

Tomáš Fabián

Což takhle dát si fraktál? – 2. část

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 2, 101–113

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153013>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

COŽ TAKHLE DÁT SI FRAKTÁL? – 2. ČÁST

TOMÁŠ FABIÁN

Tento článek navazuje na předchozí část publikovanou v minulém čísle, ve které jsme se podívali na definici fraktálu a na konstrukce fraktálů v GeoGebře.

Fraktály v PowerPointu

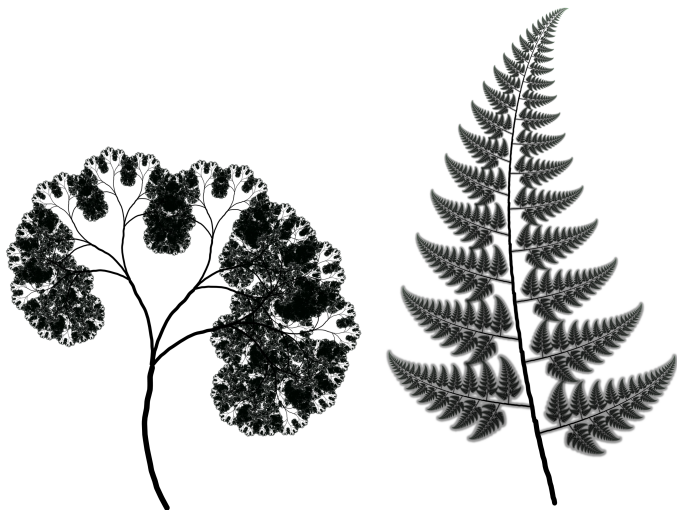
Neočekávaně dobře využitelným nástrojem pro vytváření fraktálů je PowerPoint. Fraktály se v něm dají vytvářet rychle a jednoduše. PowerPoint má nástroj, který umožňuje do jednotlivých stránek prezentací vkládat náhledy na další stránky prezentace. Pro tvorbu fraktálů je důležité, že tento náhled stránky může odkazovat i přímo na stránku, na které se nachází. Díky tomu můžeme získat náhled, ve kterém se zobrazí stránka, na které bude opět zobrazení náhledu se stránkou s náhledem a tak dále a tak dále. PowerPoint skutečně potom dokola vykresluje další a další náhledy, jako když namíříme kameru na obrazovku, na které se promítá záznam této kamery.

Například Sierpińského trojúhelník můžeme vytvořit tak, že do prázdného snímku vložíme trojúhelník. Trojúhelníku nastavíme výplň tak, aby z něho zbyl jenom obrys. Poté vložíme do snímku jeho vlastní náhled (vložení/odkazy/náhled/náhled snímku). Když klikneme na vložený náhled pravým tlačítkem, zobrazí se menu. V něm zaškrtneme volbu pozadí náhledu snímku. Tím zajistíme průhlednost náhledu. Ve stejném menu ve formátu náhledu snímku nastavíme volby bez výplně a bez čáry. První z nich potřebujeme rovněž kvůli průhlednosti snímku a druhou odstraníme obrysovou čáru kolem něj. U náhledu změníme velikost tak, aby na něm zobrazený trojúhelník měl poloviční velikost oproti původnímu trojúhelníku. Potom náhled umístíme tak, aby se oba trojúhelníky překrývaly jedním rohem. Obdobně vložíme další dva

náhledy. Každý do jiného rohu velkého trojúhelníku. Tím je konstrukce hotová a o zbytek se už postará PowerPoint.

Jak je vidět, konstrukce je velice rychlá a jednoduchá. Je tu jedna nevýhoda. PowerPoint není geometrický program. Může být a často je v něm pracnější nastavit velikost objektu, aby byl přesně polovinou velikosti jiného, aby seděl přesně roh na jiný roh, aby hrana lícovala s jinou hranou a tak dále. Čas strávený konstrukcí pak odráží to, jak přesný chceme mít konečný výsledek. Když nám stačí přesnost jen přibližná, konstrukce skutečně mnoho práce nedá.

Tato nevýhoda zcela odpadá, pokud se rozhodneme vytvářet fraktální objekty, které nejsou striktně geometrické. PowerPoint umožňuje vytvářet i objekty, jako jsou různé fraktální stromy, kapradí a podobně. U těchto fraktálů nejsou poměry zmenšení, velikosti rotací nebo přesná poloha snímků pevně dány a závisí čistě na fantazii naší a našich žáků. Na obrázku 1 můžete vidět náčrty stromu a kapradí. V obou případech byly vytvořeny v PowerPointu vložením pouhých tří náhledů stránek.



Obr. 1: Obrázky fraktálního stromu a kapradí vytvořené v PowerPointu

Chaos game

Dalším překvapivým způsobem, jak je možné generovat fraktály, je metoda chaos game, kterou v osmdesátých letech minulého století objevil Michael Barnsley. Do konstrukce touto metodou vstupuje náhoda a ze zdánlivě náhodně rozmístěných bodů začne po chvíli vystupovat fraktální struktura. Fraktál je v tomto případě atraktorem náhodného rozmísťování bodů podle daných pravidel (Peitgen et al., 1992a).

Pojďme rovnou přistoupit ke konstrukci. K ní budeme potřebovat papír, tužku, pravítko a hrací kostku. Pokud nemáte po ruce kostku, na mobilní telefon si můžete nainstalovat generátor náhodných čísel. Nejdříve na papír narýsujeme tři cílové body. Body by měly být vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Konstrukce bude probíhat uvnitř tohoto trojúhelníku, nebojte se proto využít plochu celého papíru. Jeden bod pojmenujte 12, druhý 34, třetí 56. Zvolte čtvrtý náhodný bod uvnitř trojúhelníku, toto bude startovní bod. Hodte hrací kostkou. Když padne 1 nebo 2, odměřte polovinu vzdálenosti mezi startovním bodem a cílovým bodem 12, když padne 3 nebo 4, tak mezi startovním bodem a bodem 34, obdobně, když padne 5 nebo 6. V odměřené polovině vzdálenosti vyznačte nový startovní bod. Znovu hodte kostkou a opakujte proces od nového startovního bodu (Lesmoir-Gordon et al., 2006).

Tento postup je v pořádku, nicméně problémem je, že je dost pracný a trvá dlouho, než lze poznat, kam celá konstrukce směřuje. Ve *Fractals: A tool kit of dynamics activities* (Choate et al., 1999) navrhuji použít půlící pravítko. Je to pravítko, které má uprostřed nulu a stupnice běží od této nuly na obě strany. Takové pravítko si můžeme dopředu připravit a vytisknout. Ke konstrukci můžeme využít i GeoGebbru, která umí rychle sama půlit vzdálenosti. I tak je konstrukce zdlouhavá.

Poněkud jiným způsobem ke konstrukci přistupují ve *Fractals for the classroom: Strategic activities volume one* (Peitgen et al., 1993). Předem si připravíme vytištěný rovnostranný trojúhelník, ve kterém je trojúhelníková síť. Ke každé straně trojúhelníku přiléhá šestnáct malých trojúhelníčků sítě. Trojúhelník se sítí si můžeme předem připravit v GeoGebře a vytisknout. Chaos game pak

hrajeme stejným způsobem jako v předchozím případě. Rozdíl je v tom, že nyní pouze nevyznačujeme nový startovní bod, ale rovnou vybarvujeme celý trojúhelníček, ve kterém se bod nachází. To děláme s výjimkou prvních tří startovních bodů, u těch necháváme trojúhelníčky nevybarveny. Pokud se nám stane, že bod padne na rozhraní dvou trojúhelníčků a my nejsme schopni rozhodnout, do kterého z nich bod patří, necháme oba trojúhelníčky nevybarveny a pokračujeme dál. Pokud hru chceme hrát s menšími žáky nebo ji chceme urychlit, můžeme sít v trojúhelníku udělat s hrubším dělením a místo šestnácti trojúhelníčků u jedné strany použít osm.

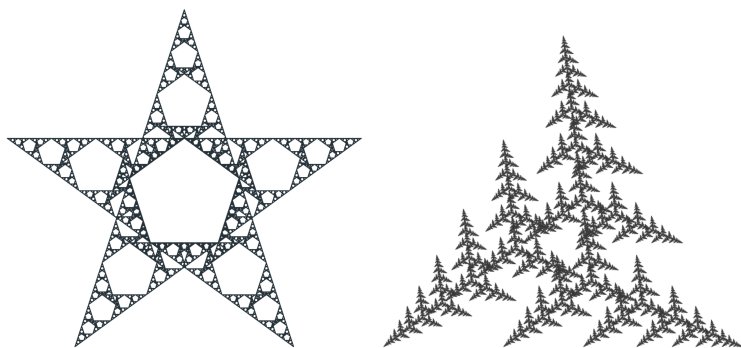
A opět několik otázek, které můžeme položit žákům:

Jaká struktura uvnitř trojúhelníku vzniká? Vysvětlete, proč tomu tak je. Proč se žádný bod kromě úplně prvního nemůže octnout ve střední části trojúhelníku? Co by se změnilo, kdybychom místo rovnostranného trojúhelníku použili pravoúhlý? Startovní bod jsme volili uvnitř trojúhelníku. Co by se dělo, kdybychom na začátku zvolili vnější bod? Když jsme vybarvovali trojúhelníčky v síti, proč jsme s vybarvováním začali až u čtvrtého startovního bodu? Jaká je pravděpodobnost, že při této konstrukci bude vybarveno předem vybrané pole po pěti, deseti, dvaceti krocích? Jaká je pravděpodobnost, že se octneme v konkrétním poli v následujícím kroku konstrukce? Záleží na tom, jestli známe svou aktuální polohu?

Když si studenti vyzkouší pracnost konstrukce a odhalí, že vzniká Sierpiňského trojúhelník (až dosud jsem se držel Peitgenovy (Peitgen et al., 1993) rady neprozrazovat předem, jak bude vypadat výsledný obrázek), můžeme jim ukázat simulaci této konstrukce ve webové aplikaci: <https://thewessens.net/ClassroomApps/Main/chaosgame.html>. Je velice snadná na ovládání a probíhá v ní konstrukce stejně jako ve výše popsaném postupu, dokáže provést nejen jeden, ale i deset, sto nebo tisíc kroků konstrukce najednou. Lze v ní jako vstupní útvar místo trojúhelníku použít i čtverec nebo šestiúhelník.

Druhá zajímavá aplikace na tvorbu fraktálů pomocí chaos game je na této adrese: <https://andrew.wang-hoyer.com/>

`experiments/chaos-game`. Lze v ní měnit počet vrcholů od tří do deseti, ale navíc má i další nastavení. Dají se například nastavit pravidla o zakázaných výsledcích hodů – můžeme třeba nastavit, že nesmí být cílem dvakrát za sebou stejný vrchol nebo že po vrcholu nesmí následovat sousední vrchol a podobně. Můžeme i volně nastavovat, o kolik procent vzdálenosti k cílovému vrcholu se k němu máme přiblížit. Tato změna se dá provádět plynule a tím hned vidíme, jak se projevuje na konečném fraktálu. Na obrázku 2 jsou vidět fraktály, které byly vytvořeny v této aplikaci. Při tvorbě fraktálů je možné nastavit i rotaci pro cestu do dalšího cílového bodu. Tou jsem se však v tomto článku nezabýval. V případě zájmu je vypracovaná příprava lekce užití rotace v chaos game ve *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities* (Choate et al., 1999). Několik dalších obrázků fraktálů, které se dají vytvořit metodou chaos game, se dá nalézt v knize *Fraktály: Na hraně chaosu* (Linton, 2021).



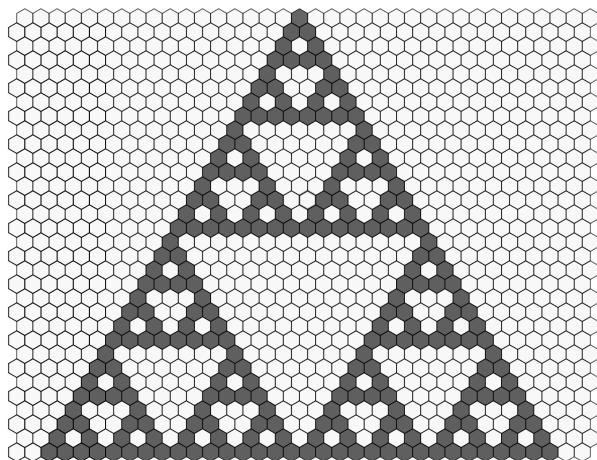
Obr. 2: Fraktály vytvořené metodou chaos game

Celulární automat

Celulární neboli buněčný automat je matematický model, který simuluje chování systému v prostředí rozděleného do diskretních částí – buněk. Každá buňka může nabývat konečného počtu stavů (být zapnutá nebo vypnutá, mít určitou barvu). Vývoj systému probíhá v diskretních časových krocích (kolech), kdy se stav kaž-

dé buňky aktualizuje podle jednoduchého předem daného pravidla. Nový stav buňky tak závisí pouze na tom, jaký byl stav její a jejích nejbližších sousedů. Příkladem celulárního automatu je hra života. Ta probíhá v rovině rozdělené na čtvercové buňky. Na počátku se všechny buňky nacházejí v jednom ze dvou stavů: živá (černá) a mrtvá (bílá). V každém dalším kole každá buňka mění nebo nemění svůj předchozí stav podle toho, kolik měla živých sousedních buněk. Zároveň, protože vyhodnocujeme změnu stavu u všech buněk, mění se i počet jejích živých sousedů. Tato hra byla poměrně populární v sedmdesátých letech dvacátého století. Podrobněji je fungování hry vysvětleno v *Chaos and Fractals* (Peitgen et al, 1992a, s. 407). Dají se stáhnout i aplikace na telefon, které hru života simulují.

Celulární automat, který si vyzkoušíme, bude probíhat na rozdíl od hry života v šestiúhelníkové síti. Tu je dobré si předem připravit a vytisknout. Šestiúhelníky budeme mít uspořádány v řádcích. Začneme s jednou živou (vybarvenou) buňkou v horním řádku. Během hry budeme postupovat po řádcích směrem dolů a budeme rozhodovat o stavu buněk v tomto řádku. Pravidla jsou jed-



Obr. 3: Struktura Sierpiňského trojúhelníku vytvořená metodou celulárního automatu

noduchá. Jestliže buňka sousedí v řádku nad ní se dvěma buňkami se stejným stavem, zůstane mrtvá. Jestliže mají dvě sousední buňky nad ní rozdílný stav, obživne (vybarvíme ji).

Struktura, která vzniká při dodržování těchto pravidel, nápadně připomíná Sierpiňského trojúhelník (obr. 3). Proč tomu tak je? Proč stejná struktura vzniká při vybarvování lichých čísel v Pascalově trojúhelníku?

Úloha se dá modifikovat počtem a polohou na počátku vybarvených buněk a přirozeně změnou pravidel, kdy o stavu buňky může rozhodovat stav více než dvou sousedních buněk. Taková a další úlohy se dají nalézt ve *Fractals for the classroom: Strategic activities volume one* (Peitgen et al, 1993).

Dimenze fraktálů

V definici fraktálu, která je uvedena v počátku článku, Mandelbrot (2022) píše, že Hausdorff-Besicovitchova dimenze má být ostře větší než dimenze topologická. Topologická dimenze odpovídá naší intuitivní představě o dimenzi, bod má dimenzi nula, úsečka jedna, čtverec dva a krychle dimenzi tři. Jak to je s dimenzí Hausdorff-Besicovitchovou (často také označovanou pouze jako Hausdorffovou)? Její definici lze nalézt třeba v knize *Fraktální geometrie: principy a aplikace* (Zelinka et al., 2006, s. 82) nebo ve *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (Falconer, 2014, s. 47). Její výpočet je obtížný a pro školní praxi těžko použitelný. My použijeme její zjednodušenou verzi – soběpodobnostní dimenzi. Ta je speciálním případem Hausdorffovy dimenze. Její výpočet je jednodušší, snadno zvládnutelný prostředky středoškolské matematiky, avšak dá se použít pouze u soběpodobných fraktálů, u kterých zjednodušená verze výpočtu dává stejné výsledky jako výpočet nezjednodušený (Edgar, 2008). Nebudeme tedy schopni spočítat dimenzi pro jakýkoliv fraktál, ale stále máme k dispozici dostatek takových, pro které to umět budeme.

Představme si, že máme úsečku, čtverec a krychli a budeme je dělit postupně na menší úsečky, čtverce a krychle. Nejprve tak, aby nově vzniklé objekty měli poloviční, poté třetinový a nako-

nec čtvrtinový rozměr. Podívejme se, na kolik shodných částí je rozdělíme (tab. 1).

Tab. 1: Počet částí vzniklých po dělení úsečky, čtverce a krychle

faktor zmenšení	2	3	4
úsečka	$2 = 2^1$	$3 = 3^1$	$4 = 4^1$
čtverec	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$
krychle	$8 = 2^3$	$27 = 3^3$	$64 = 4^3$

Můžeme si povšimnout, že počet vzniklých částí odpovídá faktoru zmenšení umocněnému na dimenzi příslušného objektu. Když jsme například dělili čtverec na čtvrtinové čtverce, získali jsme jich šestnáct, což je čtyři na druhou. Dvojka, kterou umocňujeme, odpovídá tomu, že čtverec je dvourozměrný objekt. Obecně tento vztah můžeme zapsat:

$$n = m^d,$$

kde n je počet částí, na které jsme objekt rozdělili, m koeficient zmenšení, tedy kolikrát je vzniklá část menší než původní celek, a d je dimenzí objektu. Tento vztah můžeme logaritmovat a vyjádřit z něho d . Tím získáme:

$$d = \frac{\log n}{\log m}.$$

Hodnota d se nazývá soběpodobnostní dimenze (Peitgen et al, 1992b). Tu budeme schopni spočítat, když objekt, včetně fraktálu, budeme schopni rozdělit na určitý počet shodných částí. Pojďme si nyní ukázat, jak vypadá výpočet dimenzí pro některé konkrétní fraktály.

Když se podíváme na obrázek Kochovy křivky, vidíme, že se dá rozdělit na čtyři stejné části. Každá tato část má třetinovou velikost oproti celé křivce. Hodnota n je tedy čtyři a hodnota m je tři.

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1,2619$$

U Cantorovy množiny vidíme dvě shodné části s třetinovou velikostí, n je dva a m je tři.

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \doteq 0,6309$$

Sierpiňského trojúhelník lze rozdělit na tři stejné části s poloviční velikostí, n je tři a m je dva. Mohli bychom si rovněž všimnout, že se skládá z devíti částí o čtvrtinové velikosti, n pak je devět a m čtyři. V případě dvaceti sedmi částí s osminovou velikostí m je dvacet sedm a n osm. Na dimenzi Sierpiňského trojúhelníku nemůže mít vliv, které z těchto hodnot použijeme.

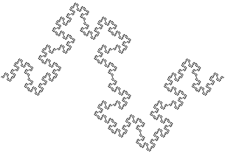
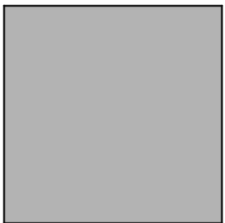
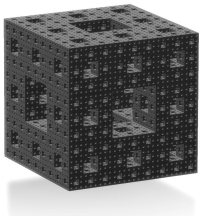
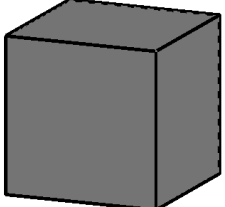
$$d = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 27}{\log 8} \doteq 1,5850$$

Dimenze Cantorovy množiny je větší než dimenze samotného bodu, avšak menší než dimenze úsečky. Dimenze Kochovy křivky a Sierpiňského trojúhelníku je někde mezi dimenzí úsečky a čtverce. Dá se říci, že posloupnost fraktálních dimenzí různých objektů odpovídají hodnotám uvedeným v tabulce 2 (Ventrella, 2019).

Tabulku 2 musíme brát jako orientační. Existují fraktální objekty, které nebudou do naznačených kategorií přesně zapadat. Například dračí křivka má soběpodobnostní dimenzi rovnou přesně dvěma. Stejnou hodnotu dimenze má i Sierpiňského čtyřstěn, což je analogie k Sierpiňskému trojúhelníku v topologickém tří-rozměrném prostoru. K vytvoření představy o uspořádání dimenzí různých kategorií fraktálních objektů tato tabulka plně postačuje.

Vedle již zmíněných definic dimenzí existují i další, které se používají pro výpočet dimenzí fraktálů. Jmenovitě již zde zmíním pouze box-counting dimenzi. Při jejím výpočtu se fraktální objekt překryje čtvercovou sítí a počítají se pole, do kterých fraktál nebo jeho hranice zasáhne. Tento postup se opakuje pro jinou velikost polí sítě a z toho se počítá dimenze. Složitost výpočtu je jen mírně větší oproti soběpodobnostní dimenzi. Relativně pracné a zdlouhavé je počítání polí, do kterých fraktál zasahuje. Pokud byste chtěli tento výpočet ve škole zkusit, popis postupu se dá nalézt třeba ve *Fractals for The Classroom* (Peitgen et al, 1992b).

Tab. 2: Fraktální dimenze různých kategorií objektů

Dimenze	Objekt	
0	Bod	•
	Fraktální prach	-- -- -- --
1	Úsečka	————
	Fraktální křivka	
2	Čtverec	
	Fraktální povrch a tělesa	
3	Těleso	

Závěr

Fraktály představují poutavou oblast matematiky, která nabízí nekonečné možnosti pro objevování a zkoumání. Jejich vizuální přitažlivost a komplexita je činí ideálním tématem pro zapojení žáků do aktivního a tvořivého učení. Vedle již zmíněných oblastí nabízí fraktální geometrie mnoho možností pro další prozkoumávání s žáky. Za pozornost stojí například L-systémy nebo Juliovy množiny a Mandelbrotova množina. Ale i již zmíněné objekty, jako třeba Cantorova množina, mají mnoho zajímavých vlastností. Fraktály lze provázat s celou řadou dalších oblastí výuky matematiky, jakými jsou například výpočty délek a obsahů, geometrické řady, mohutnosti množin nebo kombinatorika.

Zkoumání fraktálů není omezeno pouze na matematiku. Žáci mohou hledat fraktály v přírodě, což propojuje matematiku s biologií nebo geografií. Fraktály se dají nalézt i ve výtvarném umění nebo hudbě. Žáci mohou vytvářet i vlastní výtvarná díla s tematikou fraktálů. Na internetu lze rovněž nalézt řadu návodů, jak vyrábět různé modely fraktálů z papíru. Doufám, že vás tento článek přesvědčil o tom, že fraktály jsou nejen fascinující, ale také přístupné pro žáky různých věkových kategorií. Zároveň nabízejí široké pole možností k objevování zajímavého.

Literatura

- [1] Choate, J., Devaney, R. L., & Foster, A. (1999). *Fractals: A tool kit of dynamics activities*. Key Curriculum Press.
- [2] Divišová, B. (2013). Fraktály a jak o nich učit. *Učitel matematiky*, 21(3), 144–158.
- [3] Edgar, E. (2008). *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer.
- [4] Falconer, K. (2014). *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.
- [5] Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., & Edney, R. (2006). *Introducing: Fractal geometry*. Icon Books.
- [6] Linton, O. (2021). *Fraktály: Na hraně chaosu*. Dokořán.

- [7] Mandelbrot, B. B. (2022). *The fractal geometry of nature*. Echo Point Books & Media.
- [8] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992a). *Chaos and fractals: New frontiers of science*. Springer-Verlag.
- [9] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992b). *Fractals for the classroom: Part one introduction to fractals and chaos*. Springer-Verlag.
- [10] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., & Yunker, L. (1993). *Fractals for the classroom: Strategic activities volume one*. Springer-Verlag.
- [11] Ventrella, J. (2019). *The family tree of fractal curves: A taxonomy of plane-filling curves using complex integer lattices*. Eyebrian Books.
- [12] Zelinka, I., Včelař, F., & Čandík, M. (2006). *Fraktální geometrie: principy a aplikace*. BEN – technická literatura.

Zde je výše slíbený odkaz na sdílenou složku, kde je možné najít soubory s konstrukcemi v GeoGebře a v PowerPointu, obrázky fraktálů, které jsem zkonstruoval pomocí metod zmíněných ve článku, a odkazy na webové nástroje na tvorbu fraktálů:



[https://drive.google.com/drive/folders/
17MPu0gh9KozDeQcGmDY8WalYUxcUFtIh?usp=drive_link](https://drive.google.com/drive/folders/17MPu0gh9KozDeQcGmDY8WalYUxcUFtIh?usp=drive_link)

Abstract

The article begins by briefly answering the question of what a fractal is and provides reasons why fractals are worth exploring in

education. Various methods of constructing fractals suitable for classroom use are then presented. Fractals can be easily integrated into the curriculum as early as upper primary school, either as part of a comprehensive course or as individual thematic units. Constructions are primarily created using GeoGebra, but also through traditional methods (pencil, paper) or other digital tools (PowerPoint, web applications). The conclusion demonstrates that the concept of fractal dimension can be accessible to high school students.

Tomáš Fabián

PORG

Lindnerova 3

180 00 Praha 8

KMDM PedF UK

Magdalény Rettigové 4

110 00 Praha 1

e-mail: fabian@porg.cz