

Libuše Samková; Lukáš Vízek

O konceptuálním porozumění v matematice

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 2, 83–100

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153012>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

O KONCEPTUÁLNÍM POROZUMĚNÍ V MATEMATICE

LIBUŠE SAMKOVÁ, LUKÁŠ VÍZEK

V tomto příspěvku se budeme věnovat konceptuálnímu porozumění žáků v matematice. Vycházíme přitom z našich nedávných empirických studií zaměřených na porozumění geometrickým konstrukcím, ve kterých jsme analyzovali řešení celkem 116 žáků a budoucích učitelů druhého stupně základní školy a střední školy (Vízek et al., 2024, 2025)¹. Pro tato šetření jsme připravili sady úloh kombinující dynamické geometrické modely, otevřené a uzavřené otázky a pracovní listy pro žáky. Konkrétní podoba modelů, otázek a pracovních listů vyplynula přímo z vyučovacích hodin matematiky, které druhý autor tohoto příspěvku během několika let realizoval na druhém stupni základní školy, tedy z praktické činnosti s žáky. Tyto vyučovací hodiny byly částečně představeny v konferenčních příspěvcích (Vízek, 2023; Vízek & Samková, 2024).

Účelem tohoto textu je představit naše obecnější zjištění vycházející ze studií (Vízek et al., 2024, 2025). Toto zjištění se týká nového způsobu posuzování kvality konceptuálního porozumění žáků, který je možné využít v klasické rovině geometrii na druhém stupni základní školy a na střední škole. V následujících odstavcích nejprve v teoretické rovině popisujeme konceptuální porozumění a jeho různé kvalitativní úrovně. Praktickou podobu konceptuálního porozumění pak představujeme na eukleidovské konstrukci obdélníku, metodickým způsobem rozebíráme jistou matematickou úlohu na této konstrukci založenou a ukazujeme různé způsoby jejího zadání žákům. Možná žakovská řešení této

¹Vročení neodpovídá skutečnému pořadí realizace výzkumných šetření; studie (Vízek et al., 2024) se uskutečnila později a přímo navazovala na výsledky studie (Vízek et al., 2025).

úlohy nám pak slouží jako ilustrace jednotlivých úrovní konceptuálního porozumění a jako základ pro určitý návod, jak různá řešení posuzovat. Závěrem uvažujeme o modifikaci zvolené úlohy a o způsobu, jak konceptuální porozumění žáků rozvíjet.

Zvolili jsme úlohu, která je reprezentativní pro naši sadu geometrických úloh ze studie (Vízek et al., 2024): úloha založená na eukleidovské konstrukci obdélníku byla přímo součástí této sady a ostatní úlohy v sadě se analogickým způsobem vztahovaly k eukleidovským konstrukcím dalších čtyřúhelníků, navíc všechny úlohy v sadě byly založeny na vlastnostech úhlopříček. Studie měla celkem 96 respondentů, a tak jsme napříč úlohami byli schopni na základě autentických úryvků odvodit a ilustrovat všechny úrovně konceptuálního porozumění. Pro čtenáře však tato forma ilustrace byla poněkud nepřehledná. V tomto příspěvku jsme tak k ilustraci různých projevů konceptuálního porozumění přistoupili jinak. Volba reprezentativní úlohy nám totiž umožňuje ilustrovat celé spektrum konceptuálního porozumění na jediné úloze. Tam, kde je to možné, využíváme jako názorné ukázky autentická žákovská řešení této reprezentativní úlohy. V ostatních případech pak nabízíme žákovská řešení, jež jsou sice hypotetická, ale vznikla z autentických žákovských řešení ostatních úloh v sadě na základě analogie.

Různé podoby konceptuálního porozumění

Charakter a kvalitu konceptuálního porozumění žáků matematice popisují různé teoretické rámce. V našem příspěvku vycházíme ze způsobu, kterým konceptuální porozumění, respektive konceptuální znalosti, chápou Star a Stylianides (2013). Podle nich jsou konceptuální znalosti znalostmi různých pojmů a vztahů mezi nimi, přičemž kvalitu konceptuálních znalostí neurčuje množství pojmů, které žák zná, ale míra jejich vzájemné provázanosti. Rozvoje konceptuálního porozumění (zlepšování jeho kvality) je pak dosahováno vytvářením nových propojení již známých pojmů, nebo připojením dosud neznámého pojmu.

Konkrétní úrovně konceptuálního porozumění v matematice je pak možné specifikovat s využitím tří dimenzí konceptuálních znalostí (Vízek et al., 2024):

- *znalosti klasifikací* představují spíše izolované povědomí o jednotlivých matematických objektech a jejich vlastnostech;
- *znalosti struktur* představují schopnost vnímat uspořádání matematických objektů dané jejich vlastnostmi a na základě takového uspořádání objekty propojovat, porovnávat a třídit;
- *znalosti principů* představují schopnost rozpoznat příležitost pro aplikace obecných schémat, pravidel a zákonitostí a odvodňovat je.

Znalosti klasifikací jsou typické na začátku učení se novému tématu. V aritmetice k nim patří například porozumění operaci sčítání jako přidávání a operaci odčítání jako ubírání, ale nevnímání jejich různých kontextových interpretací, dalších možných významů (podrobněji viz např. Vondrová, 2019, s. 63) a vzájemného inverzního vztahu. Žák s takovým typem znalostí zvládá například řešit jednoduché aditivní dynamické slovní úlohy, u kterých je operace potřebná k vyřešení úlohy naznačena přímo v zadání úlohy formulací odkazující na přidávání nebo ubírání (tzv. signál), ale může být neúspěšný při řešení aditivních dynamických úloh bez signálu či s antisignálem, při řešení úloh statických, úloh na porovnávání rozdílem apod. Izolované povědomí o sčítání jako přidávání a odčítání jako ubírání tak, díky chybějícím vazbám na jiné kontexty a významy, může vést žáka k povrchovému strategii řešení a v konečném důsledku k neporozumění aditivním úlohám (Vondrová, 2019, s. 64).

Jsou-li znalosti klasifikací doprovázeny znalostmi struktur, znamená to, že žák vazby na různé kontexty a/nebo významy vnímá a využívá je úspěšně při řešení aditivních úloh. K tomu může někdy dojít i přesto, že si žák není vědom inverzního vztahu mezi operacemi sčítání a odčítání. Tento inverzní vztah je možné v prostředí slovních úloh považovat za obecný princip, a tak je jeho spontánní využívání žákem při řešení aditivních slovních úloh možné zařadit pod znalosti principů.

Jednotlivé dimenze konceptuálních znalostí se na sebe postupně nabalují během vzdělávacího procesu: bez znalostí klasifikací není možné dosáhnout na znalosti struktur, bez znalostí struktur na znalosti principů. Systém dimenzí tak učitelům nabízí jednoduchý nástroj, díky kterému se mohou lépe orientovat v porozumění žáků matematice, zjišťovat aktuální stav žákovských znalostí a identifikovat možné cesty pro zlepšování jejich kvality.

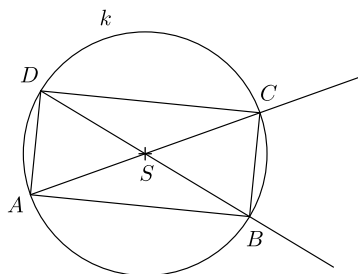
Vymezení jednotlivých dimenzí konceptuálních znalostí je nezávislé na konkrétní oblasti, které se znalosti týkají. V následujícím textu se budeme věnovat rozpracování dimenzí pro oblast geometrie, konkrétně pro eukleidovské geometrické konstrukce. Toto rozpracování vzniklo na základě naší nedávné empirické studie (Vízek et al., 2024), která se prvoplánově věnovala informacím o kvalitě konceptuálního porozumění žáků, jež je možné získat při práci žáků v prostředí dynamické geometrie. Výsledné rozpracování různých podob konceptuálního porozumění je však platné nejen pro dynamickou geometrii, ale i pro tu klasickou. Celou záležitost tak představíme na úloze založené na jedné klasické rovinné konstrukci, kterou je možné zařadit do výuky geometrie na 2. stupni základní školy.

V celém příspěvku geometrické útvary uvažujeme v souladu s jejich hierarchickou klasifikací (de Villiers, 1994), ve které například obdélník může mít sousední strany stejně dlouhé, tedy čtverec je považován za speciální případ obdélníku (srov. Pomykalová, 2008, s. 48). V celém textu tedy hovoříme o obdélníku ve smyslu „pravoúhelníku“, čtyřúhelníku s pravými vnitřními úhly. Pojem pravoúhelník je však ve školské praxi používán zřídka, proto užíváme pojem obdélník a chápeme jej v tomto širším smyslu.

Konceptuální porozumění eukleidovské konstrukci obdélníku

Vyjdeme z konstrukce obdélníku na obrázku 1 vlevo, která je žákům představena prostřednictvím textu na obrázku 1 vpravo. Podobné konstrukce se žáci na základní škole učí rýsovat, obrázek 1 tak může být záznamem žákovského řešení konstrukční úlohy. My

však budeme pracovat s hotovou konstrukcí a budeme se zajímat o to, jak se v ní žáci vyznaží, jestli a jak ji dokážou „čist“, jaké konceptuální porozumění se může při takovém čtení uplatnit. Zvolili jsme konstrukci, ve které je obdélník sestrojen nepřímou, tedy nejsou dány délky jeho stran ani nejsou konstruovány kolmice, na kterých by ležely sousední strany. Díky tomu je k odvození vlastností stran a vnitřních úhlů sestrojeného čtyřúhelníku nutno vždy vyjít z vlastností objektů, jež tvoří konstrukci (kružnice k , její poloměry a průměry).



Na obrázku je konstrukce čtyřúhelníku, při které se využila kružnice k se středem S a polopřímky AS , DS .

Který čtyřúhelník je v konstrukci přítomen?

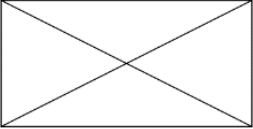
Z jakých vlastností konstrukce to plyne?

Obr. 1: Zadání úlohy založené na konstrukci obdélníku

V následujícím textu představíme ilustrační příklady různých řešení úlohy z obrázku 1, uspořádané do tabulek podle odpovídajících úrovní konceptuálního porozumění. Jednotlivé příklady jsou v tabulkách uvedeny v seznámech s odrážkami. Nad nimi je vždy obrázek, jež ukazuje, se kterými částmi konstrukce daný žák ve své úvaze pracuje.

Projevy nejnižší úrovně konceptuálních znalostí (tj. znalostí klasifikací) mohou mít v prostředí úlohy z obrázku 1 různou podobu: pojmenování geometrických objektů a jejich vlastností pouze na základě vizuální podoby, reprodukce textu definic a vět apod. (viz tab. 1). Všechny mají společné to, že jsou izolovanými poznatky, které nejsou nikterak propojené s vlastnostmi objektů, jež tvoří konstrukci (nejsou z nich logicky odvozené). V našem případě odpovědi vypadají stejně, jako kdyby na obrázku 1 vpravo byly pouze otázky a vlevo byl narysován pouze obrys obdélníku, případně obrys obdélníku s vyznačenými úhlopříčkami.

Tab. 1: Příklady odpovídající znalostem klasifikací

Popis	Příklad
Pojmenování geometrických objektů a jejich vlastností pouze na základě vizuální podoby.	 • Je to obdélník. • Jeho strany jsou kolmé. • Protější strany jsou rovnoběžné.
Reprodukce textů definic a jejich ověření na základě vizuální podoby.	 • Je to čtyřúhelník, který má všechny úhly pravé, takže obdélník. • Je to obdélník, protože má protější strany stejně dlouhé a všechny úhly pravé.
Reprodukce textu vět a jejich ověření na základě vizuální podoby.	 • Úhlopříčky obdélníku jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí.

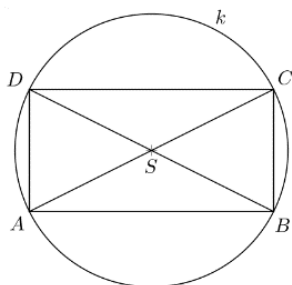
Znalosti struktur jsou v případě úloh založených na geometrických konstrukcích tvarů dvojího typu: znalosti struktury tvaru (tedy rozpoznání různých částí tvaru, určení jejich vzájemných vztahů a jejich vztahu k tvaru) a znalosti struktury konstrukce (tedy rozpoznání různých částí konstrukce, určení jejich vzájemných vztahů a jejich vztahu k tvaru), viz tabulka 2. Znalosti struktury tvaru jsou stále do jisté míry izolované, neboť nejsou logicky odvozené z vlastností objektů, jež tvoří konstrukci. V našem případě vypadají jako odvozené z obrázku obdélníku s vyznačenými úhlopříčkami a pojmenovanými body. Co je však cenné, je rozklad tvaru na části a jejich pojmenování, uvažování o možných vzájemných vztazích mezi těmito částmi. V tomto smyslu jsou znalosti struktury tvaru předstupněm znalostí struktury konstrukce, ve kterých jsou do úvah zahrnuty navíc i objekty, které nejsou částmi tvaru.

Tab. 2: Příklady odpovídající znalostem struktur

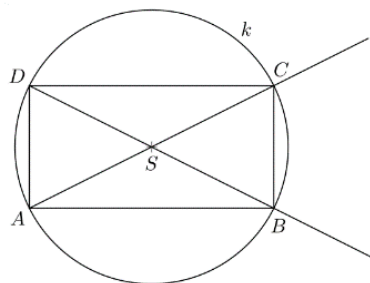
Struktura tvaru: Rozpoznání různých částí tvaru, určení jejich vzájemných vztahů a jejich vztahu k tvaru.	• AC a BD jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ a S je jejich průsečík, úhlopříčky jsou stejně dlouhé, S je jejich středem, tedy úhlopříčky se navzájem půlí, $ABCD$ je čtyřúhelník s úhlopříčkami, které jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí, to znamená, že je to obdélník.
---	---

Struktura konstrukce:

Rozpoznání různých částí konstrukce, určení jejich vzájemných vztahů a jejich vztahu k tvaru.



- AC , BD jsou průměry kružnice k a bod S je jejím středem. Tedy $ABCD$ je obdélníkem, protože AC , BD jsou jeho stejně dlouhé úhlopříčky, které se půlí v bodě S .

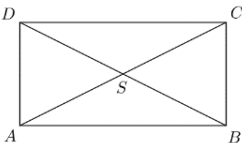
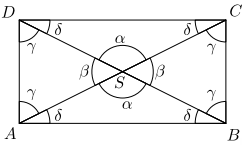


- AS , BS , CS , DS jsou poloměry kružnice k , proto jsou stejně dlouhé. Navíc CS leží na polopřímce AS , BS leží na polopřímce DS . To znamená, že AC a BD jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ a S je jejich střed. $ABCD$ je tedy obdélník, protože má stejně dlouhé úhlopříčky, které se půlí.

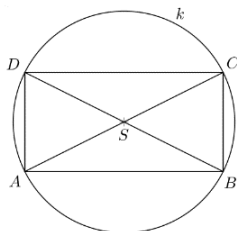
Znalosti principů se mohou vztahovat k obecným tvrzením týkajícím se struktury tvaru, nebo struktury konstrukce. Obecná tvrzení mohou být různého charakteru: vlastnosti geometrických

tvarů (např. součet úhlů v trojúhelníku), vlastnosti geometrických zobrazení (např. zachování délky ve středové souměrnosti), pojmenované věty (např. věty o shodnosti trojúhelníků, Thalétova věta). Různé příklady jsou uvedeny v tabulce 3. Dvě ukázky s úhly α , β , γ , δ navíc ilustrují, v jakém smyslu mohou být znalosti struktury tvaru předstupněm znalostí struktury konstrukce: v prvním případě je shodnost trojúhelníků ověřena pouze na základě vizuální informace, ve druhém případě na základě jejich vztahu ke kružnici k .

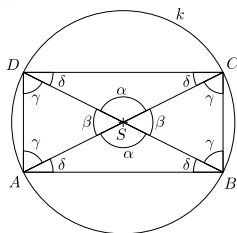
Tab. 3: Příklady odpovídající znalostem principů

Uplatnění obecných tvrzení o struktuře tvaru.	 Čtyřúhelník je středově souměrný podle průsečíku svých úhlopříček, proto jsou jeho úhlopříčky stejně dlouhé a půlí se. Je to tedy obdélník.
	 ABS a CDS jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky a BCS a DAS také (podle věty <i>sus</i>). Pro vyznačené úhly α, β, γ, δ platí $\alpha + \beta = 180^\circ$, $2\gamma + \beta = 180^\circ$, $2\delta + \alpha = 180^\circ$. Tedy $2\gamma + 2\delta + \alpha + \beta = 360^\circ$ a proto $\gamma + \delta = 90^\circ$. Čtyřúhelník $ABCD$ má pravé úhly, tedy je to obdélník.

Uplatnění
obecných tvrzení
o struktuře
konstrukce.



- Kružnice k je Thalétovou kružnicí pro trojúhelník ABC , proto je úhel u vrcholu B pravý. Podobně to platí pro trojúhelníky BCD , CDA , DAB a úhly u vrcholů C , D , A . Čtyřúhelník $ABCD$ má tedy všechny úhly pravé, je to obdélník.



- Strany AS , BS , CS , DS jsou stejně dlouhé, protože jsou poloměry stejné kružnice. Úhly ASB a CSD jsou vrcholové, tedy stejně velké. Trojúhelníky ABS a CDS jsou tedy shodné podle věty *sus*. Podobně pro trojúhelníky BCS a DAS .

Pro vyznačené úhly α , β , γ , δ platí $\alpha + \beta = 180^\circ$, $2\gamma + \beta = 180^\circ$, $2\delta + \alpha = 180^\circ$. Tedy $2\gamma + 2\delta + \alpha + \beta = 360^\circ$ a proto $\gamma + \delta = 90^\circ$. Čtyřúhelník $ABCD$ má pravé úhly, tedy je to obdélník.

V žákovských odpovědích na druhou otázku z obrázku 1 by se mohly objevit i další vlastnosti obdélníku, které nejsou v tabulkách uvedené. Například, že protější strany jsou rovnoběžné. V našich datech jsme je však nenašli.

Ukázky v tabulkách se vztahují k úloze zadané dvojicí otázek „Který čtyřúhelník je v konstrukci přítomen? Z jakých vlastností konstrukce to plyne?“. Různé odpovědi zde uvedené je možné z pohledu školské geometrie považovat všechny za řešení úlohy, která jsou správná, ale různé obtížná; obtížnost je dána typem konceptuálních znalostí, jež jsou potřeba pro dané řešení (pouze znalosti klasifikací u řešení uvedených v tabulce 1, znalosti klasifikací spolu se znalostmi struktur v tabulce 2, všechny tři typy znalostí v tabulce 1). Úlohu je tak možné považovat za otevřenou úlohu (Samková, 2020), která je polyvalentní (Samková, 2019).

Obtížnost úlohy jako takové je možné změnit zpřesněním druhé otázky, například na „Odůvodni, proč jsou sousední strany čtyřúhelníku kolmé. Využij Thalétovu větu.“ Pracuje-li žák s Thalétovou větou ve znění „Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé“ (srov. Odvárko & Kadleček, 2000, s. 17–19), tak pro správné vyřešení této nové úlohy bude potřebovat znalosti struktury konstrukce (vztah kružnice k úhlům u vrcholů čtyřúhelníku). Argumentovat může podobně jako na předposledním řádku tabulky 3, jen v tomto případě taková úvaha nebude projevem znalostí principů, protože žák nemusel objevovat možnost použití Thalétovy věty. Stačilo mu, aby jen věděl, jak věta zní, a ověřil ji na základě vizuální podoby (což vše patří pod znalosti klasifikací). Kdyby zadání úlohy znělo „Odůvodni, proč jsou sousední strany čtyřúhelníku kolmé“, bylo by případné využití Thalétovy věty nápadem žáka, a tedy projevem znalostí principů (znám, že takové obecné tvrzení existuje, ověřím, že ho lze využít, a pak ho využiji).

Zpřesněním druhé otázky je také možné nasměrovat žáky k možnosti zapojit do odůvodnění konceptuální znalosti z vyšší dimenze. Například pro žáka, který doposud využíval pouze znalosti klasifikací, by pokyn „Odůvodni, proč jsou úhlopříčky čtyř-

úhelníku stejně dlouhé. Využij v odůvodnění kružnici k .“ mohl otevřít cestu k využití znalostí struktury konstrukce.

Jak konceptuální porozumění zjišťovat

Přílišná otevřenost dvojice otázek „Který čtyřúhelník je v konstrukci přítomen? Z jakých vlastností konstrukce to plyne?“ může někdy způsobit, že žák odpoví na úrovni znalostí klasifikací, přestože by byl schopen poskytnout i odpověď využívající znalosti struktur nebo principů. Abychom takovým případům předešli, připravili jsme místo této dvojice otázek celý dotazník (viz obr. 2).

Název čtyřúhelníku	
Vlevo označte křížkem vlastnosti, na základě kterých jste čtyřúhelník poznali, a vpravo své rozhodnutí zdůvodněte.	
☐ Úhlopříčky se navzájem půlí	Zdůvodnění: Konstrukce má tuto vlastnost protože ...
☐ Úhlopříčky mají stejnou délku	
☐ Úhlopříčky jsou na sebe kolmé	
☐ Pouze jedna úhlopříčka půlí druhou	
☐ Jiná vlastnost	Pokud jste čtyřúhelník poznali podle jiné vlastnosti, uveďte ji a zdůvodněte ji:

Obr. 2: Dotazník ke konstrukci z obrázku 1 vlevo

Na jednotlivých řádcích dotazníku jsou vyjmenovány různé vlastnosti, které by čtyřúhelník na obrázku 1 mohl mít (ale nemusí), a na žákovi je, aby vybral ty správné, podle kterých je možné tvar identifikovat, a odůvodnil je. Na posledním řádku je

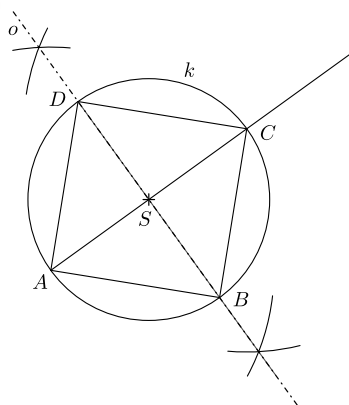
pak prostor pro případ, kdy žák sám objevil nějakou další identifikující vlastnost v seznamu neuvedenou. Jelikož konstrukce na obrázku 1 vznikla jako eukleidovská konstrukce založená na vlastnostech úhlopříček, jsou v seznamu posuzovaných vlastností uvedeny právě vlastnosti úhlopříček. Tento dotazník zkoumá konceptuální znalosti žáka z různých perspektiv, neboť k odůvodnění každé jednotlivé vlastnosti úhlopříček jsou potřeba jiné znalosti.

Jak ukázaly výsledky naší studie (Vízek et al., 2024), takové provázání dotazníku s konstrukcí je výhodné pro žáka i učitele. Žákovi může pomoci nasměrovat myšlenky směrem ke konceptuálním úvahám založeným na znalostech struktury konstrukce a učitel zviditelní projevy žákovského uvažování založeného pouze na vizuální informaci a znalostech klasifikace. Porovnání datových úryvků ze studií (Vízek et al., 2025) a (Vízek et al., 2024) zároveň zviditelňuje rozdíl mezi otázkami z obrázku 1 (byly použity ve studii s vročením 2025) a dotazníkem z obrázku 2 (použit ve studii z roku 2024). Dotazník nám přinesl více informací o konceptuálním porozumění žáků, navíc tyto informace byly lépe identifikovatelné.

Jak konceptuální porozumění rozvíjet

Protože jsou konceptuální znalosti znalostmi souvislostí, je možné konceptuální porozumění rozvíjet prostřednictvím systematického řešení navzájem souvisejících úloh se zvyšující se obtížností. Toho je možné dosáhnout nejen změnami formulace otázek, ale také přidáváním nových objektů do konstrukce. Takto je například možné do konstrukce z obrázku 1 přidat osu úsečky AC a bod D na ni umístit, což čtyřúhelník v konstrukci změní na čtverec (viz obr. 3 vlevo).

Při řešení úlohy zadané na obrázku 3 pak žák může využít úvahy z úlohy s obdélníkem, na jejichž základě například odvodí, že čtyřúhelník má všechny úhly pravé. Zbývá pak jen odůvodnit, že sousední strany jsou stejně dlouhé, což plyne například ze shodnosti trojúhelníků CDS a DAS , která je důsledkem toho, že body D a S leží na ose úsečky AC . Konstrukce z obrázku 1 a obrázku 3 se tak prováží a žák získává zkušenosti, jež bude později



Na obrázku je konstrukce čtyřúhelníku, při které se využila kružnice k se středem S , polopřímka AS a přímka o , která je osou úsečky AC .

Který čtyřúhelník je v konstrukci přítomen?

Z jakých vlastností konstrukce to plyne?

Obr. 3: Zadání úlohy založené na konstrukci čtverce

moci využít při objevování a zkoumání obecnějších vztahů, tedy při budování a uplatňování znalostí principů.

Zároveň je však možné úlohu z obrázku 3 vyřešit zcela nezávisle na úloze z obrázku 1, například úvahou využívající poznatek, že úhlopříčky AC , BD jsou na sebe kolmé (díky tomu, že BD leží na ose úsečky AC), a větu, že čtyřúhelník se stejně dlouhými kolmými úhlopříčkami, které se navzájem půlí, je čtverec. S konstrukcí z obrázku 3 tentokrát pracujeme izolovaně, ale využíváme jiné vztahy mezi jednotlivými objekty v konstrukci, tedy posilují se znalosti struktur. Podobně lze tyto znalosti rozvíjet při využití jiných geometrických konstrukcí, jak je například naznačeno v dřívější studii věnované různým útvarům ukrytým v konstrukci tvořené sedmi kružnicemi stejného poloměru (Vízek, 2020). Pro získání detailnějších odpovědí žáků na úlohu z obrázku 3 je opět možné využít dotazník z obrázku 2. Není třeba ho nikterak měnit.

Závěrem

V tomto příspěvku jsme se věnovali konceptuálnímu porozumění v matematice. Vymezili jsme tři jeho různé úrovně (znalosti klasifikací, znalosti struktur a znalosti principů) odpovídající třem různým kvalitám propojení matematických konceptů. Znalosti klasifikací (které odpovídají nejslabšímu, téměř žádnému propojení)

vyplývají ze začátku vzdělávání se jisté matematické oblasti, znalosti struktur (které mapují uspořádání konceptů) vyplývají z jeho průběhu a znalosti principů (které odpovídají nejsilnějšímu, obecnému propojení) jsou jeho vyústěním. Tedy každá z těchto úrovní má nezastupitelné místo v procesu učení se – nižší úrovně jsou nutným předpokladem pro dosažení úrovní vyšších.

Problematicku jsme rozpracovali pro oblast geometrie, konkrétně pro eukleidovské geometrické konstrukce. Na konkrétní úloze vhodné pro výuku geometrie na druhém stupni základní školy (obr.k 1) jsme představili typické projevy různých úrovní konceptuálního porozumění (tab. 1, tab. 2, tab. 3) a podali náměty, jak je možné míru takového porozumění zjišťovat a jak ho dále rozvíjet. Pro tento účel jsme připravili nový design učebních úloh, který vede žáky ke „čtení“ již hotových geometrických konstrukcí.

Různé úrovně konceptuálního porozumění jsme představili jako odpovědi na dvojici otázek: „Který čtyřúhelník je v konstrukci přítomen? Z jakých vlastností konstrukce to plyne?“ předloženou žákovi spolu s hotovou konstrukcí obdélníku vepsaného do kružnice. Z našich předchozích studií (Vízek et al., 2024, 2025) plyne, že žáci na podobné otázky reagují širokým spektrem znalostí. Ovšem při použití takto otevřených otázek v praxi může být pro učitele velmi obtížné se v žakovských odpovědích vyznat; pro žáka pak může být obtížné odhadnout, jak podrobná odpověď je od něj očekávána. Abychom tomu předešli, nabídli jsme pro inspiraci pracovní arch obsahující otevřené i uzavřené otázky (obr. 2), který se nám osvědčil pro přesnější posouzení kvality žakovského porozumění. Takový dotazník může posloužit pro poskytování konstruktivní zpětné vazby a tím učiteli pomoci i při rozvoji žakovského porozumění. K rozvoji konceptuálního porozumění lze rovněž přispět řešením na sebe navazujících úloh, což jsme naznačili na příkladu konstrukce čtverce (obr. 3), které by úloha s konstrukcí obdélníku předcházela.

Naším příspěvkem nabízíme nový konceptuální pohled na konstrukční úlohy, které jsou v českém vzdělávacím prostředí často chápány jen jako procedury k zapamatování využívající znalosti definic (Vondrová & Žalská, 2013, s. 107–110), tedy jako úlohy,

u kterých je uplatňováno konceptuální porozumění pouze na úrovni znalostí klasifikací. Zaměřením pozornosti na již hotové konstrukce, na jednotlivé objekty v nich obsažené, jejich vlastnosti a jejich vzájemné vztahy se otevírá prostor pro uplatňování a rozvíjení vyšších úrovní konceptuálního porozumění, jako jsou znalosti struktury tvaru, znalosti struktury konstrukce a znalosti obecných principů vztahujících se k těmto strukturám.

Literatura

- [1] de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18. <https://www.jstor.org/stable/40248098>
- [2] Odvárko, O., & Kadleček, J. (2000). *Matematika pro 8. ročník základní školy: Kruh, kružnice, válec. Konstrukční úlohy*. Prometheus.
- [3] Pomykalová, E. (2008). *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Prometheus.
- [4] Samková, L. (2019). Polyvalentní úlohy v matematice. *Učitel matematiky*, 27(4), 244–251.
- [5] Samková, L. (2020). Otevřené a polyvalentní úlohy aneb „Máme tu někoho, kdo to řešil jinak?“. In B. Bastl & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2020* (s. 21–30). Vydavatelský servis.
- [6] Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169–181. <https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784828>
- [7] Vízek, L. (2020). Sedm kružnic aneb O objevování útvarů v obrazci. In B. Bastl & M. Lávička (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2020* (s. 107–114). Vydavatelský servis.

- [8] Vízek, L. (2023). Kritické a tvořivé využívání dynamické geometrie v matematice základní školy. *South Bohemia Mathematical Letters*, 31(1), 16–25.
- [9] Vízek, L., & Samková, L. (2024). Flexibilní deltoid. In B. Bastl, M. Bizzarri, & G. Holubová (Eds.), *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2024* (s. 181–186). Západočeská univerzita v Plzni.
- [10] Vízek, L., Samková, L., & Star, J. R. (2024). Assessing the quality of conceptual knowledge through dynamic constructions. *Educational Studies in Mathematics*, 117(2), 167–191. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10349-x>
- [11] Vízek, L., Samková, L., & Star, J. R. (2025). Investigating how lower secondary school students reason about quadrilaterals emerging in dynamic constructions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(3), 495–514. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2255184>
- [12] Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- [13] Vondrová, N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl & N. Vondrová (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Abstract

The paper describes different levels of students' conceptual understanding in mathematics (knowledge of classifications, knowledge of structures, and knowledge of principles) and elaborates on them for the field of geometry, specifically for Euclidean geometric constructions. For this purpose, we present a new design of learning tasks that lead students to “read” already completed constructions. With an illustrative task suitable for geometry education in lower secondary schools, we present typical displays of different

levels of students' conceptual understanding and provide mathematics teachers with suggestions of how such conceptual understanding can be assessed and further developed.

Libuše Samková
Pedagogická fakulta
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
e-mail: lsamkova@pf.jcu.cz

Lukáš Vízek
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: lukas.vizek@uhk.cz