

Eva Nováková; Růžena Blažková

Úlohy s tematikou pravděpodobnosti na 1. stupni základní školy:
Zkušenost z realizace projektu

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 2, 78–94

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152504>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

ÚLOHY S TEMATIKOU PRAVDĚPODOBNOSTI NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY: ZKUŠENOST Z REALIZACE PROJEKTU

EVA NOVÁKOVÁ, RŮŽENA BLAŽKOVÁ

Úvod

V běžném životě lidé často používají sdělení typu: „Pravděpodobně přijde bouřka.“ „Přeji si, aby mi padla šestka.“ „Chci vyhrát v loterii.“ „Pro jistotu zaplatím pojištění na dovolenou.“ Jedná se o situace, kdy si nejsme jisti výsledkem, ale naše sdělení vyjadřují určitý stupeň důvěry, že budou pravdivá, že se naše přání naplní. Přitom nás může zajímat, za jakých okolností nastane to, co si přejeme. Zajímá nás, jak se v určitých situacích rozhodovat, jaké strategie volit, abychom byli úspěšní.

Příležitost pro hry a různé aktivity, při kterých děti vyslovují úsudky o svých možných úspěších či neúspěších, předvídají, pozorují, vyhledávají všechny možnosti, které mohou nastat, se naskytá již v předškolním věku. Děti získávají první zkušenosti se situacemi, v nichž hraje podstatnou roli náhoda, při spontánních hrách v mateřské škole nebo v rodinném prostředí (Kaslová, 2010, s. 176–186) nebo při situačním učení, které se zakládá na využití situací, jež se kolem nás v reálném životě dějí. Při těchto činnostech, které pomáhají dítěti lépe porozumět světu a dění v něm, si dítě vytváří vlastní prekoncepty jevů založených na náhodných procesech a pravděpodobnosti.

Cílem článku je poskytnout učitelům několik námětů, které ilustrují možnosti využití tématu pravděpodobnosti na prvním stupni základní školy. Úlohy, které vycházejí z běžného života žáků, jim poskytují příležitost postupně se seznamovat s pojmy,

upřesňovat si je a vytvářet vlastní strategie pro jejich řešení. Systematická práce s prekoncepty by mohla napomoci k odstranění formálního přístupu k tématu, se kterým se setkáváme na vyšších stupních škol. Můžeme předpokládat, že by mohla prohloubit porozumění žáků v oblasti problematiky pravděpodobnosti. Autorky vycházejí ze zkušeností při řešení rozvojového projektu, který byl řešen v letech 2019–2022 ve spolupráci Fakulty sociálních studií a Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Jeho cílem bylo poskytnout učitelům výzkumně ověřený, komplexní systém screeningu a následné systematické práce se žáky, kteří jsou již na počátku školní docházky akcelerováni v matematice (Jabůrek et al., 2022). Po testování provedeném na souboru 596 dětí bylo takto identifikováno 52 z nich na 13 školách Jihomoravského kraje. Tito žáci následně využívali zpracované materiály cíleně zaměřené na jejich podporu a další rozvoj. Ověřování metodických materiálů bylo prováděno v úzké spolupráci s učiteli. Po kolegiální reflexi bylo přistoupeno k několika obsahovým i formálním úpravám.

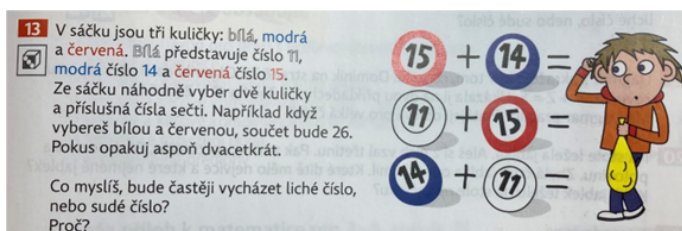
Naším záměrem není na tomto místě uvádět výsledky prováděného experimentu (například kvantitativní analýzu úspěšnosti řešení úloh, autentické ukázky řešitelských postupů), ale ilustrovat možnosti propedeutiky pravděpodobnosti s některými komentáři vycházejícími ze zkušeností učitelů při realizaci se žáky. Vybrané výstupy projektu jsou obsaženy v metodickém textu (Nováková & Blažková, 2023). Vývoj metodiky zahrnoval kontinuální proces sdílení s cílovou skupinou pedagogů, ověřování nosnosti obsahu, ale i celkové srozumitelnosti tak, aby vznikl skutečně funkční materiál, umožňující další bezproblémové šíření inovace mimo projekt.

Zpracované materiály, které byly využívány při práci se žáky, lze nalézt na stránkách Masarykovy univerzity (Masarykova univerzita, 2023).

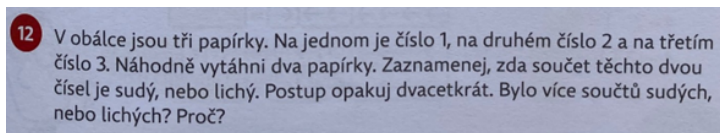
Téma pravděpodobnosti v kontextu primárního matematického vzdělávání

S úlohami z oblasti pravděpodobnosti se lze v českém primárním matematickém vzdělávání – na rozdíl od některých vyspělých

zemí, například Německa (srov. Fiala, 2020) – setkat jen zcela výjimečně. Jejich potenciál při rozvíjení matematické gramotnosti není dostatečně využíván, případné zařazení do výuky na 1. stupni ZŠ záleží pouze na učiteli. Ve stávajícím kurikulu pro 1. stupeň ZŠ (MŠMT, 2021) téma pravděpodobnosti výslovně uvedeno není. V tematickém okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy se uvádí pouze velmi obecně formulovaný očekávaný výstup: „Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací“ (MŠMT, 2021, s. 37). Některé úlohy jako rozšiřující učivo lze v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ objevit také v souvislosti s jiným výukovým obsahem. Jejich řešení se obvykle opírá o jednoduchý experiment. Uvedeme alespoň následující příklady, viz obr. 1 až 4.



Obr. 1: Ukázka experimentu s uplatněním náhody při vytáhnutí kuličky ze sáčku; součet sudého a lichého čísla (Hejný et al., 2010, s. 79)



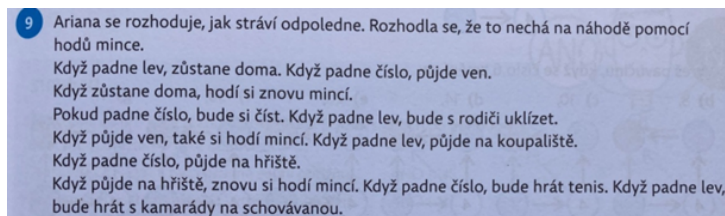
Obr. 2: Stejný námět úlohy v jiném věcném kontextu (Hejný et al., 2022, s. 65)

Domníváme se, že edukační význam úloh zaměřených na předvídání a zkoumání situací s prvky náhody v reálném životě je dán jejich značnou motivační hodnotou a potenciálem k rozvíjení kritického, logického a pravděpodobnostního myšlení žáků i příležitostí vzbuzovat u žáků zájem a zvědavost. Úlohy vedou k uvědomění si míry nejistoty jevů, například při sázkových hrách nebo

5. Je to možné?

- Může být výška člověka 2 000 mm?
- Může být výška třídy 6 m?
- Můžeš ujet na kole za 3 hodiny 150 km?
- Může být škola vysoká 100 m?

Obr. 3: Otázky na posouzení pravděpodobnosti reálných situací; fyzikální veličiny (Blažková et al., 2022, s. 60)



Obr. 4: Ukázka rozhodovací úlohy s využitím hodu mincí (Hejný et al., 2022, s. 37)

jiných formách hazardu. Základní metodou jejich řešení je myšlenková analýza možností, které v jednotlivých situacích mohou, nemohou nebo musí nastat. Žáci při hledání strategie řešení úloh experimentují, své odhady konfrontují s nastalou skutečností. Řešení úloh vyžaduje pouze minimální předběžné matematické znalosti, koncentraci pozornosti a přemýšlení.

Úvahy o vhodné implementaci elementů stochastiky (pravděpodobnosti a statistiky) do výuky matematiky na primárním stupni vzdělávání můžeme zaznamenat již v pracích předních zahraničních didaktiků matematiky z minulého půlstoletí. Jmenujme alespoň Arthura Engela v Německu, Alfreda Renyiho a Támáse Vargu v Maďarsku a Adama Plockého v Polsku.

Úlohy z pravděpodobnosti v rozvojovém projektu

Modul systematického rozvoje akcelerovaných žáků v matematice (Nováková et al., 2022) je tvořen souborem výukových videí¹ a 60

¹ Celková délka všech videolekcí činila více než 100 minut. Autoři výtvarné složky Matěj Smetana, Ondřej Dvořák a Ondřej Voráč obdrželi za tento soubor videí v roce 2023 Cenu rektora Masarykovy univerzity za významný

pracovních listů ke 20 tématům včetně konkrétní a podrobně rozpracované metodiky (Nováková & Blažková, 2023). Navazuje na proces identifikace nadaných žáků. Zpracované materiály žáky systematicky vedou k jejich rozvoji v běžné škole, tedy v heterogenní skupině žáků.

Téma pravděpodobnosti bylo rozpracováno do výukového videa a do souboru pracovních listů ve třech úrovních obtížnosti. Video, které žák (v případě potřeby i opakovaně) zhlédne na tabletu, je koncipováno tak, aby osvojování nového učiva a rozšiřování dosavadních poznatků žáky bylo založeno na konstruktivistických principech, bylo motivační a umožňovalo uplatnění interaktivních prvků. Do videolekce jsou nenásilně a věku dětí přiměřeně zařazeny také elementy z historie, které dětem přístupnou a motivačně vhodnou formou zasazují osvojované poznatky do „světa matematiky“ (tématem pravděpodobnosti provází žáky P. S. Laplace).

Zpracování pracovních listů umožňuje individuální práci žáků. Zadání úloh vyžaduje jistou úroveň čtení s porozuměním, čtenářské dovednosti dětí mají usnadnit texty úloh napsané velkými tiskacími písmeny. V případě potřeby je možná a vítaná dopomoc ze strany učitele tak, aby výkon žáka nebyl negativně ovlivněn problémy souvisejícími s neporozuměním zadání úloh nebo s organizací výuky ve třídě. Obtížnost úloh v pracovních listech je diferencovaná.

Ukázky úloh zařazených do výkladového videa a pracovních listů

Při výběru a zpracování vhodných úloh musely být zohledněny limity, které jsou dány věkem a minimálními předchozími zkušenostmi dětí. Užití pojmů souvisejících s axiomatickou definicí pravděpodobnosti muselo být eliminováno nebo minimalizováno a nahrazeno termíny používanými v hovorové řeči. Například „jev jistý“ byl pro větší srozumitelnost doplněn termínem „nastane vždy“; pojem „stejná pravděpodobnost“ nahrazen nebo doplněn vyjádřením „šance jsou vyrovnané“, „50 na 50“ nebo „fifty-fifty“.

umělecký počin.

Východiskem pro tvorbu úloh se staly přirozené, žákům blízké situace (děje, procesy) v realitě, v nichž jsou možné navzájem různé výsledky, ale ve kterých není s jistotou předem dáno, který z nich nastane, protože o tom rozhoduje náhoda.

Vycházíme z posuzování pravděpodobnosti jevů v reálném životě, které můžeme nebo nemůžeme v kontextu reálné situace ovlivnit. Například: Je pravděpodobné, že bude zítra pršet? Že skočíme do dálky 6 metrů? Že ujdeme za den 30 km? Že nám v noci naroste dlouhý nos? Že nám spadne chleba namazanou částí na zem? Že poletíme zítra do Austrálie? Na uvedených sděleních si žáci mohou uvědomovat, že posuzování pravděpodobnosti uvedených jevů je bez komplexního posouzení situace obtížné nebo dokonce nemožné. Některé faktory ani posoudit nedokážeme, protože k tomu nemáme dostatek informací.

Ve videu, které má žákům přiblížit pravděpodobnostní jevy, je výchozí situace založena na házení šestistěnnou kostkou a na házení mincí. Předpokladem pochopení prezentovaného jevu je žákům známá situace ze hry Člověče, nezlob se: při hodu jednou kostkou může nastat 6 různých možností. Součty ok (bodů) na horní stěně kostky při hodu více než jednou kostkou mohou být různé. V úloze, která ve videu následuje, žáci řeší situace při hodu dvěma kostkami a určují součet počtu ok na horních stěnách kostek. Zároveň je zde vizualizována míra pravděpodobnosti jednotlivých součtů. Je například méně pravděpodobné, že padne součet 2 než součet 7. Žáci tak mohou intuitivně vnímat různou míru pravděpodobnosti i v rámci jevu možného. Jev nemožný je ilustrován na hodu pěti kostkami a na vyloučení případu, že padne součet 32. Při házení mincí žáci posuzují, zda je pravděpodobnější, že padne líc, nebo rub. V případě, že existují dvě možnosti, je pravděpodobnost jednoho z jevů jedna polovina. Ve videu je tato skutečnost vyjádřena výrazem obvyklým pro běžnou mluvu (šance jsou vyrovnané). Sledování videa učitelem spolu se žákem nebo se skupinou žáků umožňuje využít různé formy práce. Po celou dobu sledování videa směřuje komunikace mezi učitelem a žákem ke zjištění dosavadních představ žáka v této oblasti. Pro hlubší porozumění se při ověřování projektu ukázalo jako vhodné

řešit jednotlivé úlohy prezentované na videu pomocí manipulace s připravenou pomůckou – hracími kostkami. Zároveň mohli žáci své dosažené výsledky diskutovat s učitelem a vrstevníky.

Úlohy zařazené do pracovních listů jsou dvou typů:

- a) Úlohy na získání prvních zkušeností s výpovědí o pravděpodobnosti jevů. Rozpoznání případů, které mohou, či nemohou nastat, tj. kvalitativní ohodnocení pravděpodobnosti (jev jistý, možný, nemožný).
- b) Úlohy na porovnání pravděpodobností jevů, které mohou nastat v reálných situacích. Odhadování šance na výhru v jednoduchých náhodných experimentech využívajících „generátorů náhody“: hod mincí nebo hrací kostkou, kolo štěstí.

Úlohy na rozpoznání případů, které mohou, nebo nemohou nastat

1.

ROZHODNI, ZDA JE DANÁ SITUACE JEVEM JISTÝM, MOŽNÝM, NEBO NEMOŽNÝM. SVŮJ VÝBĚR ZAKROUŽKUJ.

- a) KAŽDÝ DEN RÁNO SVÍTÁ

JEV JISTÝ (NASTANE VŽDY)	JEV MOŽNÝ (NASTANE NĚKDY)	JEV NEMOŽNÝ (NEMŮŽE NASTAT)
-----------------------------	------------------------------	--------------------------------

- b) PRVNÍ DEN PO NEDĚLI JE ČTVRTEK.
- c) TÝDEN MÁ SEDM DNÍ.
- d) DNES BUDU HRÁT TENIS.
- e) V SÁČKU JE 5 KULÍČEK. VŠECHNY JSOU ČERVENÉ. VYTÁHNU ČERVENOU KULÍČKU.
- f) V SÁČKU JSOU 4 KULÍČKY. 3 Z NICH JSOU ČERVENÉ A 1 MODRÁ. VYTÁHNU ZELENOU KULÍČKU.
- g) KDYŽ HODÍŠ PĚTIKORUNOU, PADNE LÍC.

Stejně jako u případu a) byla nabídka odpovědí uvedena u všech zbývajících výroků.

Uvedené výroky můžeme rozlišit do dvou skupin. V jedné se do posuzování pravdivosti situací promítanou zkušeností a znalostí žáků z různých oblastí: případy a), b), c), d); v druhé skupině jsou situace nezávislé na individuálním posuzování žákem: případy e), f), g). Například když měli žáci posoudit, zda každý den ráno svítá, uvedl jeden z žáků, že v některých zemích ráno ne-

svítá; pro některé žáky nebyl srozumitelný význam slova svítá. Při posuzování pravděpodobnosti, zda budou odpoledne hrát tenis, vycházeli žáci z osobní zkušenosti, vlastních plánů pro dané odpoledne. Proto se zde objevovalo vyhodnocení situace jako jevu jistého, možného i nemožného. Do posuzování možností výběru kuliček ze sáčku nebo výsledku při hodu mincí osobnostní postoje žáka vstupovat nemohou, zde záleží na posouzení matematické situace na základě dobré představy popsané situace.

2.

- a) NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE URČITĚ STANOU, NASTANOU JISTĚ.
- b) NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE URČITĚ NESTANOU, NIKDY NEMOHOU NASTAT.
- c) NAPIŠ PŘÍKLADY DVOU SITUACÍ, KTERÉ SE MOHOU STÁT, ALE NEMUSÍ. MOŽNÁ NASTANOU. NASTANOU S URČITOU PRAVDĚPODOBNOSTÍ.

Odpovědi žáků byly velmi rozmanité. Jako jev jistý žáci uvedli například tvrzení: „O víkendu není škola.“ „V pondělí začíná nový týden.“ Obě situace jsou silně navázané na zkušenosti dětí, které nezažily například sobotní vyučování, a jsou ukotvené v určité kultuře, kde pracovní týden začíná pondělím. Jeden žák uvedl příklad situace, která nastane jistě: „Že jsem se narodil a že umřu.“ Jako situaci, která jistě nenastane, žáci uvedli: „Žádný člověk nemůže mít 2022 let.“ „Na hrací kostce od Člověče, nezlob se padne 10.“ „Nikdy nepřestanu mít ráda své rodiče a babičku s dědou.“ Situaci, která může nastat, žák vyjádřil větou: „Někdy nejdu do školy.“ Jiný žák použil pro vyjádření situace, která může nastat, piktogramy pro slunečné počasí či bouřku.

Úlohy na porovnávání pravděpodobnosti s využitím různých „generátorů náhody“ – odhadování šance na výhru

1

KAŽDÁ MINCE MÁ DVĚ STRANY, RUB A LÍC. NĚKDY SE TAKÉ JEDNÉ STRANĚ ŘÍKÁ PANNA A DRUHÉ OREL. HÁZÍME TŘEMI MINCEMI.



MOHOU NASTAT TYTO MOŽNOSTI:

	1. MINCE	2. MINCE	3. MINCE
1. MOŽNOST	RUB	RUB	RUB
2. MOŽNOST	RUB	RUB	LÍC
3. MOŽNOST	RUB	LÍC	RUB
4. MOŽNOST	LÍC	RUB	RUB
5. MOŽNOST	RUB	LÍC	LÍC
6. MOŽNOST	LÍC	LÍC	RUB
7. MOŽNOST	LÍC	RUB	LÍC
8. MOŽNOST	LÍC	LÍC	LÍC

Obr. 5: Možnosti, které mohou nastat při hodu třemi mincemi

V KOLIKA PŘÍPÁDECH BUDE ALESPŮŇ NA DVOU MINCÍCH LÍC? _____

JAKÁ JE PRAVDĚPODOBNOST, ŽE PADNE NA VŠECH TŘECH MINCÍCH
STEJNÁ STRANA? _____

Úkolem žáka je rozhodnout o míře pravděpodobnosti popsaných jevů. V první úloze hází třemi mincemi a prověřuje, v kolika případech padne alespoň na dvou mincích líc a v kolika případech padne na všech třech mincích stejná strana. Nabídka všech možností mají žáci k dispozici. Důležitá je zde dobrá orientace v tabulce.

Obtíže se ukázaly v porozumění významu slova alespoň. Někteří žáci považovali za správnou odpověď na první otázku „ve dvou případech“, tj. když bude právě na dvou mincích líc. S posouzením pravděpodobnosti, kdy padne na všech třech mincích stejná strana, si žáci nevěděli rady. Uváděli širokou škálu odpovědí, často nesprávných: „malá“, „půl na půl“, „nula“, „jedna“. Takto formulovaná otázka byla pro žáky nepřiměřeně obtížná. V průběhu ověřování se ukázalo jako vhodné nejprve vést žáky k vyhodnocení počtu možností, kdy padne na všech třech mincích stejná strana (dvě možnosti), a až poté se pokusit vyjádřit pravděpodobnost tohoto jevu, například slovy „dvě možnosti z osmi“.

2. S JAKOU PRAVDĚPODOBNOSTÍ VYBEREME Z KOŠÍKU OVOCE?

V PRVNÍ SITUACI VYBÍRÁME Z KOŠÍKU JABLKO. PAVEL SI MYSLÍ, ŽE JE MÉNĚ PRAVDĚPODOBNÉ, ŽE VYBEREME Z KOŠÍKU JABLKO. SPÍŠE VYBEREME HRUŠKU. PROTO NAKRESLIL KŘÍŽEK DO POLÍČKA „MÉNĚ PRAVDĚPODOBNÉ“.

ROZHODNI A DOPLŇ KŘÍŽKY K DALŠÍM SITUACÍM.

VYBÍRÁME	V KOŠÍKU JE	VÍCE PRAVDĚPODOBNÉ	MÉNĚ PRAVDĚPODOBNÉ
	  		X
	  		
	   		
	    		
	     		

Obr. 6: Rozhodování o tom, jaká je pravděpodobnost výběru ovoce z košíku

V úloze vyjadřuje žák pravděpodobnost výběru daného ovoce z košíku, v němž je různý počet jablek a hrušek. Všech pět situací je zaznamenáno v tabulce. Žák své rozhodnutí o tom, co je více, nebo méně pravděpodobné, označí křížkem v příslušném políčku. Rozhoduje se na základě určení počtu jablek nebo hrušek: je-li v košíku více jablek než hrušek, je více pravděpodobné, že vybere jablko; je-li více hrušek, je více pravděpodobné, že vybere hrušku.

Úloha byla řešena s velkou mírou úspěšnosti. Přičítáme to zejména grafickému vyjádření zadání, které žákům umožnilo snadno porovnat počty jablek a hrušek. Potvrzuje se, že vizualizace má svoje důležité místo při setkávání se s novými situacemi, při vyvozování nových matematických témat.

3.

JARKA S MATĚJEM TAHALI KULIČKY ZE SÁČKU. PŘI KAŽDÉM KOLE BYLY V SÁČKU JINÉ KULIČKY. ROZHODNI U KAŽDÉHO KOLA, KDO MÁ VĚTŠÍ ŠANCI, ŽE VYTÁHNE KULIČKU, KTEROU SI PŘEJE.

- a) V SÁČKU JE 1 BÍLÁ A 1 ČERNÁ KULIČKA. JARKA SI PŘEJE VYTÁHNOUT BÍLOU KULIČKU, MATĚJ ČERNOU.
VĚTŠÍ ŠANCI MÁ _____.
- b) V SÁČKU JSOU 2 BÍLÉ A 1 ČERNÁ KULIČKA. JARKA SI PŘEJE VYTÁHNOUT BÍLOU KULIČKU, MATĚJ ČERNOU.
VĚTŠÍ ŠANCI MÁ _____.
- c) V SÁČKU JSOU 2 BÍLÉ A 3 ČERNÉ KULIČKY. JARKA SI PŘEJE VYTÁHNOUT BÍLOU KULIČKU, MATĚJ ČERNOU.
VĚTŠÍ ŠANCI MÁ _____.
- d) V SÁČKU JE 17 BÍLÝCH A 15 ČERNÝCH KULIČEK. JARKA SI PŘEJE VYTÁHNOUT BÍLOU KULIČKU, MATĚJ ČERNOU.
VĚTŠÍ ŠANCI MÁ _____.

V této úloze žáci rozhodovali o pravděpodobnosti v případech, kdy jsou vybírány kuličky ze sáčků. Počet a barva kuliček v sáčku se mění. Při posuzování situací většina žáků vyhodnotila situace správně. Větší pravděpodobnost (větší šance) vytažení kuličky dané barvy nastává tehdy, je-li v sáčku větší počet kuliček této barvy, velikosti čísel nehrály roli.

V úloze a) se ukázalo, že přestože nedokončená věta vede žáky k volbě jednoho z dětí, dokázali si s řešením poradit a vyhodnotit situaci správně. Vyjadřovali ji slovy: „oba dva“, „stejnou“, „ani jeden“.

V dalších třech úlohách je generátorem náhody kolo štěstí, rozdělené na různý počet různobarevných kruhových výsečí. Výseče jsou reprezentací zlomku ve významu části celku, kolo štěstí (kruh) je geometrický/spojitý model celku. Velikost kruhové výseče určuje pravděpodobnost splnění přání dětí – aby jim kolo štěstí ukázalo „políčko“ příslušné barvy.

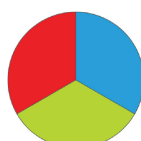
4.

KAROLÍNA A MAREK TOČÍ KOLEM ŠTĚSTÍ. OBA CHTĚJÍ, ABY JIM UKÁZALO NA ZELENÉ POLÍČKO. KAŽDÝ MÁ JINÉ KOLO ŠTĚSTÍ.
KDO MÁ VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE SE MU PŘÁNÍ SPLNÍ?

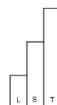
KAROLÍNA



MAREK



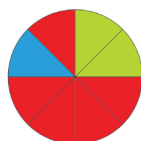
VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST MÁ _____.



5.

ŠIMON A BEN TOČÍ KOLEM ŠTĚSTÍ. OBA CHTĚJÍ, ABY JIM UKÁZALO NA ZELENÉ POLÍČKO. KAŽDÝ MÁ JINÉ KOLO ŠTĚSTÍ.
KDO MÁ VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE SE MU PŘÁNÍ SPLNÍ?

ŠIMON



BEN



VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST MÁ _____.



6.

ZUZKA A VERČA TOČÍ KOLEM ŠTĚSTÍ. OBE CHTĚJÍ, ABY JIM UKÁZALO NA ZELENÉ POLÍČKO. KAŽDÁ MÁ JINÉ KOLO ŠTĚSTÍ.
KTERÁ Z NICH MÁ VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE SE JÍ PŘÁNÍ SPLNÍ?

ZUZKA



VERČA



VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST MÁ _____.



Čtvrtou úlohu řešili všichni žáci správně. Obtíže nastaly při řešení úloh 5 a 6, ve kterých nebyla políčka stejné barvy znázorněna jednou výsečí kruhu (spojitě). Pokud byla jedna barva vyjádřena pomocí více výsečí, stala se situace pro žáky složitější. Když byla jedna polovina znázorněna dvěma čtvrtinami nebo čtyřmi osminami, větší pravděpodobnost úspěchu viděli u dvou čtvrtin. Je zřejmé, že to vyplývá z neukotvené představy pojmu zlomek, vztahu mezi čitatelem a jmenovatelem.

7.

JANA A FILIP HRAJÍ HRU. HÁZÍ VŽDY DVĚMA KOSTKAMI. JANA POTŘEBUJE HODIT SOUČET 7, FILIP SOUČET 5. KDO MÁ VĚTŠÍ PRAVDĚPODOBNOST, ŽE MU JEHO SOUČET PADNE? PROČ?

Zadání úlohy je silně navázáno na výchozí video, kde je posuzována pravděpodobnost jevů vycházející z hodu kostkami. Žáci se zde setkávají i s hledáním možných součtů ok, které padnou při hodu dvěma kostkami. Na základě ve videu uvedených rozkladů čísel 7 a 5 na dva sčítance mohli žáci posoudit, že nejvíce možností nabízí součet 7 ($6 + 1$, $5 + 2$, $4 + 3$, $3 + 4$, $2 + 5$, $1 + 6$). Ne všichni tento poznatek při řešení úlohy využili. V řešení se objevila správná i nesprávná řešení. Někteří uváděli nesprávnou úvahu: „Větší pravděpodobnost má Filip, protože na kostce často padá 2 a 3.“ Navraceli se tak ke svým subjektivním zkušenostem z her.

Diskuze

Považujeme za vhodné stručně shrnout obsahovou i formální stránku úloh prezentovaných v článku a zkušenost, kterou přineslo jejich využití v praxi. Do diskuzí nad vhodností výběru úloh a jejich finální podobou se zapojil kromě autorek také širší okruh odborníků, především učitelé a učitelky ze škol participujících na projektu. Na jejich podnět bylo například užito velkých písmen v zadání úloh, což se pro žáky 1. třídy s minimálními čtenářskými dovednostmi jevílo jako vhodnější. Podnětná byla zjištění o konkrétním způsobu realizace individualizované výuky s nadaným žákem. Při jeho práci s tabletem a pracovními listy

se často ukázala jako potřebná komunikace s učitelkou, která interpretovala zadání některých úloh, obsahujících termíny z oblasti teorie pravděpodobnosti (Jaká je pravděpodobnost? Kdo/co má větší pravděpodobnost? S jakou pravděpodobností ...?). Pokud se ukázalo, že byla tato vyjádření pro některé žáky nesrozumitelná, byly otázky v konkrétních případech učitelkou transformovány do jazyka, který je žákovi srozumitelnější a odpovídá reálné situaci (Co se může, ale nemusí stát? Je více pravděpodobné, že vybereme z košíku jablko nebo hrušku? Kdo má větší šanci, že mu padne zelené políčko? Zelené políčko padne pravděpodobněji Karolíně nebo Markovi? Je pravděpodobnější, že potřebný součet padne spíše Janě nebo Filipovi?).

V průběhu realizace našeho projektu se prokázalo, že nadaní žáci rádi využívají příležitosti seznámit se s tématy nad rámec běžné školní výuky. I když v tomto věku pracují s pravděpodobností intuitivně, jsou schopni vyjádřit míru pravděpodobnosti slovní formulací, která je pro ně srozumitelná. Přitom současně rozšiřují svou slovní zásobu, zpřesňují své představy o možných výsledcích daných jevů a výsledcích, které mohou nastat. Toto téma pro ně bylo výzvou, jak prostřednictvím experimentů chápat absolutní četnosti jednotlivých pokusů a jak posuzovat pravděpodobnost uváděných námětů.

Závěr

Matematická edukace na primárním stupni poskytuje podle našeho názoru příležitost využít pro komplexní rozvoj dětské osobnosti některé nevšední výukové náměty. Pokud jde o aplikační úlohy, jejichž kontext je zasazen do oblasti pravděpodobnosti, nabízí se jejich uplatnění v badatelsky orientované výuce, při skupinové práci, tvorbě a realizaci projektů nebo v terénní výuce. Domníváme se, že žák, který dovede uplatnit schopnost rozlišit pro danou situaci z reálného života význam termínů jev jistý, jev možný, jev nemožný a uvědomuje si míru nejistoty jevů v realitě, významně rozvíjí nejen svou matematickou, ale také sociální a mediální gramotnost. Úlohy, které jsme v příspěvku nabídly, se tak mohou stát vítaným průvodcem na jeho vzdělávací cestě. Smys-

lem jejich řešení je přispět k tomu, aby výrok „Matematika nás vždy baví“ byl pro něj – tak jako na obrázku pro Rona – jevem jistým.



Obr. 7: Motivační obrázek ke kvalitativnímu ohodnocení pravděpodobnosti při použití pravděpodobnostní škály (Fiala, 2020, s. 25)

Literatura

- [1] Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2022). *Matematika pro 4. ročník ZŠ, 3. díl. Učebnice*. Alter.
- [2] Engel, A., Varga, T., & Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe*. Ernst Klett Verlag.
- [3] Fiala, J. (2020). Vyučování pravděpodobnosti na 1. stupni základních škol v Německu. *Elementary Mathematics Education Journal*, 2(1), 13–28.
- [4] Hejný, M., Jirotková, D., & Bomeroová, E. (2010). *Matematika 4 (učebnice pro základní školy)*. Fraus.
- [5] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2021). *Matematika pro 4. ročník, pracovní sešit 1*. H-mat o.p.s.
- [6] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., Strnad, V., & Ročák, Š. (2022). *Matematika pro 5. ročník, pracovní sešit 1*. H-mat o.p.s.

- [7] Jabůrek, M., Cígler, H., Valešová, T., & Portešová, Š. (2022). What is the basis of teacher judgment of student cognitive abilities and academic achievement and what affects its accuracy? *Contemporary Educational Psychology*, 69, 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2022.102068>
- [8] Kaslová, M. (2010). *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Raabe s. r. o.
- [9] Masarykova univerzita. (2023, 16. září). *Nadaný prvňáček*. <https://www.nadanyprvnacek.cz/matematika-pravdepodobnost-pravdepodobnost-id51>
- [10] MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. <https://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/ucebni-dokumenty>
- [11] Nováková, E., Blažková, R., Bušková, P., Smetana, M., & Svobodová, J. (2022). *Modul systematického rozvoje akcelerovaných žáků v matematice*. Masarykova univerzita.
- [12] Nováková, E., & Blažková, R. (2023, 16. září). *Rozvíjení matematické gramotnosti s využitím inovativního modulu systematického rozvoje žáků 1. až 3. tříd. Metodický text pro učitele*. Masarykova univerzita. <https://munispace.muni.cz/library/catalog/book/2222>
- [13] Płocki, A., & Tlustý, P. (2007). *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*. Prometheus.

Abstract

This paper presents one possible approach to incorporating probability problems into teaching. Probability problems may lead to the development of students' critical thinking and are an opportunity to arouse curiosity. It summarised the experience gained during the research project based on a scientifically validated process of identifying children with an aptitude for mathematics at the very beginning of their schooling. The researched module developing the potential of these children focused on the creation, analysis, and validation of a comprehensive set of stimulating ma-

terials that systematically guide them to foster their mathematical aptitude in mainstream school. The flow of activities was analysed while working with the instructional video and the set of worksheets, as well as the pupils' success rate of problem solving. Examples of pupils' solutions are provided, as well as several typical shortcomings and epistemological barriers evident in the problem-solving process.

Eva Nováková

e-mail: novakova@ped.muni.cz

Růžena Blažková

e-mail: blazkova@ped.muni.cz

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta MU

Poříčí 31

603 00 Brno