

Rozhledy matematicko-fyzikální

José Marcial Nájares Romero

Přirozená čísla ve zlomcích podruhé

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 1, 25–30

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153137>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Přirozená čísla ve zlomcích podruhé

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha 10

Abstrakt. Ukážeme, jak neotřelými způsoby generovat zlomky s hodnotou $1/k$, kde k je přirozené číslo, přičemž v čitateli bude součet prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli bude součet n členů jisté aritmetické posloupnosti. Identitu dokážeme algebraicky i geometricky.

Tato práce navazuje na sadu nedávných článků z Rozhledů. Nejprve V. Čerňanová [1] představila generování zlomků tvaru $1/(m^2 - 1)$, kde m je přirozené číslo větší než jedna, pomocí lichých čísel, poté P. Tlustý [2] interpretoval získané identity geometricky, nakonec autor tohoto článku v [3] generoval zlomky ve tvaru $1/(m^2 - 1)$ pomocí přirozených čísel a získané vztahy vysvětloval i geometricky pomocí trojúhelníkových čísel.

Zde se budeme věnovat generování zlomků tvaru $1/k$, přičemž pro $k = 2$ a $k = 3$ vyrobíme identity speciálním způsobem (kapitoly 1, 2) a pro $k \geq 3$ odvodíme i vzorec univerzální (kapitola 3).

K úpravám výrazů budeme používat vzorec pro součet prvních n členů libovolné aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

1. Generování $1/2$

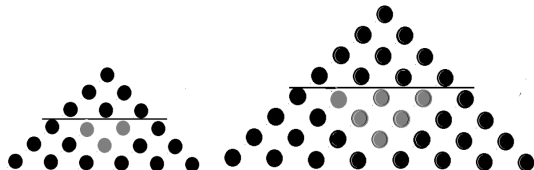
V první části nejdříve popíšeme, jak generovat $1/2$ dvěma způsoby. Tyto postupy budou odlišné od ostatních případů pro $k \geq 3$, proto je uvádíme zvlášť. Vzorce vypočítáme z obrázků, poté popíšeme slovně, zapíšeme vzorcem a dokážeme algebraicky.

První způsob

Pozorujme trojúhelníková čísla ¹⁾ na obr. 1. Vidíme, že pod čarou jsou dva černé trojúhelníky, které jsou stejné jako nad čarou. Když si tedy odmyslíme šedé puntíky, pak počet černých puntíků pod čarou je dvojnásobný oproti počtu nad čarou. Zkusme to zformulovat slovně.

¹⁾ n -té trojúhelníkové číslo je $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Důvod je jasný, lze je zapsat pomocí puntíků do trojúhelníku. Viz obrázky v tomto článku.

Když v čitateli sečteme prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli bude rozdíl součtu bezprostředně následujících n čísel a součtu prvních $n - 1$ přirozených čísel, pak se tento zlomek rovná $1/2$.



Obr. 1: Ilustrace identity z věty 1 pro $n = 3$ a $n = 4$

Zapsáno formálně:

Věta 1. Pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n) - (1 + 2 + \dots + (n - 1))} = \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Použitím vzorce pro součet aritmetické posloupnosti máme

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + 2n) - (1 + 2 + \dots + (n - 1))} = \\ &= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n + 1}{3n + 1 - n + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Druhý způsob

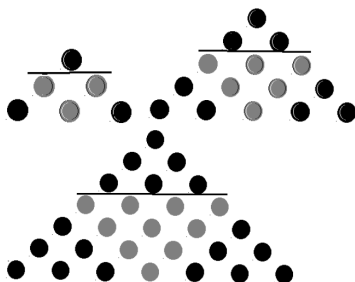
Popišme ještě druhý způsob generování $1/2$. Tentokrát na obr. 2 barvíme trojúhelníková čísla trochu jiným způsobem, šedých je větší podíl než v předešlém případě. Opět platí, že počet černých puntíků nad a pod čarou je v poměru $1 : 2$.

Zkusme znovu slovně zformulovat naše pozorování. V čitateli budeme opět sčítat prvních n přirozených čísel, ve jmenovateli tentokrát bude rozdíl součtu bezprostředně následujících $n + 1$ přirozených čísel a součtu prvních $n + 1$ přirozených čísel. Pak zlomek bude roven $1/2$.

Zapsáno matematicky:

Věta 2. Pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{((n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n + 1)) - (1 + 2 + \dots + n + (n + 1))} = \frac{1}{2}.$$



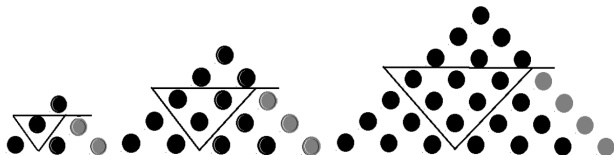
Obr. 2: Ilustrace identity z věty 2 pro $n = 1, 2, 3$

Důkaz. Opět stačí použít součet aritmetické posloupnosti.

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2 + \dots + n}{((n+1) + (n+2) + \dots + (2n+1)) - (1 + 2 + \dots + n + (n+1))} = \\ &= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{n}{3n+2-n-2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Generování 1/3

Generování 1/3 jsme se věnovali i v článku [3]. Pojdme ukázat ještě další možný postup. Na obr. 3 jsou opět trojúhelníková čísla, tentokrát barvíme puntíky vpravo pod čarou šedě. Počet černých puntíků pod čarou je trojnásobný oproti počtu nad čarou. Odvodíme z toho následující tvrzení. Abychom generovali 1/3, budeme sčítat v čitateli prvních n přirozených čísel a ve jmenovateli tentokrát budeme sčítat bezprostředně $n+1$ následujících přirozených čísel a od tohoto součtu odečteme $n+1$, tedy od každého čísla odečteme 1.



Obr. 3: Ilustrace identity z věty 3 pro $n = 1, 2, 3$

Vše, co bylo dříve řečeno, shrneme do následující věty.

Věta 3. Pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{(n+1) + (n+2) + \cdots + (2n+1) - (n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Důkaz.

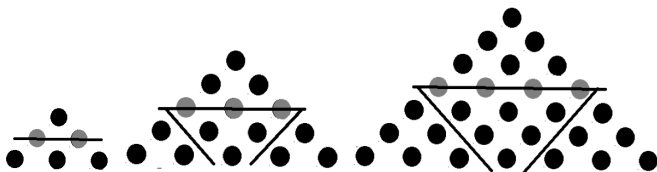
$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{(n+1) + (n+2) + \cdots + (2n+1) - (n+1)} &= \\ &= \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(3n+2)(n+1)}{2} - (n+1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Další způsob generování $1/3$ uvidíme v další kapitole.

3. Generování zlomků $1/k$

Obecný případ generování zlomku $1/k$, kde k je přirozené číslo větší nebo rovno 3, odvodíme z trojúhelníkových čísel na obr. 4, 5 a 6. První z obrázků ilustruje, jak generovat $1/3$ (stejný způsob už byl prezentován v článku [3]), druhý, jak vyrábět $1/4$, a třetí, jak získat $1/5$.

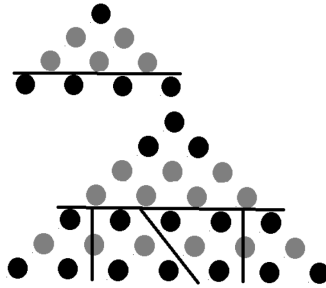
Slovy, v čitateli sečteme n přirozených čísel, poté vynecháme $k-2$ čísel a ve jmenovateli pak sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí $k-2$. Tedy v případě $1/3$ vynecháme jedno číslo a ve jmenovateli sčítáme n následujících přirozených čísel, viz obr. 4. V případě $1/4$ vynecháme 2 čísla a ve jmenovateli sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí 2, viz obr. 5. V případě $1/5$ vynecháme 3 čísla a ve jmenovateli sčítáme n členů aritmetické posloupnosti s diferencí 3, viz obr. 6.



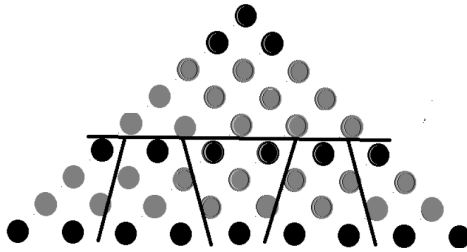
Obr. 4: Ilustrace identity (1) pro $n = 1, 2, 3$

Věta 4. Pro každé přirozené číslo $k \geq 3$ platí

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{(n+1 + (k-2)) + (n+1 + 2(k-2)) + \cdots + (n+1 + n(k-2))} = \frac{1}{k}.$$



Obr. 5: Ilustrace identity (2) pro $n = 1, 2$



Obr. 6: Ilustrace identity (3) pro $n = 2$

Důkaz.

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + k - 1) + (n + 2k - 3) + \dots + (n + (k - 2)n + 1)} = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(kn+k)n}{2}} = \frac{1}{k}.$$

Po dosazení $k = 3$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 2) + (n + 3) + \dots + (n + n + 1)} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Po dosazení $k = 4$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 3) + (n + 5) + \dots + (n + 2n + 1)} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Po dosazení $k = 5$ do věty 4 máme vztah

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 4) + (n + 7) + \dots + (n + 3n + 1)} = \frac{1}{5}. \quad (3)$$

4. Otázky pro čtenáře

Pokuste se vymyslet další analogické identity pro všechny zlomky tvaru $1/k$. A pošlete nám je do redakce, rádi se podíváme, jaké jste objevili.

Můžete také zkusit dokázat další zajímavý vztah, který platí pro libovolnou m -tici po sobě jdoucích přirozených čísel, kde $m \geq 3$, a říká, že když v čitateli sečteme první a poslední člen dané m -tice a ve jmenovateli sečteme všechny členy mezi prvním a posledním, dostaneme zlomek $2/(m-2)$.

Příklad.

Pro $m = 3$ a trojici $(1, 2, 3)$ dostaneme $\frac{1+3}{2} = 2$.

Pro $m = 4$ a čtveřici $(3, 4, 5, 6)$ máme $\frac{3+6}{4+5} = 1$.

Pro $m = 5$ a pěťici $(10, 11, 12, 13, 14)$ vychází $\frac{10+14}{11+12+13} = \frac{2}{3}$.

Vztah platí nejen pro přirozená čísla, ale pro aritmetické posloupnosti obecně.

Věta 5. *Nechť (a_n) je libovolná aritmetická posloupnost s kladnými členy. Nechť m je přirozené číslo, $m \geq 3$, a k celé nezáporné číslo. Pak platí*

$$\frac{a_{k+1} + a_{k+m}}{a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots + a_{k+m-1}} = \frac{2}{m-2}.$$

Poděkování

Rád bych poděkoval paní šéfredaktořce Ľubomíře Dvořákové za pomoc se strukturou a jazykovou stránkou článku.

Literatura

- [1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.
- [2] Tlustý, P.: Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 39–43.
- [3] Nájares Romero, J. M.: Přirozená čísla ve zlomcích. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 34–38.