

Učitel matematiky

Dag Hrubý

Korejská zkouška Suneung

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 2, 114–125

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153014>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

KOREJSKÁ ZKOUŠKA SUNEUNG

DAG HRUBÝ

Mezi zeměmi, ve kterých dosahují středoškoláci výborných výsledků v matematice, zaujímá významné místo Korejská republika (Jižní Korea). V posledním hodnocení PISA v roce 2022 se umístila Korejská republika v matematické gramotnosti na 6. místě (ČR na 18. místě) a na Mezinárodní matematické olympiádě v roce 2024 obsadila Korea 3. místo (ČR 49. místo). V životě korejských středoškoláků má významné místo přijímací zkouška na vysokou školu, která se v Koreji nazývá College Scholastic Ability Test (CSAT) nebo také Suneung. Zkouška Suneung je celostátní zkouška pro korejské studenty středních škol, která rozhoduje o přijetí na vysokou školu. Je známá jako jedna z nejvíce stresujících zkoušek na světě. Tuto zkoušku skládá každý rok, zpravidla třetí čtvrtek v listopadu, přibližně půl milionu studentů. Suneung je pro studenta v Koreji vyvrcholením celé akademické kariéry. Zkouška trvá 8 hodin (od 8:40 do 17:40 h, kromě oběda a přestávky v délce 1 hodiny) a probíhá ve více než 1 000 testovacích centrech po celé zemi. Zkouška se skládá z těchto předmětů:

1. Korejský jazyk a literatura, 45 otázek, 100 bodů, 80 minut (8:40–10:00);
2. Matematika, 30 otázek, 100 bodů, 100 minut (10:30–12:10);
3. Anglický jazyk, 45 otázek, 100 bodů, 70 minut (13:10–14:20);
4. Korejská historie a volitelný předmět, 20 otázek, 50 bodů, 100 minut (14:50–16:30)
 - 4.1 Korejské dějiny, povinný předmět
 - 4.2. Volitelný předmět v závislosti na profesní dráze
 Sociální studia (výběr ze dvou předmětů), etika a myšlení, světové dějiny a asijské dějiny, národní a světová geografie, právo a politika, ekonomika, společnost a kultura.

Věda (výběr ze dvou předmětů), fyzika, chemie, biologie, vědy o Zemi.

Odborné vzdělávání (výběr ze dvou předmětů), základy zemědělství, základní zemědělské techniky, základy průmyslu, technický výkres, komerční ekonomie, účetní zásady, základy oceánografie, základy rybářského a námořního průmyslu, lidský vývoj, základy průmyslu v sektoru služeb;

5. Cizí jazyk nebo čínsko-korejské znaky, 30 otázek, 50 bodů, 40 minut (17:00–17:40).

Výběr z němčiny, arabštiny, čínštiny, španělštiny, francouzštiny, japonštiny, ruštiny, čínsko-korejštiny (Hanja) a vietnamštiny.

V případě matematiky jsou zadávány jak úlohy uzavřené (žák vybírá správné řešení z nabízených alternativ), tak úlohy otevřené (hodnocena je odpověď, kterou žák vytvoří). Pro tento článek bylo vybráno několik úloh, které byly zadány v roce 2023 (Nordberg, 2022). Mezi pěti čísly v hranatých závorkách, která jsou uvedena u jednotlivých úloh, je právě jedno číslo řešením dané úlohy. Protože nebyla k dispozici autorská řešení těchto úloh, pokusil se autor tohoto článku o svá vlastní řešení.

Úloha 1. Vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$.

[1, 2, 3, 4, 5] [2 body]

Řešení: Daná limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$. V čitateli a jmenovateli zlomku vytkneme x a po zkrácení dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}} = \frac{1+3}{1+0} = 4.$$

Poznamenejme, že použití L'Hospitalova pravidla zde nevede k cíli.

Úloha 2. Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$.

[1, 2, 3, 4, 5] [3 body]

Řešení: Daná limita je typu $\frac{0}{0}$. S použitím L'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+4}}{x+1} = 4.$$

Úloha 3. V geometrické posloupnosti a_n s kladným kvocientem platí

$$a_2 + a_4 = 30, \quad (1)$$

$$a_4 + a_6 = \frac{15}{2}. \quad (2)$$

Určete člen a_1 .

[48, 56, 64, 72, 80]

[3 body]

Řešení: Členy a_4 , a_6 vyjádříme pomocí členu a_2 a kvocientu posloupnosti q . Zřejmě platí

$a_4 = a_2 q^2$, $a_6 = a_2 q^4$. Po dosazení do rovnic (1), (2) dostáváme

$$a_2 + a_2 q^2 = 30, \quad (3)$$

$$a_2 q^2 + a_2 q^4 = \frac{15}{2}. \quad (4)$$

Z rovnic (3), (4) postupně plyne $a_2 q^2 + a_2 q^4 = q^2(a_2 + a_2 q^2) = 30q^2 = \frac{15}{2}$. Odtud plyne $q^2 = \frac{1}{4}$. Protože podle zadání úlohy je q kladné, platí $q = \frac{1}{2}$. Po dosazení do (3) dostaneme $a_2 = 24$, a tedy $a_1 = \frac{a_2}{q} = 48$.

Úloha 4. Pro geometrickou posloupnost a_n platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 3$. Určete a_2 .

[16, 18, 20, 22, 24]

[3 body]

Řešení: Na základě věty o limitě součtu posloupností platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + 2^{2n-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n + 2^{2n-1}}.$$

Druhá limita v tomto součtu je rovna nule, můžeme tedy psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^n \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \right]}.$$

Protože je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$, tak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{4^n} = 3$. Odtud již plyne $a_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n$, a proto je $a_1 = 6$
a $a_2 = 24$.

Úloha 5. V aritmetické posloupnosti a_n s kladnými členy je difference posloupnosti rovna prvnímu členu. Určete člen a_4 , jestliže platí

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2.$$

[6, 7, 8, 9, 10]

[3 body]

Řešení: Zřejmě platí $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} =$
 $= \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_1}$. Dále je

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_1 + kd = a_1 + ka_1 = (k+1)a_1 \\ a_k &= a_1 + (k-1)d = a_1 + (k-1)a_1 = ka_1. \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_1} &= \frac{\sqrt{(k+1)a_1} - \sqrt{ka_1}}{a_1} = \frac{\sqrt{a_1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{a_1} = \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{a_1}}. \end{aligned}$$

Po dosazení do výchozího vztahu dostaneme

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{a_1}} = 2,$$

resp.

$$\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{a_1}.$$

Protože je

$$\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) = \sqrt{16} - \sqrt{1} = 3,$$

tak platí $2\sqrt{a_1} = 3$, a tedy $a_1 = \frac{9}{4}$ a $a_4 = a_1 + 3a_1 = 4a_1 = 9$.

Úloha 6. Pro která celá čísla k má rovnice $2x^3 - 6x^2 + k = 0$ dva kladné reálné kořeny?

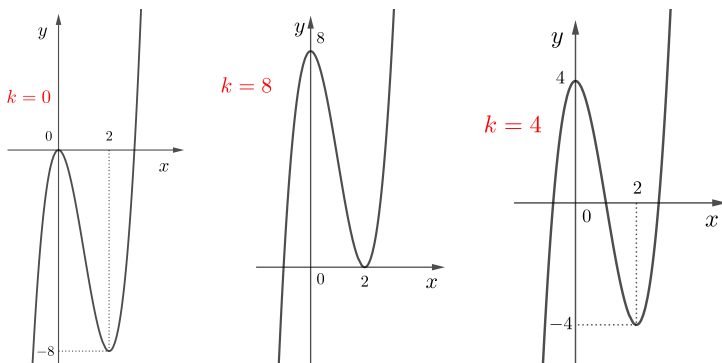
[3 body]

Řešení: Odpovídající kořeny této rovnice odhadneme na základě grafu funkce $y = 2x^3 - 6x^2 + k$. Pro 1. a 2. derivaci této funkce platí

$$y' = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ nebo } x = 2.$$

Funkce má lokální maximum v bodě $x = 0$ a lokální minimum v bodě $x = 2$. Charakter lokálních extrémů na hodnotě k nezávisí. Sestrojíme graf funkce pro hodnotu $k = 0$. Z grafu v tomto případě odhadneme, že pro $k < 0$ dostaneme právě jeden kladný kořen. Pro $k > 0$ dostaneme dva kladné kořeny. To ale platí pro hodnoty $k < 8$. Pro $k > 8$ rovnice už kladné kořeny nemá. Na obrázku 1 jsou grafy funkcí pro hodnoty $k = 0$, $k = 4$, $k = 8$. Rovnice má dva kladné kořeny pro $k \in (0; 8)$.



Obr. 1

Úloha 7. Funkce $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$ má maximum v bodě $x = 1$ a minimum v bodě $x = b$. Jaká je hodnota $a + b$? (a, b jsou konstanty)

[12, 14, 16, 18, 20]

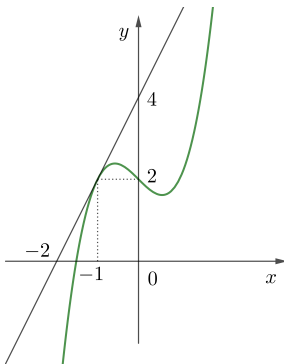
[3 body]

Řešení: Pokud má polynomická funkce maximum v bodě $x = 1$, je derivace v tomto bodě rovna nule. V našem případě dostáváme $f'(x) = 6x^2 - 18x + a$, $f'(1) = 6 - 18 + a = 0$. Odtud plyne hodnota $a = 12$. Potom platí $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 2)(x - 1)$. Funkce má minimum v bodě $x = 2 = b$. Je tedy $a + b = 14$.

Úloha 8. Je dána funkce $f(x) = x^3 - x + 2$. Tečna grafu této funkce prochází bodem $[0; 4]$. Určete průsečík této tečny s osou x . $[-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}]$

[3 body]

Řešení:



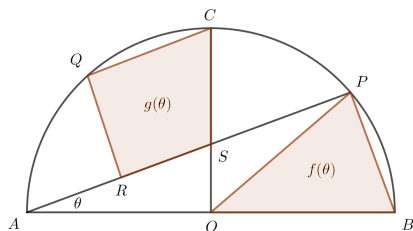
Obr. 2

Tečna grafu funkce v bodě $[x_0; y_0]$ má rovnici $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. V našem případě je $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$. Pro tečnu procházející bodem $[0; 4]$ pak platí

$$\begin{aligned} 4 - y_0 &= (3x_0^2 - 1)(-x_0) \\ y_0 &= 3x_0^3 - x_0 + 4 \\ y_0 &= x_0^3 - x_0 + 2 + 2x_0^3 + 2 \\ y_0 &= y_0 + 2x_0^3 + 2 \\ x_0 &= -1, \quad y_0 = 2. \end{aligned}$$

Rovnice tečny je $y = 2x + 4$, osu x protíná v bodě $x = -2$ (obr. 2).

Úloha 9. V půlkruhu s průměrem $|AB| = 2$ je dán čtyřúhelník $RSCQ$ a trojúhelník OBP tak, jak je uvedeno na obrázku 3. Obsah trojúhelníku je $f(\theta)$ a obsah čtyřúhelníku je $g(\theta)$. Vypočítejte $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$, je-li dáno $|AO| = |OB|$, $|\angle CQR| = \frac{\pi}{2}$, $|\angle PAB| = \theta$, $|PB| = |CQ|$.



Obr. 3

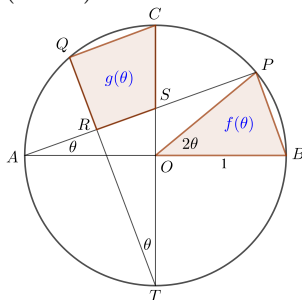
[1, 2, 3, 4, 5]

[4 body]

Řešení: Je-li $|\angle PAB| = \theta$, pak $|\angle POB| = 2\theta$ (středový úhel příslušný k obvodovému úhlu θ). Pro obsah trojúhelníku BOP s délkami stran $|OP| = 1$, $|OB| = 1$ pak platí

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |OP| \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Protože trojúhelníky PAO , POB mají stejný obsah, tak pro obsah trojúhelníku PAB platí $S_{PAB} = 2f(\theta)$. Zadaný půlkruh si nyní doplníme na celý kruh, ve kterém sestrojíme trojúhelník CQT (obr. 4).



Obr. 4

Protože je zadáno $|CQ| = |PB|$, jsou trojúhelníky CQT a BPA shodné (shodným tětivám odpovídají shodné úhly), tedy mají stejné obsahy, $S_{CQT} = 2f(\theta)$. Hledaný obsah čtyřúhelníku $CQRS$ je proto roven rozdílu obsahů trojúhelníků CQT a SRT , tedy platí

$$S_{CQRS} = S_{CQT} - S_{SRT} = 2f(\theta) - S_{SRT} = g(\theta).$$

Zbývá nám určit obsah pravoúhlého trojúhelníku SRT s pravým úhlem při vrcholu R . Pro velikost úhlu RST platí $|\angle RST| = \frac{\pi}{2} - \theta$. Uvážíme-li, že $|SO| = \tan \theta$, pak platí $|ST| = |SO| + |OT| = \tan \theta + 1$. Dále je $|RS| : |ST| = \sin \theta$. Z toho plyne

$$|RS| = |ST| \sin \theta = (\tan \theta + 1) \sin \theta.$$

Pro obsah trojúhelníku RST pak platí

$$\begin{aligned} S_{RST} &= \frac{1}{2} \cdot |RS| \cdot |ST| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \theta + 1) \sin \theta (\operatorname{tg} \theta + 1) \cos \theta = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \theta + 1)^2 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Pro obsah čtyřúhelníku $CQRS$ platí

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 2f(\theta) - \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \theta + 1)^2 \sin 2\theta = \sin 2\theta - \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \theta + 1)^2 \sin 2\theta = \\ &= \sin 2\theta \left[1 - \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \theta + 1)^2\right]. \end{aligned}$$

Nyní již může vypočítat požadovanou limitu

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2} &= \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} \sin 2\theta - 2 \sin 2\theta \left[1 - \frac{1}{4}(\operatorname{tg} \theta + 1)^2\right]}{\theta^2} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \theta\right)}{\theta^2} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta \cos \theta (2 \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}^2 \theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \left[2 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right] = 2. \end{aligned}$$

Úloha 10. Funkce $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a pro $n - 1 \leq x \leq n$ je $|f(x)| = |6(x - n + 1)(x - n)|$, $n \in \mathbb{N}$. Pro funkci $g(x)$ definovanou v intervalu $(0; 4)$ platí $g(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_x^4 f(t) dt$, minimální hodnotu 0 má v bodě $x = 2$. Jaká je hodnota $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx$?

$$\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad [4 \text{ body}]$$

Řešení: Ze zadání funkce f plyne $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ a pro $n - 1 \leq x \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(x) = 6(x - n + 1)(x - n) \text{ nebo } f(x) = -6(x - n + 1)(x - n).$$

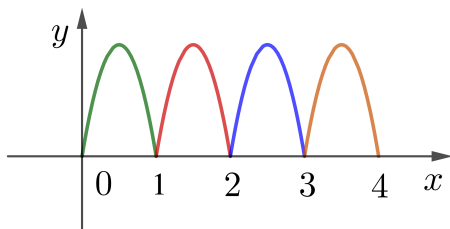
Snadno nahlédneme, že graf funkce f se v intervalu $\langle 0; 4 \rangle$ skládá ze čtyř parabolických oblouků. Vrcholy odpovídajících parabol mají v každém z intervalů $\langle n - 1; n \rangle$, $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, souřadnice $[n - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$. Položíme-li $x - n = z$, pak je

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n f(x) \, dx &= \int_{n-1}^n 6(x - n + 1)(x - n) \, dx = \int_{-1}^0 (6z^2 + 6z) \, dz = \\ &= [2z^3 + 3z^2]_{-1}^0 = -1 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n f(x) \, dx &= \int_{n-1}^n -6(x - n + 1)(x - n) \, dx = \\ &= \int_{-1}^0 -(6z^2 + 6z) \, dz = [-2z^3 - 3z^2]_{-1}^0 = 1. \end{aligned}$$

Odtud plyne $-4 \leq \int_0^4 f(x) \, dx \leq 4$. Kdyby platilo $\int_0^4 f(x) \, dx = 4$, měla by funkce f graf, který je na obrázku 5.



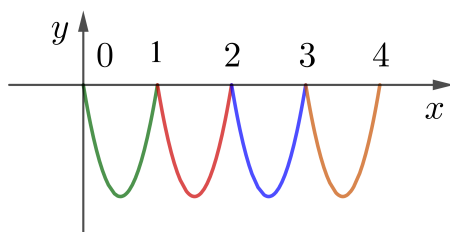
Obr. 5

Tento případ ale nemůže nastat, protože pro funkci g by například platilo

$$g(1) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^4 f(t) dt = 1 - 3 = -2 < 0,$$

což je v rozporu s podmínkou $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (0; 4)$.

Kdyby platilo $\int_0^4 f(x) dx = -4$, měla by funkce f graf, který je na obrázku 6.



Obr. 6

Tento případ ale také nemůže nastat, protože pro funkci g by například platilo

$$g(3) = \int_0^3 f(t) dt - \int_3^4 f(t) dt = -3 - (-1) = -2 < 0,$$

což je v rozporu s podmínkou $g(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (0; 4)$. Z hypotetických 16 možností pro vyjádření funkce f nám tak zbývá ještě 14 možností. Jejich počet ale výrazně sníží podmínka

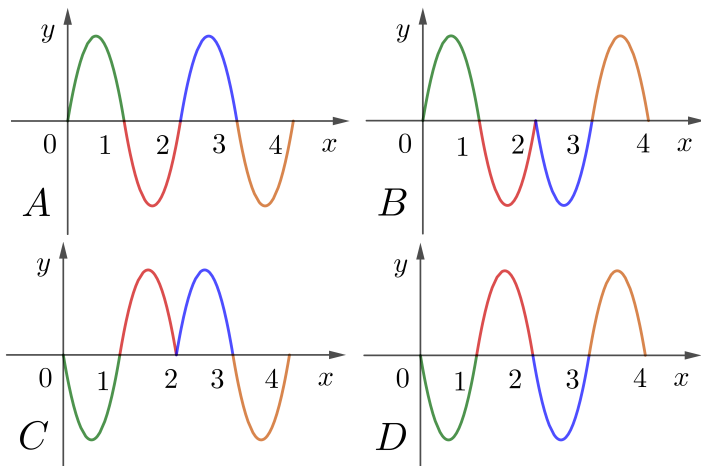
$$g(2) = \int_0^2 f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0, \text{ tj. } \int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt.$$

Tyto dva integrály mohou ale nabývat pouze společných hodnot $-2, 0, 2$. Platí

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt = -2 \text{ nebo } \int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt = 0$$

$$\text{nebo } \int_0^2 f(t) dt = 2.$$

Hodnoty $-2, 2$ jsme již vyloučili, a tak zůstává jediná možnost $\int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt = 0$. Tomu odpovídají pouze tyto 4 případy (A, B, C, D) grafu funkce f , viz obrázek 7.



Obr. 7

V případě B je $g(3) = -2 < 0$, v případě C je $g(1) = -2 < 0$, v případě D je $g(3) = -2 < 0$. Zůstává tak případ A . Potom platí

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Už z tohoto krátkého vzorku úloh z matematiky ve zkoušce Sunneung plyne, že požadavky na středoškolské studenty v Korejské

republiky v oblasti matematického vzdělávání jsou na vyšší úrovni než v ČR. Například učivo týkající se základů diferenciálního a integrálního počtu, které je součástí kurikula maturitních oborů středoškolského vzdělávání v celé řadě dalších zemí, se v rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G) vůbec nevyskytuje. Ve stávajícím RVP G není dokonce ve čtvrtém ročníku matematika povinným předmětem. To pokládám za vážné pochybení vzdělávací politiky v oblasti matematického vzdělávání v ČR. Další problém představuje tzv. společná část maturitní zkoušky, kterou organizuje příspěvková organizace MŠMT CERMAT. Tato zkouška je stejná pro gymnázia a střední odborné školy (kategorie oborů M, L), což pokládám za velkou chybu. V matematice tak řeší stejné úlohy žáci gymnázií a středních odborných škol. Je zřejmé, že v takovém případě musí být zadané úlohy z matematiky na nižší úrovni, což kritizují i samotní učitelé matematiky středních škol. Zejména úlohy z matematiky, které zadal CERMAT v roce 2024, byly kritizovány pro svou nízkou náročnost na konferenci učitelů matematiky středních škol, která se konala ve dnech 9.–11. 10. 2024 v Brně. Možným řešením by mohla být maturita všeobecná (akademická) a maturita odborná (profesní).

Literatura

- [1] Nordberg, S. (2022, 17. listopadu). *Question from the 2023 Suneung*. <https://10wontips.blogspot.com/2022/11/2023-suneung-questions-from-nov-2022.html>

Dag Hrubý
K. H. Borovského 476
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz