

Petr Vodstrčil

O kuriózním chování částečných součtů jedné řady

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 69 (2024), No. 4, 220–229

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152864>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

O kuriózním chování částečných součtů jedné řady

Petr Vodstrčil

Abstrakt. V tomto článku budeme porovnávat částečné součty jisté řady s jejím součtem, kterým je číslo π . Všimneme si přitom jedné kuriozity, kterou následně objasníme. Dáme si přitom za cíl používat jen velmi jednoduché poznatky z vyšší matematiky.

1. Vyjádření čísla π řadou

Nekonečná řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots, \quad (\clubsuit)$$

kterou budeme v našem článku zkoumat, má součet π . Vyplyvá to z následující věty, ve které vystupuje velmi dobře známá Leibnizova (popř. Gregoryho) řada se součtem $\frac{\pi}{4}$. Pro zajímavost ukažme jeden elementární důkaz, ve kterém budeme využívat jen minimum znalostí z matematické analýzy. Velmi podobný důkaz je možné najít například i na Wikipedii (viz [5]).

Věta 1. *Platí*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Důkaz. Je potřeba ukázat, že limitou posloupnosti částečných součtů uvedené řady je číslo $\frac{\pi}{4}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 (-1)^{i-1} x^{2i-2} dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^{2i-2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Využili jsme přitom pouze linearitu integrálu (pracujeme s konečnými součty) a vzorec pro součet prvních n členů geometrické řady. Z rovnosti $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

doc. Mgr. PETR VODSTRČIL, Ph.D., Katedra aplikované matematiky FEI VŠB-TUO, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba, e-mail: petr.vodstrcil@vsb.cz

a vztahu (2) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} dx \right| = \\ &= \left| \int_0^1 \frac{(-x^2)^n}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-x^2)^n}{1+x^2} \right| dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Proto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

□

Vztah (1) bychom mohli odvodit i pomocí teorie mocninných řad, konkrétně vět týkajících se derivování a integrování mocninných řad člen po členu (viz například [4]) a pomocí Leibnizova kritéria a Abelovy věty (viz [2]). Záměrně jsme postupovali jinak, protože se v celém článku budeme snažit používat co možná nejjednodušší matematický aparát.

2. Posloupnost částečných součtů řady (♣)

Nyní se zaměříme na posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů řady (♣) danou předpisem

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z definice součtu řady a z věty 1 je jasné, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pi$. Lze očekávat, že pokud $n \in \mathbb{N}$ bude „dostatečně velké“, bude hodnota s_n „blízká“ číslu π . Zkusme proto vypočítat hodnotu s_n například pro $n = 500\,000\,000$ a porovnat ji s hodnotou čísla π . Po provedení výpočtu (který s použitím systému Maple trval na běžném počítači méně než 10 minut) obdržíme:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,141\,592\,65\mathbf{3}\,589\,793\,238\,462\,643\,38\mathbf{3}\,279\,502\,884\,197\,169\,3\mathbf{99}\,375\,105\,820\,974\,944\,\mathbf{592}\,30\dots, \\ s_n &= 3,141\,592\,65\mathbf{1}\,589\,793\,238\,462\,643\,38\mathbf{5}\,279\,502\,884\,197\,169\,3\mathbf{89}\,375\,105\,820\,974\,944\,\mathbf{714}\,30\dots \end{aligned}$$

Skutečnost, že prvních 8 desetinných míst obou čísel se shoduje, nás jistě tolik nepřekvapí, neboť jsme sečetli velké množství (prvních 500 000 000) členů naší řady. Cifry na devátém desetinném místě se už liší (zvýrazněno tučně).

Extrémně zajímavý a nečekaný je ale fakt, že několik dalších cifer se opět shoduje (konkrétně 10.–26. desetinné místo). Na 27. desetinném místě se obě čísla opět liší a 28.–43. desetinné místo se zase shoduje. Na 44. místě se čísla opět liší a na 45.–60. desetinném místě panuje opět shoda!

Můžeme si všimnout, že desetinné rozvoje obou čísel (π a $s_{500\,000\,000}$) se na prvních 65 desetinných místech liší pouze na šesti pozicích, které jsme tučně zvýraznili.

Tento jev objevil na počítači Roy D. North. Teprve později (v roce 1989) se jej v článku [1] podařilo objasnit bratrům J. a P. Borweinovým společně s K. Dilcherem (čerpáno z knihy [6]). Kromě řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}$, které se věnujeme v našem článku, je v [1] rozebrána i řada $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Autoři však k důkazům svých tvrzení potřebují složitější matematický aparát jako je například Eulerova–Maclaurinova formule, Bernoulliho čísla, Eulerova čísla, atd.

V našem článku objasníme výše uvedenou skutečnost pouze pomocí prostředků nepřesahujících základní kurzy matematické analýzy. Jediné, co budeme potřebovat, je znalost limit posloupností a Stolzova věta, která je jakousi diskrétní analogií l’Hopitalova pravidla.

3. Stolzova věta

V této části připomeneme Stolzovu větu. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme diferenci

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Věta 2 (Stolzova). *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti splňující následující tři předpoklady:*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$,
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ryze monotónní,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$ existuje (vlastní nebo nevlastní).

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}.$$

Důkaz. Úplný důkaz je možné najít například v knize [3]. Pro zajímavost zde dokážeme pouze speciální případ věty, kde budeme předpokládat, že

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,
- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = L \in \mathbb{R}$.

To je přesně varianta Stolzovy věty, kterou dále budeme potřebovat. Naším úkolem je dokázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je zvoleno libovolně, ale pevně. Podle definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $k \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon \leq \frac{\Delta a_k}{\Delta b_k} \leq L + \varepsilon,$$

odkud pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $k \geq n_0$ (uvědomme si, že vzhledem k předpokladům platí $\Delta b_k < 0$) máme

$$(L - \varepsilon)\Delta b_k \geq \Delta a_k \geq (L + \varepsilon)\Delta b_k. \quad (3)$$

Jsou-li čísla $m, n \in \mathbb{N}$ zvolena tak, že $n_0 \leq n < m$, dostaneme sečtením nerovností (3) pro $k \in \{n, \dots, m-1\}$ nerovnosti

$$(L - \varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} \Delta b_k \geq \sum_{k=n}^{m-1} \Delta a_k \geq (L + \varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} \Delta b_k.$$

Po sečtení diferencí a jednoduché úpravě získáme nerovnosti

$$(L - \varepsilon)(b_m - b_n) \geq (a_m - a_n) \geq (L + \varepsilon)(b_m - b_n), \quad (4)$$

které jsou platné pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n < m$. Protože $a_m \rightarrow 0$ i $b_m \rightarrow 0$ pro $m \rightarrow \infty$, dostaneme z nerovností (4) limitním přechodem vzhledem k m nerovnosti

$$(L - \varepsilon)(-b_n) \geq (-a_n) \geq (L + \varepsilon)(-b_n), \quad (5)$$

které platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a konverguje k nule, proto jsou všechny její členy kladné. Vydělíme-li nyní nerovnosti (5) záporným výrazem $(-b_n)$, dostaneme

$$L - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. To ale znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n},$$

což jsme chtěli dokázat. □

4. Objasnění chování částečných součtů řady (♣)

Nejprve bude vhodné naši řadu, která je alternující (střídá znaménka), přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} &= \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots = \\ &= \left(\frac{4}{1} - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{7} \right) + \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{11} \right) + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{4i-3} - \frac{4}{4i-1} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{(4i-3)(4i-1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

což už je řada s kladnými členy a pro další zkoumání bude vhodnější.

Rovnosti ve vztahu (6) jsou v pořádku, protože je jasné, že pro n -tý částečný součet řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{(4i-3)(4i-1)}$, který označíme t_n , platí $t_n = s_{2n}$, kde s_{2n} je $2n$ -tý částečný součet původní řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}$. Proto (z definice součtu řady a z (1))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \pi.$$

Pro další výpočty bude užitečné si uvědomit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\Delta t_n &= t_{n+1} - t_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{8}{(4i-3)(4i-1)} - \sum_{i=1}^n \frac{8}{(4i-3)(4i-1)} = \frac{8}{(4n+1)(4n+3)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Ze Stolzovy věty (rozmyslete si, že ji lze skutečně použít) a vztahu (7) však dostaneme zajímavější výsledek

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi - t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - t_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(\pi - t_n)}{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-t_{n+1} + t_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{8}{(4n+1)(4n+3)}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n(n+1)}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (8)$$

ve kterém je navíc ukrytá informace o tom, jak rychle posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu π . Vztah (8) totiž můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} \right) = 0,$$

což nám říká, že posloupnost $\{\pi - t_n - \frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n}$. Proto je přirozené zkoumat následující limitu (opět použijeme Stolzovu větu a vztah (7)):

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - t_n - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta\left(\pi - t_n - \frac{1}{2n}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-t_{n+1} + t_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}}{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n(n+1)}{2(2n+1)(4n+1)(4n+3)} = 0.\end{aligned}$$

Protože i tato limita vyšla nulová, znamená to, že $\{\pi - t_n - \frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule dokonce řádově rychleji než $\frac{1}{n^2}$. Proto zkusíme spočítat ještě limitu

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - t_n - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta\left(\pi - t_n - \frac{1}{2n}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-t_{n+1} + t_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2(n+1)^2}{2(3n^2+3n+1)(4n+1)(4n+3)} = -\frac{1}{32}.\end{aligned}$$

Tu je možné přepsat do tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} \right) = 0.$$

Posloupnost $\left\{\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ proto konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n^3}$.

Naprostou identickou technikou bychom zjistili, že

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} \right) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} \right) &= \frac{5}{512},\end{aligned}$$

tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} \right) = 0.$$

Posloupnost $\left\{\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n^5}$.

Dále bychom zjistili, že

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^6 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} \right) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^7 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} \right) &= -\frac{61}{8 \cdot 192},\end{aligned}$$

odkud máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^7 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} \right) = 0. \quad (9)$$

Ještě dalším opakováním téhož postupu (který zde nebudeme podrobně rozepisovat) bychom obdrželi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^9 \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} - \frac{1 \cdot 385}{131 \cdot 072n^9} \right) = 0,$$

což znamená, že posloupnost $\left\{\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} - \frac{1 \cdot 385}{131 \cdot 072n^9}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n^9}$.

Pro další zkoumání bude ještě užitečné (pro každé $n \in \mathbb{N}$) spočítat následující diferenci:

$$\begin{aligned}\Delta \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} \right) &= \\ &= -\frac{12 \cdot 465n^6 + 37 \cdot 395n^5 + 46 \cdot 549n^4 + 30 \cdot 773n^3 + 11 \cdot 411n^2 + 2 \cdot 257n + 183}{8 \cdot 192n^7(n+1)^7(4n+1)(4n+3)} < 0. \quad (10)\end{aligned}$$

Jedná se pouze o mechanický výpočet, se kterým nám opět pomohl systém Maple. To, že je vypočtená difference záporná, je už triviální, neboť $n \in \mathbb{N}$ je kladné číslo. Vztah (10) tedy říká, že posloupnost

$$\left\{ \pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

je klesající. Společně se zřejmým faktem (uvědomme si, že $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \pi$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} \right) = 0$$

pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$t_n < \pi - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7}. \quad (11)$$

Podobně bychom spočítali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Delta \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} - \frac{1 \cdot 385}{131 \cdot 072n^9} \right) > 0,$$

což společně s rovností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - t_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} - \frac{1 \cdot 385}{131 \cdot 072n^9} \right) = 0$$

dává

$$t_n > \pi - \frac{1}{2n} + \frac{1}{32n^3} - \frac{5}{512n^5} + \frac{61}{8 \cdot 192n^7} - \frac{1 \cdot 385}{131 \cdot 072n^9} \quad (12)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ze vztahů (11), (12) a s použitím rovnosti $131 \cdot 072 = 2^{17}$ dostáváme následující větu.

Věta 3. Pro každý člen posloupnosti $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$t_n = s_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}, \quad (13)$$

platí nerovnosti

$$\pi - r_n - \frac{1 \cdot 385}{2^{17}n^9} < t_n < \pi - r_n, \quad (14)$$

kde

$$r_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{32n^3} + \frac{5}{512n^5} - \frac{61}{8 \cdot 192n^7} \quad \left(= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2^5n^3} + \frac{5}{2^9n^5} - \frac{61}{2^{13}n^7} \right). \quad (15)$$

Síla právě uvedené věty spočívá v tom, že se nejedná pouze o limitní výsledek, tj. o výsledek platný pro všechna „dost velká“ $n \in \mathbb{N}$, ale o nerovnosti platné pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z věty 3 ihned vidíme, že přibližná rovnost

$$t_n \doteq \pi - r_n \quad (16)$$

je pro každé $n \in \mathbb{N}$ zatížená chybou, která je (v absolutní hodnotě) menší než $\frac{1 \cdot 385}{2^{17}n^9}$. Tato chyba je tedy pro velká $n \in \mathbb{N}$ velmi malá.

A protože nás zajímal částečný součet $s_{500\,000\,000} = t_{250\,000\,000}$, dostaneme dosazením $n = 250\,000\,000 = \frac{1}{2^2} \cdot 10^9$ do vztahů (15) a (16) následující přibližnou rovnost:

$$s_{500\,000\,000} = s_{2n} = t_n \doteq \pi - r_n = \pi - \frac{2}{10^9} + \frac{2}{10^{27}} - \frac{1}{10^{44}} + \frac{122}{10^{63}}. \quad (17)$$

Vzniklá chyba je přitom menší než $\frac{1\,385}{2^{17}n^9} = \frac{277}{10^{80}}$.

Vztah (17) už plně vysvětluje dříve zmíněné chování částečného součtu $s_{500\,000\,000}$ řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}$:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,141\,592\,65\mathbf{3}\,589\,793\,238\,462\,643\,38\mathbf{3}\,279\,502\,884\,197\,169\,3\mathbf{99}\,375\,105\,820\,974\,944\,\mathbf{592}\,30\dots, \\ s_{500\,000\,000} &= 3,141\,592\,65\mathbf{1}\,589\,793\,238\,462\,643\,38\mathbf{5}\,279\,502\,884\,197\,169\,3\mathbf{89}\,375\,105\,820\,974\,944\,\mathbf{714}\,30\dots \end{aligned}$$

Nyní je pěkně vidět, že dekadický zápis částečného součtu $s_{500\,000\,000}$ naší řady dostaneme z dekadického zápisu čísla π tak, že na 9. desetinném místě odečteme dvojku, na 27. místě dvojku přičteme, na 44. místě odečteme jedničku, atd. (viz vztah (17)).

5. Numerický výpočet součtu řady

Pomocí techniky vyložené v předchozí kapitole bychom mohli numericky počítat součty některých řad. Ukažme postup na řadě $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}$ a pokusme se o numerický výpočet jejího součtu (tím – jak víme – je číslo π).

Řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1}$$

konverguje k číslu π velmi pomalu. Sečteme-li například prvních 20 členů této řady, tzn.

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots - \frac{4}{39},$$

dostaneme výsledek $s_{20} = 3,091\,623\,806\,667\dots$, který dává velmi špatnou aproximaci čísla π (chyba je už na prvním desetinném místě).

Použijeme-li však námi odvozenou přibližnou rovnost (16) přepsanou do tvaru

$$\pi \doteq t_n + r_n$$

a přihlédneme-li k (15), dostaneme dosazením $n = 10$ (nezapomeňme, že $t_{10} = s_{20}$, viz (13))

$$\begin{aligned} \pi &\doteq \underbrace{\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots - \frac{4}{39}}_{=s_{20}=t_{10}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 10} - \frac{1}{32 \cdot 10^3} + \frac{5}{512 \cdot 10^5} - \frac{61}{8192 \cdot 10^7}}_{=r_{10}} = \\ &= 3,141\,592\,653\,579\dots, \end{aligned}$$

což je výsledek přesný dokonce na 10 desetinných míst. Vidíme tedy, že přidáním pouze 4 poměrně jednoduchých sčítanců jsme zásadním způsobem zlepšili přesnost aproximace čísla π .

Výše popsanou techniku bychom mohli úspěšně použít pro numerický výpočet součtu některých řad, u kterých tento součet neumíme analyticky vyjádřit, například $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2}$, atd.

Pro zajímavost ukažme, jak by výpočet dopadl, pokud bychom chtěli numericky počítat součet $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$. Všimněme si, že se jedná o hodnotu Riemannovy zeta funkce v bodě 3, tj. $\zeta(3)$, kterou (jak už bylo řečeno) neumíme vypočítat analyticky. Technikou, která byla vyložena v kapitole 4, bychom nyní mohli ukázat následující analogii věty 3.

Věta 4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3} + \omega_n - \frac{3}{20n^{10}} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3} + \omega_n, \quad (18)$$

kde

$$\omega_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + \frac{1}{12n^8}.$$

Zvolíme-li například $n = 100$, dostaneme

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i^3} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 100^2} - \frac{1}{2 \cdot 100^3} + \frac{1}{4 \cdot 100^4} - \frac{1}{12 \cdot 100^6} + \frac{1}{12 \cdot 100^8}}_{=\omega_{100}} = \\ &= 1,202\,056\,903\,159\,594\,285\,401 \dots \end{aligned}$$

Z nerovností (18) navíc plyne, že přesná hodnota součtu řady $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$ je menší, než je hodnota vypočtená, a že rozdíl mezi vypočtenou aproximací a přesnou hodnotou je menší než

$$\frac{3}{20n^{10}} = \frac{3}{20 \cdot 100^{10}} = 1,5 \cdot 10^{-21}.$$

6. Závěr

Cílem tohoto článku bylo objasnit zajímavé chování částečných součtů řady ($\clubsuit$). Tyto výsledky již byly dříve publikovány jinými autory v článku [1], kde se předpokládá (mimo jiné) znalost tzv. Eulerových čísel E_i , která se objevují v rozvoji

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{E_{2i} x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{(-1)x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{(-61)x^6}{6!} + \frac{1\,385x^8}{8!} - \dots$$

jako koeficienty v čitatelích jednotlivých zlomků. Jedná se o čísla 1, -1, 5, -61, 1 385, atd. Přesně tato čísla se objevila i v našich výpočtech (viz například vztahy (15) a (14)).

Rozdíl je v tom, že my jsme nepotřebovali žádný speciální matematický aparát. Stačilo znát něco málo o limitách posloupností včetně Stolzovy věty.

V již zmíněném článku [1] jsou analyzovány i jiné známé řady, které vykazují podobně zajímavé chování. Konkrétně jde o řadu $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ (součet $\frac{\pi^2}{6}$) a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ (součet $\ln 2$).

Poznamenejme, že obě výše uvedené řady (ale i spoustu dalších) bychom také mohli zkoumat metodou založenou na Stolzově větě popsanou v našem článku.

I když jsme v článku popsali známé výsledky, domníváme se, že díky jednoduchému matematickému aparátu, který jsme používali, se tyto výsledky stanou přístupnější širšímu matematickému publiku (například i studentům bakalářského studia).

L i t e r a t u r a

- [1] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B., DILCHER, K.: *Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions*. Amer. Math. Monthly 96 (1989), 681–687.
- [2] DOŠLÁ, Z., NOVÁK, V.: *Nekonečné řady*. Masarykova univerzita, 1998.
- [3] CHOUDARY, A. D. R., NICULESCU, C. P.: *Real analysis on intervals*. Springer, 2014.
- [4] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II*. 3. vydání, Academia, 1984.
- [5] Wikipedia: Leibniz formula for π [online]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80
- [6] ZIEGLER, G. M.: *Matematika vám to spočítá: Příběhy královny věd*. Překlad z německého originálu. Knižní klub, 2011.