

Učitel matematiky

Jan Fiala; Petr Chládek

Od hvězdicových mnohoúhelníků přes jednotažky ke kongruencím

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 2, 65–77

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152502>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

OD HVĚZDICOVÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ PŘES JEDNOTAŽKY KE KONGRUENCÍM

JAN FIALA, PETR CHLÁDEK

Úvod

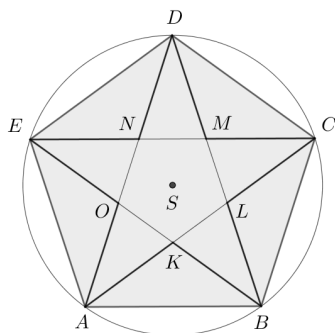
V článku *Hvězdicové mnohoúhelníky* (Fiala, 2015) byly představeny různé způsoby vytváření (konstrukce) nekonvexních mnohoúhelníků ve tvaru hvězdy a shrnuty jejich některé geometrické vlastnosti. V textu tohoto příspěvku lze postupně sledovat propojení geometrických vlastností hvězdicových mnohoúhelníků s aritmetikou celých čísel a s relacemi kongruence, což je podnětné a zajímavé téma pro rozvoj matematických znalostí žáků již na základní škole (Esper & Schornstein, 2005, s. 215–218). Výklad problematiky je doplněn úlohami.

Pravidelné hvězdicové mnohoúhelníky

Pravidelný hvězdicový mnohoúhelník zde chápeme jako nekonvexní část roviny s nenulovým obsahem, která je ohraničena uzavřenou lomenou čarou tvořenou stejně dlouhými úsečkami ležícími na úhlopříčkách nesousedních vrcholů pravidelného n -úhelníku ($n \geq 5$). Vrcholy lomené čáry jsou vždy vrcholy původního n -úhelníku a dále průsečíky úhlopříček tohoto n -úhelníku. Za vrcholy hvězdicového mnohoúhelníku však budeme považovat pouze vrcholy původního n -úhelníku a označovat je písmeny (v případě potřeby také čísly) proti smyslu otáčení hodinových ručiček.

Ukažme si konkrétní příklad na pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 1), ve kterém vznikl hvězdicový pětiúhelník. Pevně zvolený vrchol pětiúhelníku jsme spojili s vrcholem ležícím o dva

vrcholy dále proti smyslu otáčení hodinových ručiček a takto pokračovali, až jsme se opět vrátili do výchozího vrcholu. Takovou konstrukci hvězdicového pětiúhelníku můžeme popsat posloupností vrcholů $ACEBDA$. V popisu hvězdicového n -úhelníku se zohlední pouze vrcholy původního mnohoúhelníku (zde A, B, C, D, E). Za vrcholy hvězdicového mnohoúhelníku nepovažujeme vnitřní průsečíky úhlopříček (zde K, L, M, N, O).



Obr. 1: Hvězdicový pětiúhelník $ABCDE$

Každý hvězdicový mnohoúhelník s n vrcholy lze popsat tzv. Schläfliho symbolem $\{n/k\}$ (n, k jsou přirozená čísla), pojmenovaným po švýcarském matematikovi Ludwigu Schläfli (1814–1895), kde krok k specifikuje postup spojování vrcholů lomenou čarou tak, že v pravidelném n -úhelníku spojíme každý k -tý vrchol. Například hvězdicový pětiúhelník na obrázku 1 má označení $\{5/2\}$, neboť byl vytvořen v pravidelném pětiúhelníku ($n = 5$), ve kterém byl od zvoleného počátečního vrcholu A spojen vždy každý druhý následující vrchol. Pro $k = 1$ nemají hvězdicové mnohoúhelníky se symboly $\{n/1\}$ a $\{n/n-1\}$ typické cípy, nýbrž tvoří původní pravidelný konvexní n -úhelník, který k hvězdicovým mnohoúhelníkům nebudeme řadit. Porušili bychom totiž dohodu o spojování pouze nesousedních vrcholů (a tím i požadavek na nekonvexnost).

Úloha 1. Načrtněte všechny existující navzájem různé hvězdicové dvanáctiúhelníky a popište je Schläfliho symbolem.

Podívejme se, co platí pro Schläfliho symboly hvězdicových mnohoúhelníků.

Tvrzení 1. Hvězdicové mnohoúhelníky se Schläfliho symboly

$$\{n/k\} \text{ a } \{n/n-k\},$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, $k \neq n-1$ a $k \neq 1$, jsou shodné.

Pozn. Všechny následující úvahy zůstávají v platnosti pro jakákoliv $k, n \in \mathbb{N}$, v některých případech by se však nejednalo o hvězdicové mnohoúhelníky.

Například hvězdicový pětiúhelník se Schläfliho symbolem $\{5/2\}$ je shodný s mnohoúhelníkem se Schläfliho symbolem $\{5/3\}$. Tvrzení 1 platí pro všechna $k < n$, neboť hvězdicový mnohoúhelník $\{n/k\}$ vytvářený proti smyslu otáčení hodinových ručiček je shodný s hvězdicovým mnohoúhelníkem $\{n/n-k\}$ vytvářeným po smyslu otáčení hodinových ručiček. Pokud bychom připustili rovnost $n = k$, šlo by o typ $\{n/n\}$, který však hvězdicový mnohoúhelník netvoří. Tvrzení 1 platí také pro všechna $k > n$, $k \neq n-1$, $k \neq 2n-1$ atd., neboť z typu $\{n/n+1\}$ vznikne původní nehvězdicový mnohoúhelník a typ $\{n/k\}$ vždy převedeme pro vhodný celočíselný α -násobek čísla n na typ $\{n/k-\alpha n\}$, který je již některým typem pro $k < n$. Tedy například symboly $\{5/7\}$ a $\{5/2\}$, nebo $\{5/23\}$ a $\{5/3\}$ popisují shodné hvězdicové mnohoúhelníky.

Úloha 2. Přesvědčte se, že hvězdicový dvanáctiúhelník se symbolem $\{12/7\}$ je shodný s dvanáctiúhelníkem $\{12/5\}$. Najděte všechny dvojice totožných dvanáctiúhelníků.¹

Další zajímavou otázkou je, jaký je počet všech možných hvězdicových n -úhelníků pro konkrétní zvolené n a k , $k < n$. Počet p všech možných navzájem různých hvězdicových mnohoúhelníků vytvořených v daném pravidelném n -úhelníku je určen vztahem

$$p = \frac{n-4}{2} \text{ pro } n \text{ sudé} \quad (1)$$

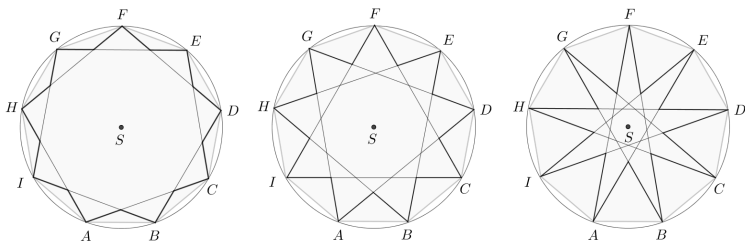
¹Hvězdicové dvanáctiúhelníky se symboly $\{12/2\}$ a $\{12/10\}$, resp. $\{12/3\}$ a $\{12/9\}$, resp. $\{12/4\}$ a $\{12/8\}$, resp. $\{12/5\}$ a $\{12/7\}$ jsou shodné.

a

$$p = \frac{n-3}{2} \text{ pro } n \text{ liché.} \quad (2)$$

V pravidelném n -úhelníku můžeme z výchozího vrcholu spojit ostatní vrcholy s krokem k o velikosti $1, 2, \dots, n-1$. Případy $k=1$ a $k=n-1$ odporují ovšem definici hvězdicového mnohoúhelníku, kde požadujeme spojování nesousedních vrcholů. Pro n liché máme proto $n-3$ možnosti pro volbu k , ale podle tvrzení 1 dávají vždy dvě z těchto možností stejný hvězdicový mnohoúhelník. Odtud vzorec (2). Pro n sudé zůstává také $n-3$ možnosti pro volbu k , ale lze si povšimnout, že případ $k = \frac{n}{2}$ odporuje požadavku na nenulový obsah vzniklého útvaru, proto o tento jeden případ zmenšíme počet všech možností a při opětovném použití tvrzení 1 dostáváme vzorec (1).

Sestavme si na ukázkou různé podoby hvězdicového devítiúhelníku (obr. 2). V pravidelném devítiúhelníku je možné výše uvedeným postupem vytvořit pouze tři hvězdicové mnohoúhelníky, neboť podle (2) pro $n=9$ dostaneme $p=3$.



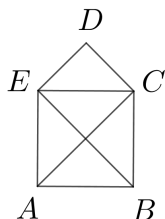
Obr. 2: Hvězdicové devítiúhelníky s různými Schläfliho symboly, zleva $\{9/2\}$, $\{9/3\}$, $\{9/4\}$

Úloha 3. Kolik existuje různých hvězdicových dvanáctiúhelníků? Ověřte správný počet všech různých hvězdicových dvanáctiúhelníků z úlohy 1.²

²Existují celkem čtyři navzájem různé hvězdicové dvanáctiúhelníky se symboly $\{12/2\}$, $\{12/3\}$, $\{12/4\}$ a $\{12/5\}$.

Jednotažky

Děti mladšího školního věku se mohou setkat s geometrickými hádankami, ve kterých mají načrtnout nějaký geometrický útvar jako uzavřenou lomenou čáru, a to jedním tahem tak, aby žádná část lomené čáry přímo neprocházela jinou v celé její délce ani její části, tedy žádný tah mezi každými dvěma vrcholy lomené čáry se nikdy neopakoval. Takto zkonstruovaný geometrický obrazec se nazývá jednotažka.



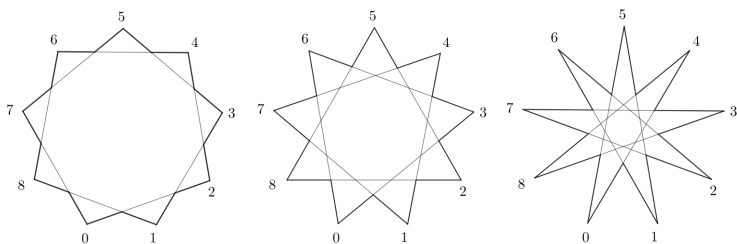
Obr. 3: Domeček jako příklad jednotažky

Známý jednoduchý příklad jednotažky je na obrázku 3. V tomto geometrickém obrazení (geometrický model domečku), kterým je nepravidelný pětiúhelník $ABCDE$, je potřeba kromě hranic pětiúhelníku načrtnout pouze tři vybrané vnitřní úhlopříčky (AC , BE , CE). Jedno z možných řešení, jak jedním tahem obrazec načrtnout, je posloupnost vrcholů $ACDEBCEAB$. Přestože zjevně nejde o pravidelný hvězdicový mnohoúhelník, kterými se zde zabýváme, může někoho napadnout otázka, zda je možné některé pravidelné hvězdicové n -úhelníky načrtnout (zkonstruovat) jedním tahem podobným způsobem, jako jsme načrtnuli domeček na obrázku 3.

Pod načrtnutím hvězdicového n -úhelníku jedním tahem budeme rozumět postupné spojování nesousedních vrcholů n -úhelníku úsečkami s konstantním krokem k tak, že po provedení všech n tahů skončíme opět ve výchozím vrcholu (viz dále). Všechny tahy tvoří základ pro dokončení hvězdicového n -úhelníku, jak jsme jej představili v úvodní kapitole.

Číselné posloupnosti na hvězdicových mnohoúhelnících

Uvažujme všechny možné podoby například hvězdicových devítiúhelníků. Každý vrchol všech hvězdicových devítiúhelníků popíšeme postupně čísla 0 až 8 (vnitřní vrcholy hvězdicového n -úhelníku nečíslováme), přičemž první vrchol A označíme číslem 0, další vrchol B označíme číslem 1 atd., až poslední vrchol I označíme číslem 8, v pořadí za sebou proti směru otáčení hodinových ručiček. Na obrázku 4 jsou hvězdicové devítiúhelníky se symboly $\{9/2\}$, $\{9/3\}$ a $\{9/4\}$ s očíslovanými vrcholy.



Obr. 4: Hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/2\}$ (vlevo), $\{9/3\}$ (uprostřed) a $\{9/4\}$ (vpravo) s označením vrcholů čísly od 0 do 8

Každý hvězdicový devítiúhelník dále popíšeme pomocí jedinečné konečné číselné posloupnosti, která současně vyjadřuje sled kroků pro jeho geometrickou konstrukci, tedy které vrcholy označené čísly je potřeba spojit, aby vznikl hvězdicový devítiúhelník. Každou číselnou posloupnost začneme číslem 0 a postupujeme po úhlopříčkách proti směru otáčení hodinových ručiček. Proto například hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/2\}$ popisuje konečná číselná posloupnost 0246813570, která je jeho jedinečným popisem konstrukce. Podobně hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/4\}$ popisuje jedinečná posloupnost 0483726150.

U hvězdicového devítiúhelníku se symbolem $\{9/3\}$ zjistíme, že nám k popisu jedna konečná číselná posloupnost nepostačí, tedy při konstrukci tohoto hvězdicového devítiúhelníku musíme postupně provést tři dílčí konstrukce podle posloupností 0360,

1471 a 2582. Ukazuje se tedy, že nelze každý hvězdnicový n -úhelník vždy popsat pomocí právě jedné číselné posloupnosti. Pokud však bude taková jedinečná číselná posloupnost existovat, bude to znamenat, že daný pravidelný n -úhelník je tzv. jednotážka.

Posloupnosti hvězdnicových devítiúhelníků se symboly $\{9/2\}$ a $\{9/4\}$ mají deset členů (obecně má číselná posloupnost jednotážky $n + 1$ členů), z nichž jsou všechny kromě prvního a posledního navzájem různé. Aby šlo o jednotážku, musí být výchozí a konečný vrchol (číslo) stejné. Přehledně nám existenci jednotážky u hvězdnicových devítiúhelníků ukazuje tabulka 1.

Tab. 1: Číselné posloupnosti popisující konstrukci hvězdnicových devítiúhelníků se symboly $9/2$ až $9/7$

Devítiúhelník	$\{9/2\}$	$\{9/3\}$	$\{9/4\}$
Číselná posloupnost	0246813570 jednotážka	0360; 1471; 2582 netvoří společně jednotážku	0483726150 jednotážka
Devítiúhelník	$\{9/5\}$	$\{9/6\}$	$\{9/7\}$
Číselná posloupnost	0516273840 jednotážka	0630; 1741; 2852 netvoří společně jednotážku	0753186420 jednotážka

Podobně by bylo možné vytvořit posloupnosti pro hvězdnicové mnohoúhelníky s jinou hodnotou n .

Na výše uvedeném si lze povšimnout, že je-li v Schläfliho symbolu $\{9/k\}$ číslo k takové, že 9 a k jsou soudělná, není možné daný hvězdnicový mnohoúhelník popsat pouze pomocí jediné číselné posloupnosti, není možné jej načrtnout jedním tahem a nejde tedy o tzv. jednotážku. Obecným případem, kdy hvězdnicový mnohoúhelník se Schläfliho symbolem $\{n/k\}$ tvoří jednotážku, se zabýváme dále.

Úloha 4. Napište číselnou posloupnost pro $k = 5$ ve hvězdnicovém dvanáctiúhelníku se symbolem $\{12/k\}$. Pro jaké jiné k získáme ve dvanáctiúhelníku tutéž hvězdu? Napište pro ni číselnou posloupnost.³

³Hvězdnicový dvanáctiúhelník se symbolem $\{12/5\}$ má číselnou posloup-

Modulární aritmetika na hvězdicových mnohoúhelnících

Pravidelné hvězdicové mnohoúhelníky mohou posloužit jako modely výpočtů v tzv. modulární aritmetice („počítání modulo m “). Problematika modulární aritmetiky byla již mnohokrát zpracována a využita v různých aplikacích, přesto stručně připomeňme některé její základní pojmy. Jestliže rozdíl $n - k$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, je dělitelný číslem m ($m \in \mathbb{N}$), tedy $m \mid n - k$, říkáme, že číslo n je kongruentní s číslem k podle modulu m (stručně n je kongruentní s k modulo m) a píšeme $n \equiv k \pmod{m}$. Každá množina těch přirozených čísel, která při dělení číslem m ($m \in \mathbb{N}$) dávají týž nejmenší nezáporný zbytek, se nazývá zbytková třída podle modulu m (modulo m).

Dále se zaměříme na operace, které budeme nazývat „sčítání, resp. násobení v kruhu“.

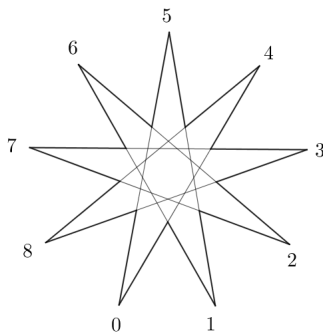
Operace sčítání mod m

Výraz $a + b$ nazýváme součtem čísel $a, b \in \mathbb{N}_0$, $a \leq n - 1$, $b \leq n - 1$, kde n je počet vrcholů příslušného hvězdicového n -úhelníku. Sčítání na hvězdicovém mnohoúhelníku probíhá takto: první sčítanec a je číslo u příslušného vrcholu n -úhelníku. Přičtením čísla b se posuneme („v kruhu“) po vrcholech hvězdicového n -úhelníku proti smyslu otáčení hodinových ručiček do nového vrcholu označeného c . Číslo c odpovídá hledanému součtu $a + b$. Neutrálním prvkem operace sčítání mod m je číslo 0.

Vypočítejme například součet $7 + 6$ v hvězdicovém devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$. Na obrázku 5 můžeme sledovat výpočet $7 + 6 = 6 + 7 = 4$. První sčítanec představuje vrchol s číslem 7. Přičtením druhého sčítance se posuneme po vrcholech hvězdicového devítiúhelníku proti smyslu otáčení hodinových ručiček o šest vrcholů dále a zastavíme se u vrcholu s číslem 4. Také při sčítání $6 + 7$

nost 0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7,0. (Čísla v posloupnosti oddělujeme čárkami, neboť v popisu používáme dvouciferná čísla.) Hvězdicový dvanáctiúhelník $\{12/5\}$ je shodný s dvanáctiúhelníkem $\{12/7\}$ s číselnou posloupností 0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5,0.

bude součet opět 4. Tím jsme spočítali součet $7 + 6 \pmod{9} = 4$. Součty všech možných sčítanců při sčítání v kruhu na hvězdicovém devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$ uvádí tabulka 2, přitom zde uvažujeme pouze $a \leq 8$, $b \leq 8$, neboť pro větší hodnoty by se hodnoty součtů již opakovaly.



Obr. 5: Hvězdicový mnohoúhelník se symbolem $\{9/4\}$ s očíslovanými vrcholy 0 až 8

Tab. 2: Výsledky operace sčítání $a + b$ v hvězdicovém devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$ pro $a \leq 8$, $b \leq 8$

+	$b = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a = 0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Úloha 5. Počítejte modulo 9.⁴

a) $4 + 7 =$

b) $3 + 6 =$

c) $1 + 8 =$

Operace násobení mod m

Protože operaci násobení chápeme jako opakované sčítání, je možné zavést operaci násobení (označíme běžně používaným znakem $\cdot$), jejímž neutrálním prvkem je číslo 1.

Například v hvězdicovém devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$ se bude násobit takto: $0 \cdot 4 = 0$, $1 \cdot 4 = 4$, $2 \cdot 4 = 4 + 4 = 8$, $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 3$, $4 \cdot 4 = 7$, $5 \cdot 4 = 2$, $6 \cdot 4 = 6$, $7 \cdot 4 = 1$, $8 \cdot 4 = 5$, $9 \cdot 4 = 0$, $10 \cdot 4 = 4$, $11 \cdot 4 = 8$, $12 \cdot 4 = 3$ atd. Výsledky posledních čtyř součinů 0, 4, 8, 3 se již opakují ve výsledcích předchozích výpočtů. Všimněme si, že i ve všech následujících součinech $13 \cdot 4 = 7$, $14 \cdot 4 = 2$ atd. jde o opakující se členy příslušné posloupnosti v tabulce 1 pro hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/4\}$.

Úloha 6. Počítejte modulo 9.⁵

a) $2 \cdot 4 =$

b) $3 \cdot 6 =$

c) $5 \cdot 7 =$

Modulární aritmetika na jednotačkách

Zvláštní skupinou hvězdicových mnohoúhelníků jsou výše zmíněné jednotačky, na kterých ukážeme principy „počítání v kruhu“.

Sledujme například výsledné součty po opakovaném přičítání 4 k vrcholu s číslem 0 v hvězdicovém devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$: $0 + 4 = 4$, $4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 3$, $3 + 4 = 7$, $7 + 4 = 2$,

⁴a) 2, b) 0, c) 0.

⁵a) 8, b) 0, c) 8.

$2 + 4 = 6$, $6 + 4 = 1$, $1 + 4 = 5$ a konečně $5 + 4 = 0$. Jak je patrné, tvoří jednotlivé součty dříve uvedenou číselnou posloupnost 0483726150, která popisuje konstrukci daného hvězdicového devítiúhelníku se symbolem $\{9/4\}$ jedním tahem. Jak jsme ukázali v tabulce 1, lze jednotážky vytvořit u devítiúhelníků se symboly $\{9/2\}$, $\{9/4\}$, $\{9/5\}$ a $\{9/7\}$. Abychom tedy vytvářeli posloupnosti jednotážek v devítiúhelníku a znovu se vrátili do výchozího vrcholu, ve kterém jsme začali, musíme k výchozímu číslu (vrcholu) pro jednotlivé Schläfliho symboly přičítat vždy číslo 2, 4, 5, resp. 7.

Jaký je vztah mezi n a k , abychom zkonstruovali jednotážku? Označme n počet cípů pravidelného hvězdicového mnohoúhelníku a k „délku kroku“, tj. počet vrcholů, o které je potřeba se posunout proti směru otáčení hodinových ručiček, abychom se dostali do bodu, s nímž chceme výchozí bod spojit.

Uvažujme rovnici

$$k \cdot m \equiv 0 \pmod{n} \quad (3)$$

s neznámou m a parametry n, k a vezměme nejmenší přirozené řešení m této rovnice. Pak vidíme, že při „počítání v kruhu“ se po m krocích dostaneme zpět do výchozí hodnoty. Tedy v kontextu hvězdicového mnohoúhelníku v každém kroku navštívíme jeden vrchol a po m krocích o délce k se vrátíme do výchozího vrcholu. Pokud by bylo $m < n$, znamená to, že jsme se vrátili do výchozího vrcholu, aniž bychom prošli všechny vrcholy. To se stane tehdy, když příslušný hvězdicový mnohoúhelník nebude jednotážka. Aby se jednalo o jednotážku, musí tedy být nejmenší přirozené řešení m rovnice (3) rovno počtu vrcholů n .

Proto, abychom zkonstruovali hvězdicový n -úhelník se Schläfliho symbolem $\{n/k\}$ jedním tahem, je potřeba zjistit, kdy nejmenší přirozené řešení m rovnice (3) je rovno hodnotě n , tj. $m = n$. Tomu odpovídá situace, kdy $\text{NSD}(k, n) = 1$. Budeme-li totiž předpokládat $\text{NSD}(k, n) > 1$, pak $m = n$ je stále řešením rovnice (3), ale není nejmenší možné. Lze totiž vzít $m = \frac{n}{\text{NSD}(k, n)}$. Pak číslo $k \cdot m = k \cdot \frac{n}{\text{NSD}(k, n)}$ je celočíselným násobkem čísla n , a tedy $m = \frac{n}{\text{NSD}(k, n)}$ je řešením rovnice (3) a zároveň je $\frac{n}{\text{NSD}(k, n)} < n$.

Všimněme si devítiúhelníků v tabulce 1. Pro hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/2\}$ máme $n = 9$, $k = 2$ a v podmínice (3) řešíme rovnici $2m \equiv 0 \pmod{9}$, jejíž nejmenší řešení je $m = 9$, tj. $m = n$. Proto v případě $\{9/2\}$ jde o jednotážku. Pro hvězdicový devítiúhelník se symbolem $\{9/3\}$ máme $n = 9$, $k = 3$ a v podmínice (3) řešíme rovnici $3m \equiv 0 \pmod{9}$, jejíž nejmenší řešení je $m = 3$, tj. $m < n$. Proto v případě $\{9/3\}$ nejde o jednotážku.

Tabulka 3 přehledně shrnuje platnost vztahu (3) pro $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Tab. 3: Počet hvězdicových mnohoúhelníků, počet jednotážek, podoba rovnice (3) a nejmenší řešení této rovnice (n – počet vrcholů, p – počet různých hvězdicových n -úhelníků, $\{n/k\}$ – Schläfliho symbol, p_j – počet jednotážek, m – nejmenší řešení rovnice (3))

n	p	$\{n/k\}$	p_j	Jednotážky	Podoba rovnice (3)	m
5	1	$\{5/2\}$	1	$\{5/2\}$	$2m \equiv 0 \pmod{5}$	5
6	1	$\{6/2\}$	0	–	$2m \equiv 0 \pmod{6}$	3
7	2	$\{7/2\}$	2	$\{7/2\}$	$2m \equiv 0 \pmod{7}$	7
		$\{7/3\}$		$\{7/3\}$	$3m \equiv 0 \pmod{7}$	7
8	2	$\{8/2\}$	1	$\{8/3\}$	$2m \equiv 0 \pmod{8}$	4
		$\{8/3\}$			$3m \equiv 0 \pmod{8}$	8
9	3	$\{9/2\}$	2	$\{9/2\}$	$2m \equiv 0 \pmod{9}$	9
		$\{9/3\}$		$\{9/4\}$	$3m \equiv 0 \pmod{9}$	3
		$\{9/4\}$			$4m \equiv 0 \pmod{9}$	9
10	3	$\{10/2\}$	1	10/3	$2m \equiv 0 \pmod{10}$	5
		$\{10/3\}$			$3m \equiv 0 \pmod{10}$	10
		$\{10/4\}$			$4m \equiv 0 \pmod{10}$	5

Závěr

Článek se zabýval tzv. hvězdicovými n -úhelníky, které zaujímají zvláštní postavení mezi nekonvexními mnohoúhelníky. Vznikají spojováním nesousedních vrcholů mnohoúhelníků, přitom ne každý hvězdicový mnohoúhelník je tzv. jednotažka. Na hvězdicových mnohoúhelnících lze zavést tzv. modulární aritmetiku. Téma příspěvku svým obsahem a náročností rozšiřuje učivo geometrie a aritmetiky na základní a střední škole a lze jej tedy doporučit do hodin běžné výuky i zájmové matematiky.

Literatura

- [1] Esper, N., & Schornstein, J. (2005). *Fokus Mathematik*. Cornelson.
- [2] Fiala, J. (2015). Hvězdicové mnohoúhelníky. *Učitel matematiky*, 24(1), 29–45.

Abstract

The paper connects the geometric properties of star polygons with integer arithmetic and congruence relations. The article contains a formula for determining the number of different star polygons for a chosen regular polygon, the criterion for the existence of a single line between star polygons and the principles of modular arithmetic on star polygons. The interpretation of the issue is supplemented by tasks.

Jan Fiala

e-mail: fiala@ef.jcu.cz

Petr Chládek

e-mail: chladek@ef.jcu.cz

Katedra aplikované matematiky a informatiky

Ekonomická fakulta

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Studentská 13

370 05 České Budějovice