+3y)(x+y-1)\rangle$. V programu Singular obdržíme následující:

```
by: G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann       \ October 1998
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern   \
> LIB"primdec.lib";
> ring r=0,(x,y),lp;
> ideal i=x2-9y2,(x+3*y)*(x+y-1);
> primdecGTZ(i);
[1]:
  [1]:
    _[1]=x+3y
  [2]:
    _[1]=x+3y
[2]:
  [1]:
    _[1]=4y-1
    _[2]=4x-3
  [2]:
    _[1]=4y-1
    _[2]=4x-3
```

S programem Singular získáme i elektronický manuál, který nám pomůže se zápisem. Je patrné, že nejprve jsme nahráli

„knihovnu“ LIB„primdec.lib“; pro hledání primárního rozkladu ideálu (zapsaný povel vždy zakončujeme středníkem). Program Singular umí pracovat s různými obory integrity. Zápisem ring$r = 0, (x, y)$ deklarujeme, že výpočet má probíhat v $\mathbb{Q}[x, y]$ a lp značí, že k uspořádání termů bude užito lexikografické uspořádání. Dále je nutné zadat ideál i. Posléze máme na výběr hned ze dvou implementovaných technik pro hledání primárního rozkladu. Zápis primdecGTZ(i) znamená, že jsme se rozhodli vyzkoušet postup navržený Giannim, Tragerem a Zachariasem. Druhou možností je primdecSY (i), opírající se o metodu navrženou Shimoyamou a Yokoyamou.

Objeví se výsledek, který interpretujeme tak, že ideál i je průnikem dvou primárních ideálů, $i = \langle x + 3y\rangle \cap \langle 4y - 1, 4x + 3\rangle$. V daném případě splývají primární komponenty s asociovanými prvoideály. Vše můžeme přečíst tak, že je možné řešit dvě soustavy rovnic určené prvoideály, a to I. $x + 3y = 0$ nebo II. $4y - 1 = 0 \wedge 4x - 3 = 0$. Je patrné, že bychom dostali stejný závěr jako v části A).

Je vhodné si v elektronickém manuálu programu Singular zvolit menu EXAMPLES a dále primary decomposition, načež získáme další informace o obou metodách. Volbou SINGULAR libraries a pak primdec_lib se dostaneme k přehledu dalších povelů, obsažených ve zvolené knihovně (library).

Řešte soustavu rovnic (viz [3]):

$$
\begin{gathered}
y \cdot (x - y + z - u - 1) = 0 \\
x \cdot y \cdot (x - z + u - 1) = 0 \\
x \cdot z \cdot (-y + z + u + 1) = 0 \\
x \cdot (x - y + u) = 0.
\end{gathered}
$$

Řešení: A) „Lidský“ způsob řešení by asi vedl k rozboru několika případů:

$$
\begin{gathered}
\text{I. } x = 0 \wedge y = 0 \\
\text{II. } x = 0 \wedge y - z + u + 1 = 0 \\
\text{III. } y = 0 \wedge z = 0 \wedge x + u = 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{IV. } & y = 0 \wedge z + u + 1 = 0 \wedge x + u = 0 \\
\text{V. } & z = 0 \wedge 2u + 1 = 0 \wedge 2x - 3 = 0 \wedge y - 1 = 0 \\
\text{VI. } & x - y + z - u - 1 = 0 \wedge x - z + u + 1 = 0 \wedge \\
& \wedge - y + z + u + 1 = 0 \wedge x - y + u = 0
\end{aligned}
$$

a získáme tyto obory pravdivosti:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P_I} &= \{[0,0,t,s]\}, t,s \in \mathbb{C} \\
\mathrm{P_{II}} &= \{[0,t-s-1,t,s]\}, t,s \in \mathbb{C} \\
\mathrm{P_{III}} &= \{[-t,0,0,t]\}, t \in \mathbb{C} \\
\mathrm{P_{IV}} &= \{[-t,0,-t-1,t]\}, t \in \mathbb{C}, \\
\mathrm{P_V} &= \{[\tfrac{3}{2},1,0,-\tfrac{1}{2}]\}, \\
\mathrm{P_{VI}} &= \{[2,2,1,0]\}.
\end{aligned}
$$

Výsledný obor pravdivosti soustavy (neboli tzv. varieta či algebraická množina) je sjednocením těchto šesti množin. Asi se však vnucuje otázka, zda jsme na něco nezapomněli. Nyní již máme možnost „počítačové“ kontroly:

```
LIB"primdec.lib";
ring r=0,(x,y,z,u),lp;
ideal a=y*(x-y+z-u-1),x*y*(x-z+u-1),x*z*(-y+z+u+1),x*(x-y+u);
primdecGTZ(radical(a));
```

Uveďme zde pro úsporu místa jen přehled prvoideálů (= primárních ideálů), získaných v programu Singular:

```
[1]:
   _[1]=y-z+u+1
   _[2]=x
[2]:
   _[1]=y
   _[2]=x
[3]:
   _[1]=z+u+1
   _[2]=y
   _[3]=x+u
[4]:
   _[1]=z
   _[2]=y
   _[3]=x+u
[5]:
   _[1]=u
   _[2]=z-1
   _[3]=y-2
   _[4]=x-2
[6]:
   _[1]=2u+1
   _[2]=z
   _[3]=y-1
   _[4]=2x-3
```

Vidíme, že radikál ideálu, který zapisujeme $\sqrt{a}$, bylo možno zapsat jako průnik šesti prvoideálů, neboť primární ideály v tomto případě vesměs splývají s příslušnými prvoideály. To je ve shodě s jednou větou z teorie ideálů, která říká, že nad každým algebraicky uzavřeným tělesem k lze každý radikál zapsat jako průnik konečného počtu prvoideálů (viz [1]). Tento průnik je nezkratitelný v tomto smyslu: je-li $I = J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_n$, pak pro všechna $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, je $J_i \not\subset J_j$. Pro nás má získaný rozklad $\sqrt{a} = \langle x, y\rangle \cap \langle x, y - z + u + 1\rangle \cap \langle y, z + u + 1, x + u\rangle \cap \langle x + u, y, z\rangle \cap \langle 2x - 3, y - 1, z, 2u + 1\rangle \cap \langle x - 2, y - 2, z - 1, u\rangle$ ten praktický význam, že vyřešením odpovídajících soustav rovnic dostaneme již známé obory pravdivosti $P_1, P_2, \ldots P_6$ a tím i obor pravdivosti P původní soustavy.

Šachové studie E. Laskera mohou být užitečné i řadovým šachistům. Poměrně novou zprávou však je, že jím objevená teorie primárních rozkladů ideálů může být díky dostupnosti počítačů i rozvoji teorie algoritmů a systémů počítačové algebry též užitečná matematikům, talentovaným středoškolským studentům, řešitelům MO atd.

LITERATURA:

[1] Cox D., Little J., O'Shea D., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, druhé vydání, Springer, 1997.

[2] Editor: Basar, Tamer S.; Bernhard, Pierre:, *Differential Games and Applications*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New York, 1989.

[3] Ernestová, M., *Algoritmické metody pro řešení soustav polynomiálních rovnic*, diplomová práce, katedra matematiky PdF Plzeň, 1999.

[4] Gianni, P., Trager, B., Zacharias,G., *Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals*, J. Symb. Comp. **6** (1988), 149 - 167.

[5] Hannak, J., *Emanuel Lasker. Biographie eines Schachweltmeisters*, Berlín, 1952.

[6] Hora, J., *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole*, II. díl, Pedagogické centrum Plzeň, 1998, 51 stran.

[7] Hora, J., *O řešení soustav algebraických rovnic pomocí Gröbnerových bází v programech Maple a Mathematica*, In: Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu, str. 12 - 27, Sborník referátů celostátního semináře kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky. Pořádáno pod záštitou katedry matematiky

pedagogické fakulty ZČU Plzeň (Rybník, září 1998).
[8] Hungerford, T. W., *Algebra*, 5. vydání, Springer Verlag, 1989.
[9] Internetová domácí stránka programu Singular:
`http://www.mathematik.uni-kl.de/~zca/Singular`.
[10] Lasker, E., *Zur Theorie der Moduln und Ideale*, Math. Annalen **60**, str. 20–116.
[11] Noether, E., *Idealtheorie in Ringbereichen*, Math. Annalen **83**, str. 24–66.
[12] Shimoyama, T., Yokoyama, T., *Localization and primary decomposition of polynomial ideals*, J. Symb. Comp. **22** (1996), 247–277.
[13] Vajnštejn, B. S., *Myslitel*, Fizkultura i sport, Moskva, 1981.
[14] Vass, P., *Informace o produktech firmy ChessBase*, zejména o CD - ROM Schulz/Knaak: Teorie pětikamenových koncovek na Internetu.
[15] Veselý, J., *Psychologický průvodce šachovou partií*, Olympia, Praha, 1981.

★ ★ ★

MATEMATIKA NAD ZLATO

MAREK VESELÝ

Byl jednou jeden král a ten měl tři dcery. Jednou takhle po obědě si je dal zavolat a povídá: „Chci, abyste každá řekla, jak mě máte ráda." Nejstarší se zamyslela a řekla: „Mám tě ráda jako Rolls Royce." Prostřední se také zamyslela a povídá: „Mám tě ráda jako Michaela Jacksona." „Dobrá," řekl král, „a co ty, moje nejmladší a nejsladší Maruško?" Maruška vyhrkla: „Mám tě ráda jako matematiku." I tu se král převelice rozhněval, Marušku dal ze zámku vyhnat a matematiku a čísla v celém širém království zakázat. Lidé tak kupříkladu při nákupu nesměli žádného čísla použít, říkali pouze *asi tolik látky* a ukazovali přitom rukama. Když platili, dali peníze na ruku a prodavač si sám vzal, kolik chtěl. Pokud jste se zeptali, kolik dětí někdo má, nejspíš vám na prstech ukázal. Lidé se na krále proto hněvali a z království houfně prchali. Král včas poznal svou chybu a dal Marušku zavolat zpět. Ta však vzkázala: „Součet dvou čísel je tisíc, rozdíl mezi oběma čísly je 666. Až mi, tatíčku, řeknete, která jsou to čísla, vrátím se." Král na to přišel i bez svých rádců. A co vy, děti?

(Řešení: Jsou to čísla 833 a 167)