Učitel matematiky

Alena Šarounová

Malý nápadník - H

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 2, 93–99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151326`

MALÝ NÁPADNÍK — H

ALENA ŠAROUNOVÁ

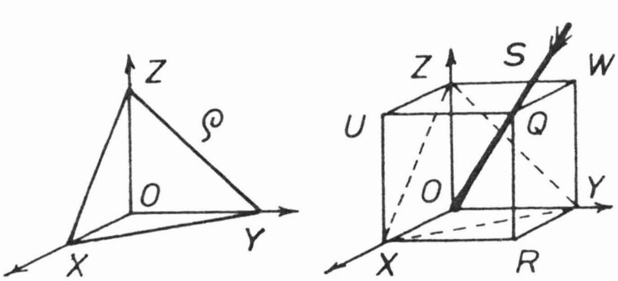
V minulém ročníku Učitele matematiky jsme věnovali ve dvou Nápadnících pozornost volnému rovnoběžnému promítání a podložkám, pomocí nichž lze snadno obrazy těles v tomto promítání kreslit. Nyní si ukážeme podložku pro náčrtky těles v pravoúhlé axonometrii — v tzv. izometrii. Názvu se nelekejte, jde o velmi jednoduchou pomůcku. Sama jsem si ji vymyslela jako posluchačka na vysoké škole při doučování studentů středních škol. Později jsem zjistila, že takových objevitelů bylo více a že se s ní můžeme setkat i v některých učebnicích matematiky pro základní školy. Protože se jedná o pomůcku velmi užitečnou, podíváme se na ni podrobněji.

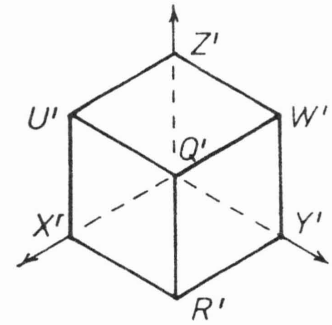
Matrice H : **PODLOŽKY PRO GEOMETRICKÉ ČRTÁNÍ**

V technických výkresech se zpravidla užívá pravoúhlých průmětů těles do jedné, dvou nebo tří navzájem kolmých rovin (půdorysna π, nárysna ν a bokorysna μ). Je to velmi výhodné pro poučeného technika či řemeslníka, protože takovéto obrazy jim umožní „číst z výkresu“ tvar i rozměry příslušného tělesa. Obrazy však nebývají dostatečně názorné. Přirozenější, „hezčí“ obrazy těles dostaneme buď při kosoúhlém promítání (zpravidla do svislé průmětny) nebo při pravoúhlém promítání do roviny, která je s rovinami π, ν a μ různoběžná. Při kosoúhlém promítání se nezkreslí tvar geometrických útvarů ležících v rovině rovnoběžné s průmětnou, ale obecně může dojít k velkému zkreslení. Vždyť např. obrysem obrazu koule je elipsa (viz Malý nápadník – F). Promítání do další roviny se může zdát na první pohled značně náročné. Ukážeme si však, že praktické užití tohoto promítání k zobrazování běžných geometrických těles je jednoduché a velmi názorné.

Všimněme si nejprve „geometrického zázemí“ našeho promítání. (Jde samozřejmě o informace zejména pro nás, učitele.) Průmětnou je rovina ϱ, která protíná osy x, y, z v bodech X, Y, Z

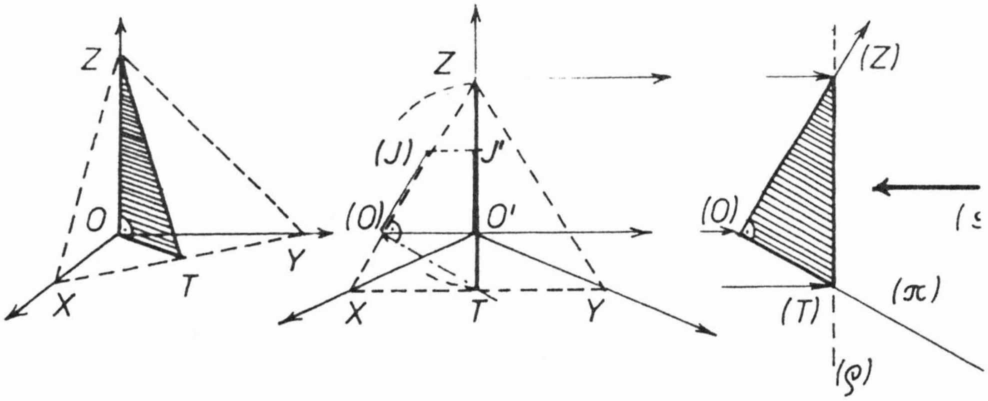
stejně vzdálených od počátku soustavy souřadnic (viz obr. 1a). Do této průmětny ϱ budeme promítat pravoúhle. Musíme tedy zjistit směr s kolmý k rovině ϱ. Představte si krychli $\mathbf{K} = XRYOUQWZ$ (viz obr. 1b). Trojúhelník XYZ je ve skutečnosti rovnostranný. Tělesová úhlopříčka QO krychle $\mathbf{K}$ je kolmá k rovině tohoto trojúhelníku. Udává tedy směr promítání.





Obr. 1a, b Obr. 2

Protože body Q, O leží na jedné přímce směru s, jejich obrazy splynou: $Q' = O'$. Obrazem krychle $\mathbf{K}$ (tedy jejím pravoúhlým průmětem do roviny ϱ) bude v tomto případě pravidelný šestiúhelník. Na obr. 2 vidíte axonometrický obraz krychle $\mathbf{K}$ a viditelné části kladných poloos x, y, z.



Obr. 3a, b, c

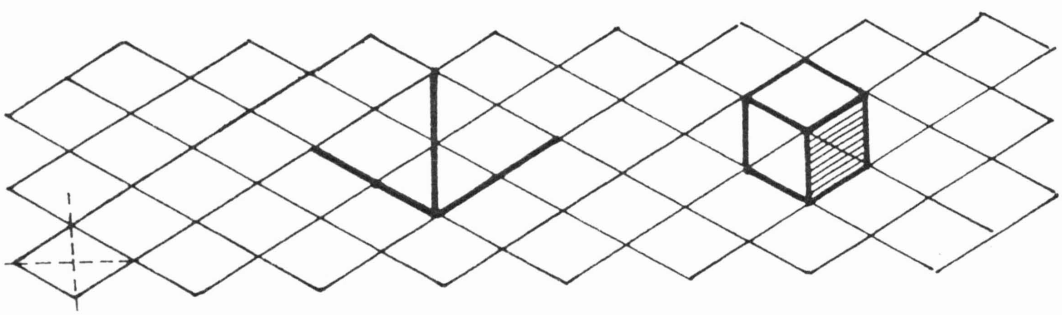
Vzájemnou polohu půdorysny, osy z, axonometrické průmětny ϱ a směru promítání můžeme výhodně „vidět odjinud“. Zkusme si takový pohled zkonstruovat (viz obr. 3).

Všimněte si pravoúhlého trojúhelníku ZOT na obr. 3a. Jeho přepona ZT leží v axonometrické rovině XYZ a rovina ZOT je kolmá k přímce XY. Na obr. 3b je rovina ϱ rovinou papíru. Trojúhelník XYZ leží tedy přímo v rovině papíru a jeho obraz je s ním totožný. Rovina ZOT je však k rovině ϱ kolmá. Proto se zobrazí do přímky ZT. Bod O' je pravoúhlým průmětem počátku do roviny ϱ (je těžištěm trojúhelníku XYZ). Když pomocí Thaletovy kružnice sestrojíme otočenou polohu trojúhelníku ZOT (otáčíme podle přepony ZT do roviny ϱ), získáme nejen skutečný tvar trojúhelníku ZOT, ale můžeme na otočenou osu z (tj. přímku $(O)Z$) vynést jednotkovou úsečku $(O)(J)$ a zjistit délku jejího průmětu $O'J'$. V technické praxi stojí většinou zobrazovaná tělesa na půdorysně. Pak je výhodné nakreslit si jejich pomocný průmět do roviny ZOT. Aby se tento pomocný obrázek nepletl s výsledným axonometrickým pohledem, vysunuje se zpravidla trojúhelník $Z(O)T$ ve směru XY „ven" z obrazu (viz obr. 3c). Svislá přímka $(Z)(T)$ je „vysunutým obrazem" roviny ϱ, přímka $(O)(Z)$ obrazem osy z a přímka $(O)(T)$ obrazem roviny π. Směr axonometrického promítání je znázorněn silnou šipkou (s). V tomto „vysunutí" můžeme na rovinu π postavit dané těleso. Axonometrický obraz libovolného bodu B tohoto tělesa bude pak ležet na přímce směru (s) procházející bodem (B). (Tuto konstrukci však už na obr. 3c nehledejte.)

Ještě bychom si měli uvědomit, že axonometrickým průmětem koule bude kruh (pravoúhlé promítání!) a obrazem úsečky je buď bod (viz $Q'O'$ na obr. 2) nebo úsečka. Je-li $A'B'$ obrazem úsečky AB, pak platí: $|A'B'| \leqq |AB|$, což je velmi příjemné. Nebude docházet k velkému zkreslování průmětů.

Tím jsme shrnuli vše podstatné, čeho je nám, učitelům, zapotřebí k praktickému užívání izometrie v hodinách matematiky na středních i základních školách. A proč tomuto promítání říkáme izometrie? Průměty jednotek na všech třech osách jsou shodné. V našich sítích budeme znát právě průměty jednotek!

Podložka je tvořena sítí kosočtverců složených ze dvou rovnostranných trojúhelníků (viz obr. 4a). Delší úhlopříčky kosočtverců jsou vodorovné, kratší svislé. Tyto kosočtverce můžeme považovat za obraz čtvercové sítě ležící v rovině π (viz obr. 2, obraz podstavy krychle **K**). Na obr. 4b jsou silně vytaženy tři shodné úsečky, které můžeme považovat za průměty tří shodných a navzájem kolmých úseček v prostoru. Mohou to být např. hrany krychle v nárožní poloze.

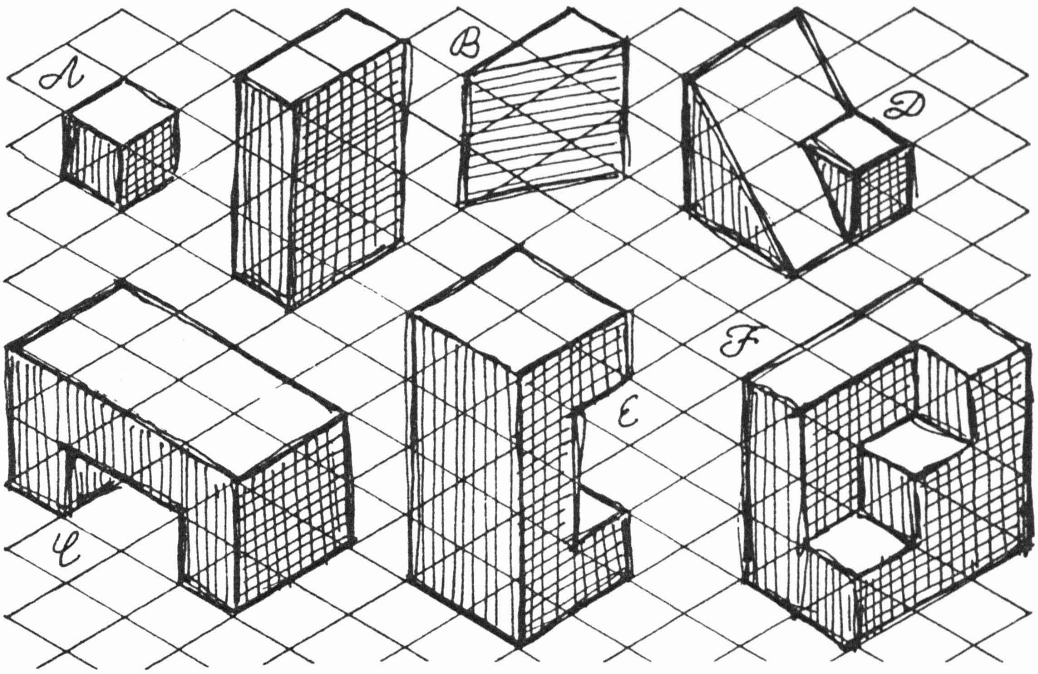


Obr. 4a, b, c

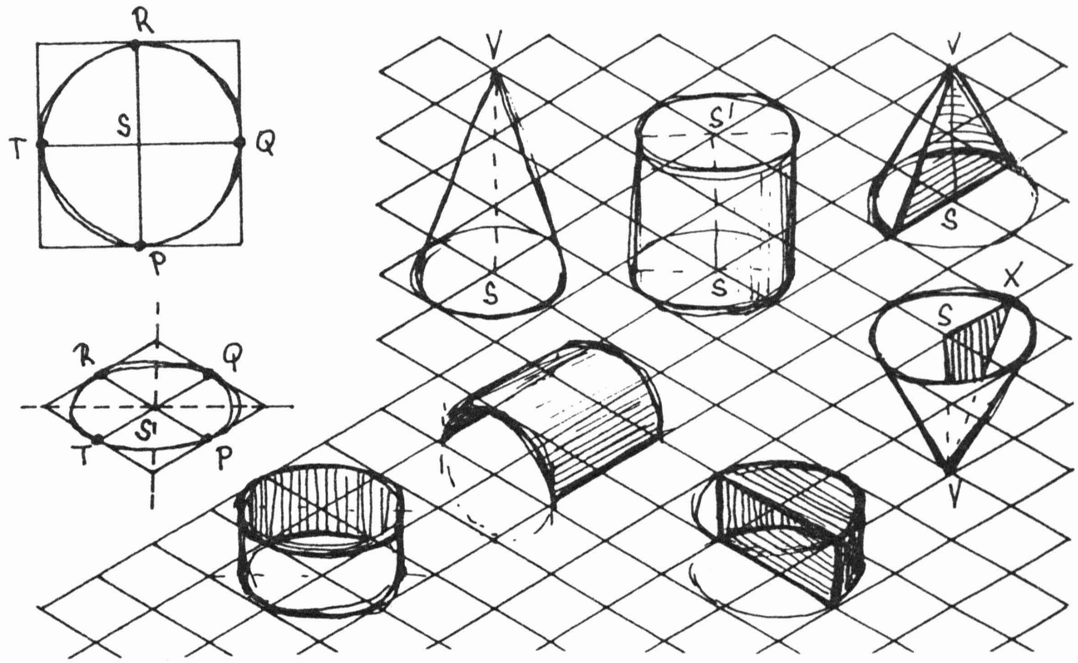
Obraz „jednotkové krychle" v nárožní poloze (viz obr. 4c) zpravidla stačí i mladším žákům jako grafická informace k tomu, aby do sítě mohli vkreslovat kvádry, kolmé hranoly atp. Ke konstrukcím, v nichž jde např. o tělesové úhlopříčky krychle, toto zobrazení vhodné není (mnohé splývá v jedné přímce). Hodí se však znamenitě k úlohám rozvíjejícím prostorovou představivost a schopnost črtat názorné obrázky.

Na obr. 5 je načrtnuto do sítě několik těles: krychle, kvádr, trojboký kolmý hranol, krychlová tělesa (tj. tělesa sestavená ze shodných krychliček) atp. Všimněte si zde dvojice těles **C** a **E**. Jedná se o dvě různé polohy téhož krychlového tělesa. Zkuste si těleso **C** načrtnout i jinak! Sami se přesvědčíte, že některé obrázky jsou velmi názorné a „nesou o tělese mnoho informací" a jiné vypovídají velmi málo.

V levém rohu obr. 6 je pomocí čtverce opsaného kružnici k sestrojen její obraz. Obrazem kružnice ležící v rovině π je elipsa, ale tentokrát (na rozdíl od volného rovnoběžného promítání) je její hlavní osa vodorovná. Dále je zde načrtnut rotační válec a kužel a několik zajímavých částí těchto těles.

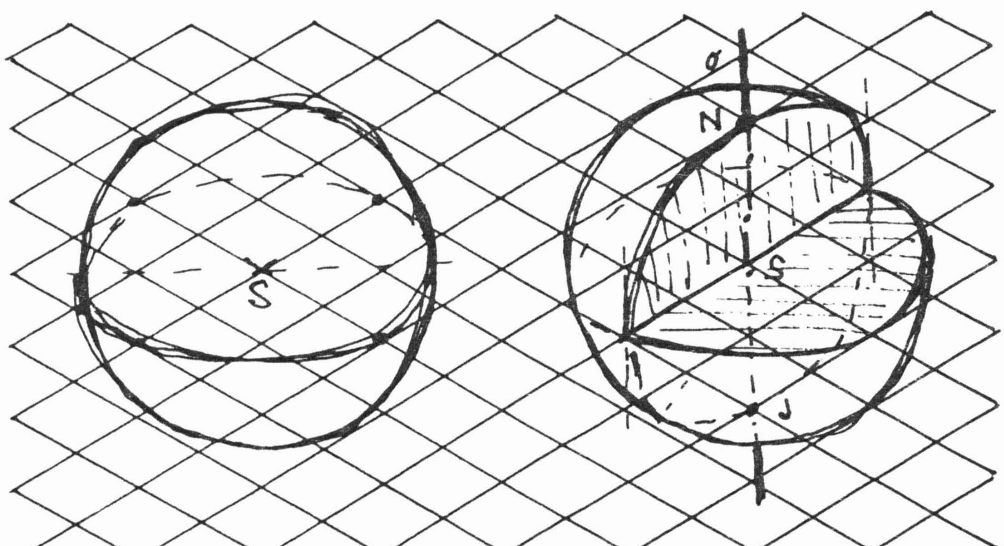


Obr. 5



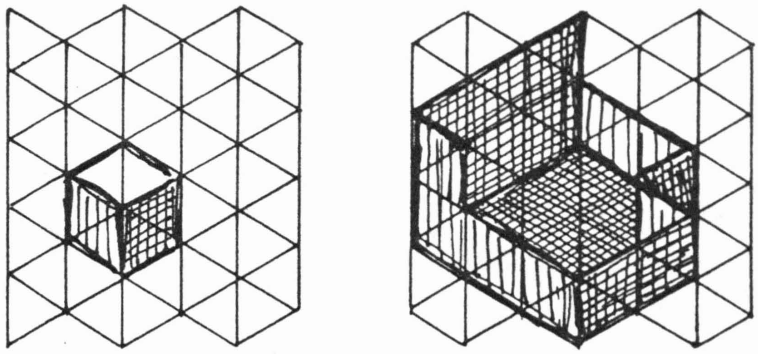
Obr. 6

Podívejme se ještě na obraz koule! Protože izometrie je kolmým promítáním do roviny, je obrazem koule kruh. Na obr. 7 je načrtnuta koule se středem S a poloměrem „dvě jednotky". Nejprve si načrtneme obraz „rovníku" koule, potom obrys. Na sousedním obrázku vidíte, co z původní koule zbylo po odstranění jedné její čtvrtiny. Jeden řez byl veden rovinou rovníku, druhý svislou rovinou. (Průměty kruhových řezů jsou shodnými elipsami, v obrázku jsou čárkovaně doplněny tečny ke druhé elipse. Pro tuto elipsu totiž v síti nejsou svislé přímky nakresleny. Zkuste si týž obrázek načrtnout pomocí podložky z rovnostranných trojúhelníků!) Obrazem „severního pólu" koule je bod N, osou rotace přímka SJ.



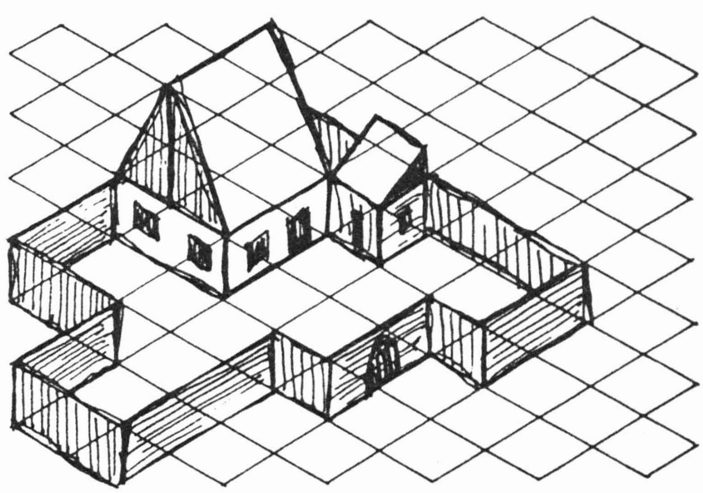
Obr. 7

Zmínili jsme se o podložce trojúhelníkové. Na matrici H jsou oba typy podložek. Kosočtverečná podložka je vhodnější při črtání jehlanů, kuželů atd. Většině dětí vyhovuje právě to, že je „řidší". Některé děti však ztrácejí v kosočtverečném poli svislý směr a rády přijmou oporu v další soustavě přímek. Na obr. 8a je do trojúhelníkové podložky vkreslena jednotková krychle, na obr. 8b vidíte „pravoúhelníkový dvoreček s různě vysokým plotem".



Obr. 8a, b

Při črtání doporučuji hojně užívat barevných informací. Např. stěny obrazů mnohostěnů by měly děti aspoň občas vybarvovat, a to stěny ležící v rovinách rovnoběžných stejnou barvou. Obrázek se tak stane názornějším a my jako učitelé máme kontrolu, že se děti nad vzájemnou polohou stěn v prostoru skutečně zamýšlely. Na náčrtcích k tomuto článku jsou barvy nahrazeny různými druhy šrafování.



Obr. 9

Poslední obrázek je výsledkem „hraní“. Do sítí mohou děti črtat podle vlastní fantazie. Zdánlivě to nemá s geometrií nic společného, ale to by nás nemělo mýlit. Každé kreslení (které se snaží být realistické) je výborným cvičením, které rozvíjí prostorovou představivost více než různá poučování. Vzpomeňte si na toto užití sítí, až pojedete s dětmi na hory nebo půjdete nečekaně suplovat. Budete překvapeni, co vše vám děti nakreslí.

MATRICE H

SÍTĚ PRO ČRTÁNÍ TĚLES (PODLOŽKY) AŠ