Učitel matematiky

František Kuřina; Jana Cachová

Geometrické místo, nebo množina bodů

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 3, 130–146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153146

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

GEOMETRICKÉ MÍSTO, NEBO MNOŽINA BODŮ

František Kuřina, Jana Cachová

Úvod

V první části článku se budeme zabývat pojmem geometrické místo bodů, ve druhé části uvedeme několik vhodných úloh k vyhledání geometrického místa bodů.

Geometrická místa bodů

V roce 1964 napsal Jan Vyšín, významný didaktik matematiky své doby:

> Neměli bychom užívat zastaralého termínu „geometrické místo bodů“ (tento název pochází od Platóna!) a měli bychom důsledně říkat „množina bodů“. Tento požadavek má hlubší důvody než pouhé „zmodernizování“ termínu; chceme totiž vštípit žákům, že „geometrická místa bodů“ jsou útvary mnohem rozmanitější než jisté křivky (takové bylo tradiční pojetí tohoto pojmu), a chceme s těmito útvary skutečně pracovat jako s množinami, např. při zjišťování totožnosti dvou množin, při tvoření průniku apod. (Hruša & Vyšín, 1964, s. 192).

Nepodařilo se nám ověřit, zda Platón byl opravdu autorem pojmu geometrické místo bodů, avšak je-li tomu tak, povedlo se Vyšínovi neuvěřitelné. Několika řádky vytlačil termín starý více než 2 300 let z naší školy.

V období tzv. modernizace vyučování matematice se tedy nahradil pojem geometrické místo bodů (dále jen GMB) termínem

množina bodů. Množinami bodů byly vnímány i veškeré geometrické pojmy.

Avšak: Co je to bod?

Např. podle Kabeleho a kol. (1976) se definuje např. trojúhelník MNP jako množina všech bodů S, které leží na úsečce MR, kde R je libovolný bod strany PN.

Množinami bodů jsou i úsečky. Přitom v případě modelu úsečky je bod reprezentován kuličkou z plastické gumy. U Hruši a Vyšína (1964) je úsečka rovněž nahlížena jako množina bodů, přičemž body jsou vykládány jako korálky na napjaté niti. Žádný z těchto přístupů nepovažujeme za vhodný. Vždyť přece na libovolně dlouhé niti je sebemenších korálků jen konečný počet. Jde vlastně jen o jistou formu Archimédova axiomu: Jsou-li AB a CD libovolné dvě úsečky, pak nanášíme-li úsečku CD na polopřímku AB, dostaneme se po konečném počtu kroků „za bod B“ (obr. 1).



Obr. 1

V období „množinového opojení“ modernizují autoři učebnic svůj jazyk. Přitom např. v Anglii se stále používá termín GMB. Např. ve slovníku z roku 1989 užívají angličtí autoři:

> ... locus (*plural* loci) A set of points satisfying given conditions. For instance, the locus of points in a plane that are all a distance r from a given point in the plane is a circle. The equation of the locus, in Cartesian coordinates, is $x^2 + y^2 = r^2$ ... (Daintith & Nelson, 1989, s. 203).

Souhlasíme s názorem Jaroslava Šedivého (1977), že termín geometrické místo bodů označuje takovou část základní množiny, jejíž prvky mají dané vlastnosti. Jde tedy o množiny, podobně jako množinu kořenů řešení rovnic atp.

Termín GMB budeme chápat takto:

Útvar U je GMB vlastnosti V, právě když platí:

1. Každý prvek útvaru U má vlastnost V.
2. Každý prvek, který má vlastnost V, náleží útvaru U.

Ve škole můžeme užívat jak termín množina všech bodů dané vlastnosti, tak i termín GMB.

Jak bychom měli seznamovat žáky s termínem bod? Všimněme si podnětů z jazyka.

Nejvýše položené místo na hoře je bod (triangulační). Místo společné dvěma různoběžným přímkám je bod, který se nazývá průsečík. Místo společné třem stěnám krychle je vrchol krychle. Z angličtiny známe například místo setkání – meeting point.

V duchu těchto příkladů budeme chápat v souladu s Platónem GMB jako množinu míst na přímce, v rovině nebo v prostoru.

Úsečka AB je množina všech míst, kterými musíme projít při pohybu od místa A nejkratší cestou do místa B. Úsečka AB je množina všech míst, která leží mezi body A, B (spolu s body A, B). V množinové symbolice a s použitím symbolu $|AB|$ pro vzdálenost bodů A, B můžeme psát:

$$AB = \{X \in \varrho : |AX| + |XB| = |AB|\}\,.$$

Chápání bodu jako místa v prostoru je v souladu s názorem Petra Vopěnky (2013, s. 61):

> ... Protože klasický geometrický prostor se stal prostorem reálného světa, stala se i geometrie vědou nikoliv pouze o ideálním geometrickém světě, ale přímo o světě reálném, neboli vědou přírodní. Do reálného světa tak vstoupily i ideální geometrické objekty jako body, přímky, kružnice a podobně, ne nutně jako samostatné reálné objekty, ale přinejmenším jako místa v reálném prostoru ...

Vyšínova kritika Platóna z roku 1964 snad nebyla podle našeho názoru zcela oprávněná.

Úlohy

Ve všech úlohách hledáme GMB v rovině. Tento požadavek není explicitně u jednotlivých úloh uveden. Budeme užívat tuto symboliku:

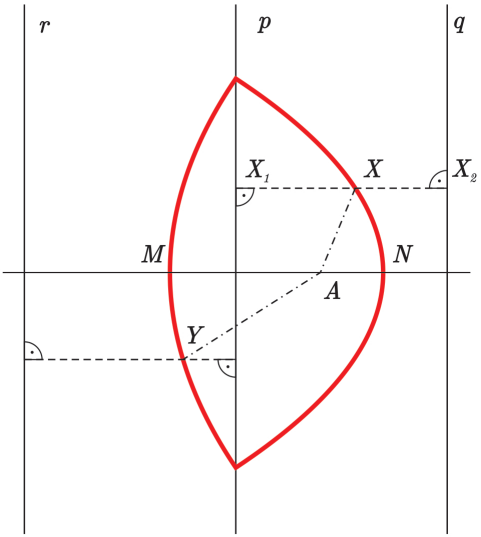
- $|AB|$ ... vzdálenost bodů A, B
- $|MN|$ ... vzdálenost geometrických útvarů M, N
- h ... hranice oblasti
- $I(h)$ ... vnitřní oblast s hranicí h
- $E(h)$ ... vnější oblast s hranicí h
- ϱX ... polorovina s hranicí ϱ a vnitřním bodem X
- $P(a, b)$ ... pás roviny s hranicemi a, b

Vzdáleností bodu B od útvaru M rozumíme nejmenší ze vzdáleností $|BX|$, kde X je libovolný bod útvaru M.

Úloha 1. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Určete geometrické místo bodů X, které mají od bodu A a přímky p součet vzdáleností s (kde s je kladné reálné číslo; $s > |Ap|$).

Sestrojme přímky r, q rovnoběžné s p ve vzdálenostech s od přímky p.

Je-li bod X bodem hledaného GMB, platí v označení podle obrázku 2: $|XA| + |Xp| = s$.



Obr. 2

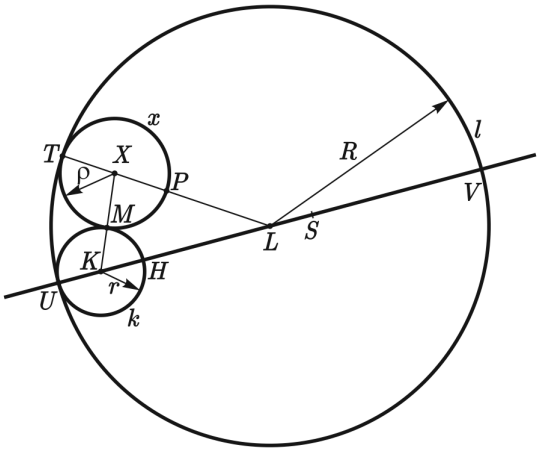
To ovšem znamená, že: $|XA| = |Xq|$.

Bod X náleží parabole s ohniskem A a řídicí přímkou q.

V polorovině opačné k polorovině pA lze stejným způsobem ukázat, že k hledanému geometrickému místu náleží body paraboly s ohniskem A a řídicí přímkou r.

Pro libovolný bod zobrazených oblouků parabol zřejmě platí, že součet vzdáleností tohoto bodu od bodu A a od přímky p je rovný číslu s. Hledaným GMB jsou tedy zobrazené oblouky těchto parabol.

Úloha 2. Kružnice $k(K, r)$ se dotýká zevnitř kružnice $l(L, R)$ v bodě U. Vyšetřete geometrické místo středů X kružnic x, které mají vnější dotyk s kružnicí k a vnitřní dotyk s kružnicí l (obr. 3).



Obr. 3

Je-li X bod hledaného geometrického místa bodů, pak v označení podle obrázku 2 platí:

$$|KX| = r + \varrho,$$

kde ϱ je poloměr jedné z hledaných kružnic, a

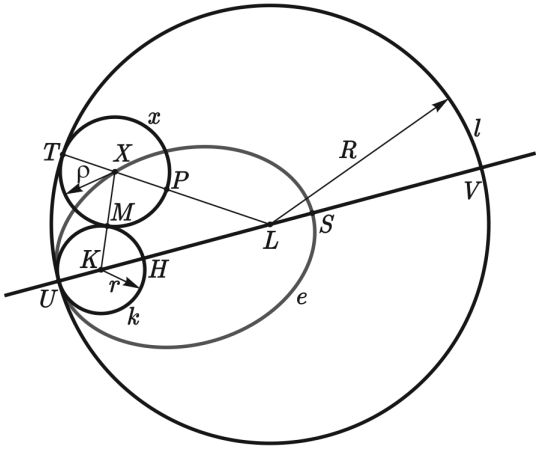
$$|LX| = R - \varrho.$$

Je tedy:

$$|KX| + |LX| = r + R. \tag{1}$$

Bod X proto leží na elipse e s ohnisky K a L a hlavní osou o velikosti $(r + R)$. Tato elipsa prochází bodem U a středem S úsečky HV (v označení podle obrázku 4).

Je-li X libovolný bod elipsy e, označme M průsečík úsečky KX s kružnicí k a T průsečík polopřímky LX s kružnicí l. Každá kružnice $x(X; |XM|)$ se v bodě M dotýká kružnice k. Každá kružnice $x(X; |TX|)$ se v bodě T dotýká kružnice l.



Obr. 4

Protože podle konstrukce je $|MX| = (|KX| - r)$ a $|TX| = (R - |LX|)$, je $|MX| = |TX|$, neboť tato rovnost je ekvivalentní s rovností $|KX| - r = R - |LX|$, neboli (1).

Náleží-li bod X elipse e, pak je středem kružnice, která se dotýká kružnic k a l.

Množinou středů kružnic, které se dotýkají kružnic k a l, je elipsa e s ohnisky K a L a hlavní osou o velikosti $(r + R)$. Bod U musíme ovšem z hledaného geometrického místa vynechat.

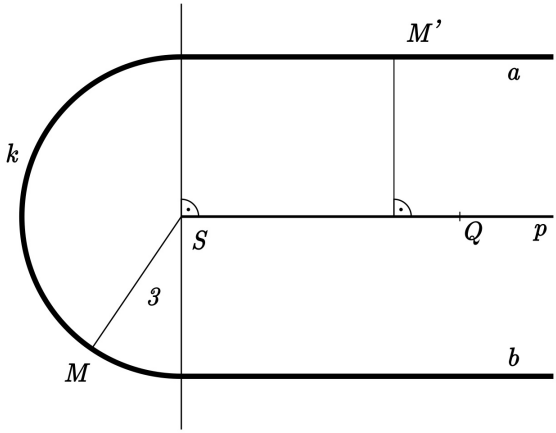
Dalšími úlohami budeme ilustrovat větu:

Jsou-li $M(X)$, $N(X)$, $P(X)$ výrokové formy definované na množině ϱ, Q, R, T obory jejich pravdivosti, a platí-li pro každý bod $X \in \varrho$: $M(X) \vee N(X) \vee P(X) = 1$, pak $Q \cup R \cup T = \varrho$.

U úloh uvádíme pouze výsledky. Podrobné řešení ponecháváme čtenáři.

Úloha 3. Je dána polopřímka $p = SQ$. Vyšetřete GMB, které jsou od polopřímky p vzdáleny

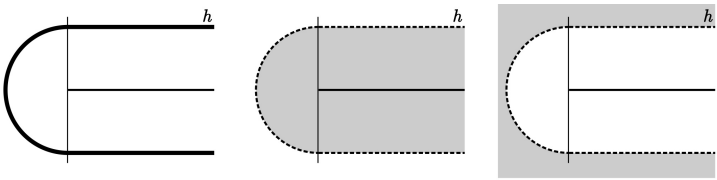
a) právě 3 cm;
b) méně než 3 cm;
c) více než 3 cm.



Obr. 5

V označení podle obrázku 5 dostáváme tyto výsledky (viz obr. 6):

a) sjednocení h polopřímek a, b a kružnicového oblouku k: $h = a \cup b \cup k$;
b) vnitřek útvaru s hranicí h: $I(h)$;
c) vnějšek útvaru s hranicí h: $E(h)$.

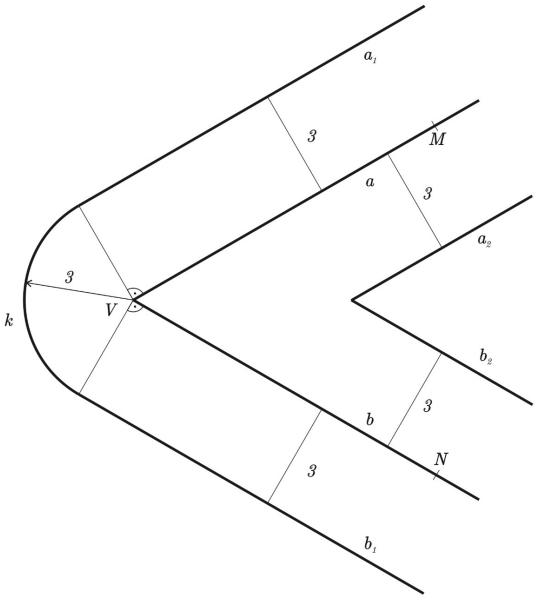


a) h b) $I(h)$ c) $E(h)$

Obr. 6

Úloha 4. Je dán dutý úhel s rameny $a = \overrightarrow{VM}$, $b = \overrightarrow{VN}$. Určete GMB, které jsou od ramen a, b vzdáleny

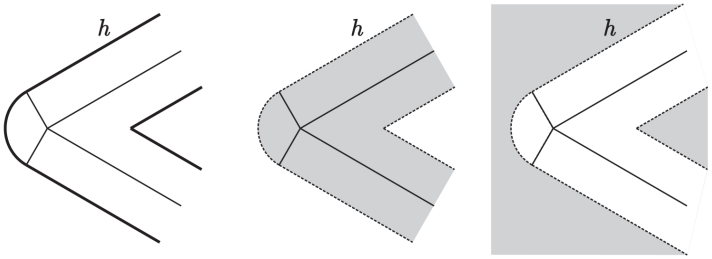
a) právě 3 cm;
b) méně než 3 cm;
c) více než 3 cm.



Obr. 7

V označení podle obrázku 7 dostáváme tyto výsledky (viz obr. 8):

a) Sjednocení h polopřímek a_1, a_2, b_1, b_2 s kružnicovým obloukem k: $h = a_1 \cup k \cup b_1 \cup a_2 \cup b_2$.
b) Vnitřní oblast s hranicí h: $I(h)$.
c) Vnější oblast s hranicí h: $E(h)$.

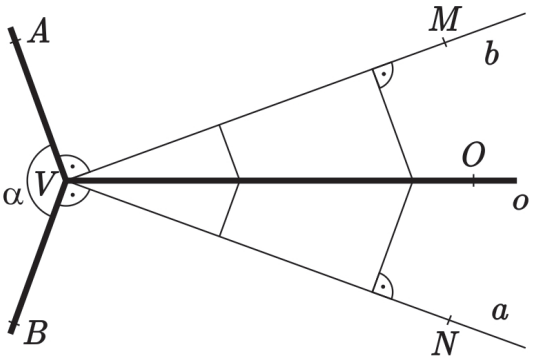


a) h b) $I(h)$ c) $E(h)$

Obr. 8

Úloha 5. Je dán dutý úhel s rameny $a = \overleftrightarrow{VN}$ a $b = \overleftrightarrow{VM}$. Vyšetřete GMB, které jsou

a) stejně vzdáleny od polopřímky a jako od polopřímky b;
b) které jsou blíže k polopřímce a než k polopřímce b;
c) které jsou blíže k polopřímce b než k polopřímce a.



Obr. 9

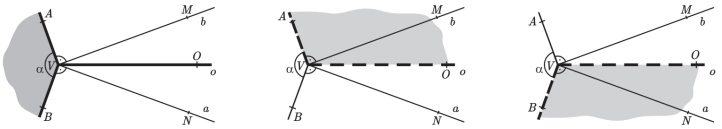
Vzdálenosti bodů od ramen úhlu měříme dvojím způsobem. V úhlu $\sphericalangle AVB$ je vzdálenost bodu od ramen úhlu rovna jeho vzdálenosti od vrcholu V.

V úhlu $\sphericalangle MVN$ je částí hledané množiny osa úhlu $\sphericalangle MVN$. V úhlu $\sphericalangle AVO$ měříme vzdálenost od polopřímky na kolmici k rameni VM. Podobně je tomu v úhlu $\sphericalangle BVO$.

V souladu s poslední poznámkou před úlohou 1 zde v článku můžeme postupovat tak, že pokud pata kolmice spuštěné z libovolného bodu např. na přímku VM neleží na polopřímce VM, pak je tím nejbližším bodem útvaru, od kterého měříme vzdálenost, bod V.

V označení podle obrázku 9, kde o je osa úhlu $\sphericalangle MVN$, dostaneme tyto výsledky (viz obr. 10):

a) $\sphericalangle AVB \cup o$;
b) $\sphericalangle AVO$;
c) $\sphericalangle OVB$.



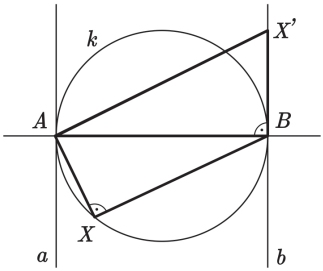
a) $\sphericalangle AVB \cup o$ b) $I(\sphericalangle AVO)$ c) $I(\sphericalangle OVB)$

Obr. 10

Úloha 6. V rovině ϱ, z níž je vyňata přímka AB, vyšetřete GM vrcholů X trojúhelníků ABX

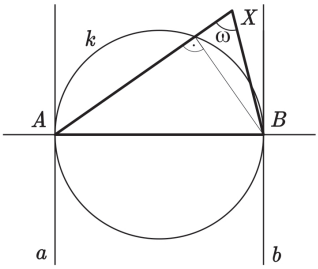
a) pravoúhlých;
b) ostroúhlých;
c) tupoúhlých.

a) Podle Thalétovy věty je hledaným GM kružnice k a přímky a, b podle obrázku 11 (ovšem mimo bodů A, B).



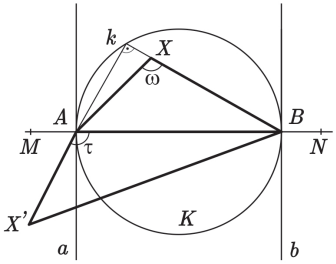
Obr. 11

b) GM vrcholů X ostroúhlých trojúhelníků ABX je vnitřek rovinného pásu P s hranicemi a, b mimo kruh s hranicí k (viz obr. 12).



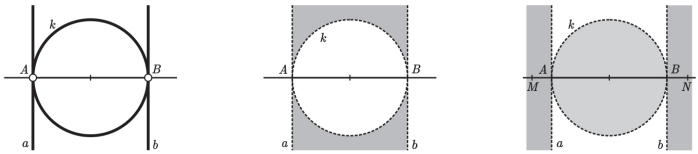
Obr. 12

c) GM vrcholů X tupoúhlých trojúhelníků ABX je vnitřní oblast kruhu K s hranicí k, spolu s vnitřními oblastmi polorovin aM a bN (ovšem mimo přímku AB) (viz obr. 13).



Obr. 13

Přehled výsledků je na obrázku 14.

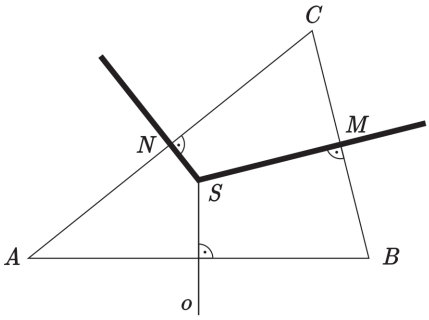


a) $k \cup a \cup b \setminus \{A, B\}$ b) $P \setminus K$ c) $I(K) \cup I(aM) \cup I(bN)$

Obr. 14

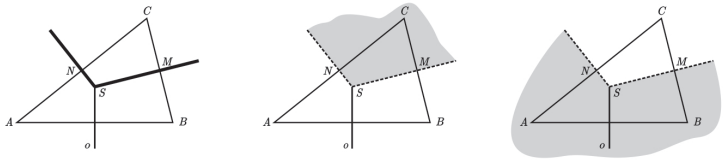
Úloha 7. Je dán trojúhelník ABC. Určete GMB, které mají a) stejnou; b) menší; c) větší vzdálenost od množiny $\{A, B\}$ jako od bodu C.

Sestrojme nejdříve středy stran trojúhelníku ABC a označme je M, N, O podle obrázku 15. S je střed kružnice trojúhelníku ABC opsané. V polorovině oA znamená vzdálenost libovolného bodu od množiny $\{A, B\}$ vzdálenost tohoto bodu od bodu A, v polorovině opačné pak vzdálenost téhož bodu od bodu B.



Obr. 15

GMB stejně vzdálených od $\{A, B\}$ jako od bodu C jsou tedy polopřímky SN a SM. Tato lomená čára ι dělí rovinu na dvě disjunktní oblasti, v nichž je vzdálenost libovolného bodu od $\{A, B\}$ menší, nebo větší než vzdálenost téhož bodu od bodu C. Přehled výsledků je na obrázku 16.



a) ι b) $I(\iota C)$ c) $I(\iota A)$

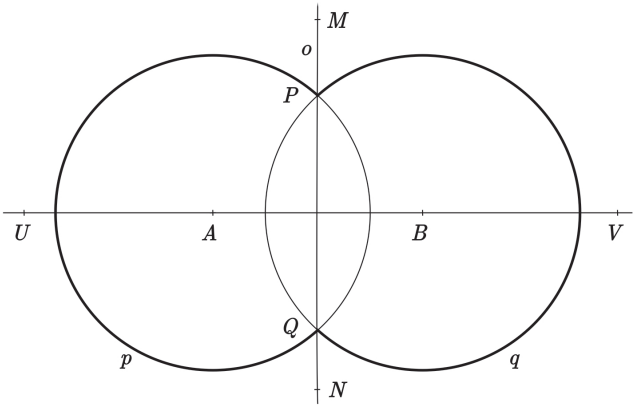
Obr. 16

Úloha 8. Je dána úsečka AB dlouhá 5 cm. Vyšetřete GMB, které jsou od množiny $\{A, B\}$ vzdáleny

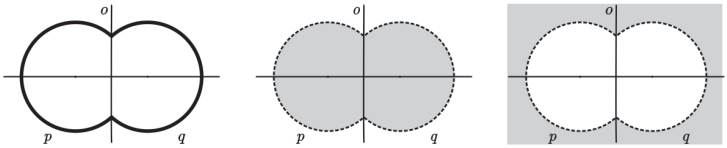
a) 3 cm;
b) méně než 3 cm;
c) více než 3 cm.

Sestrojme kružnice s poloměrem 3 cm a středy v bodech A, B a osu o úsečky AB.

GMB vzdálených od množiny $\{A, B\}$ právě 3 cm je sjednocení kružnicových oblouků p, q sestrojených kružnic (viz obr. 17). Tyto kružnicové oblouky tvoří geometrický útvar $h = p \cup q$. Útvar h dělí rovinu na dvě disjunktní oblasti. V jedné je vzdálenost bodů od $\{A, B\}$ menší, ve druhé větší než 3 cm, přehledně viz obrázek 18.



Obr. 17



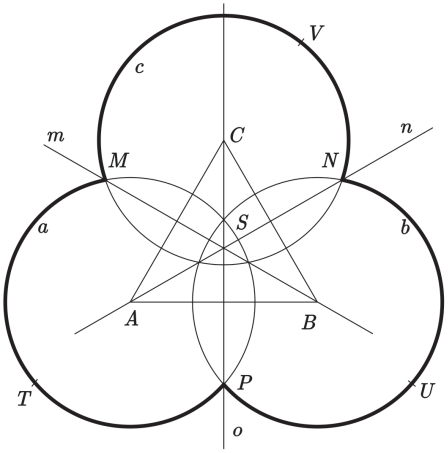
a) h b) $I(h)$ c) $E(h)$

Obr. 18

Úloha 9. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranami dlouhými 5 cm. Určete GMB, které jsou od množiny $\{A, B, C\}$ vzdáleny

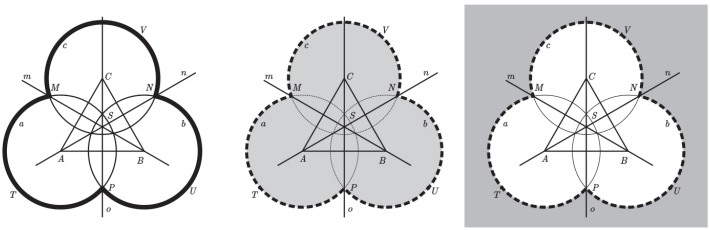
a) právě 3 cm;
b) méně než 3 cm;
c) více než 3 cm.

Sestrojme kružnice s poloměrem 3 cm a středy v bodech A, B, C a označme jejich průsečíky M, N, P podle obrázku 19. Dále označme S průsečík přímek MB, NA a PC. V konvexním úhlu MSP je vzdálenost jeho vnitřního bodu od množiny $\{A, B, C\}$ rovna vzdálenosti tohoto bodu od bodu A. Podobně je tomu v konvexních úhlech MSN a NSP.



Obr. 19

GMB vzdálených 3 cm od množiny $\{A, B, C\}$ je sjednocení h tučně nakreslených kružnicových oblouků a, b, c. Ve vnitřní oblasti s hranicí h jsou body vzdálené od množiny $\{A, B, C\}$ méně než 3 cm, ve vnější oblasti s touto hranicí jsou body vzdálené od množiny $\{A, B, C\}$ více než 3 cm (viz obr. 20).

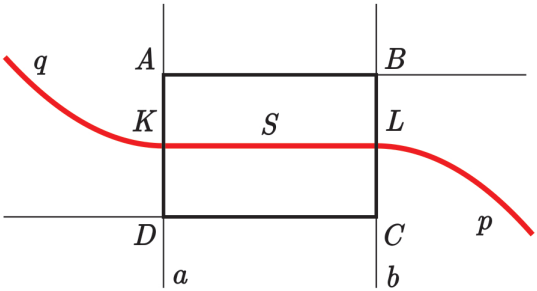


a) h b) $I(h)$ c) $E(h)$

Obr. 20

Úloha 10. Je dán obdélník $ABCD$. Vyšetřete GMB. které jsou v rovině

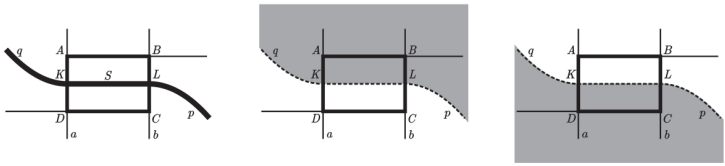
a) stejně vzdáleny od polopřímek AB a CD;
b) blíže vzdáleny od polopřímky AB než od polopřímky CD;
c) dále vzdáleny od polopřímky AB než od polopřímky CD.



Obr. 21

V rovinném pásu ohraničeném rovnoběžnými přímkami a, b tvoří body stejně vzdálené od polopřímek AB a CD střední příčku KL obdélníku $ABCD$ (obr. 21).

V polorovině opačné k polorovině bA platí, že pro body stejně vzdálené od obou polopřímek je jejich vzdálenost od jedné nebo druhé polopřímky rovna vzdálenosti bodu C od přímky AB. Touto množinou je tedy oblouk p paraboly s ohniskem C a řídicí přímkou AB. Podobně sestrojíme oblouk q paraboly s ohniskem A a řídicí přímkou DC. Body stejně vzdálené od obou polopřímek tvoří sjednocení h parabolických oblouků p a q a střední příčky KL obdélníku $ABCD$. V jedné části roviny s hranicí h jsou body blíže vzdálené k polopřímce AB, ve druhé oblasti se nacházejí body, které jsou dále vzdálené od polopřímky AB. Přehledně viz obrázek 22.



a) h b) $I(h)$ c) $E(h)$

Obr. 22

Ve škole by patrně bylo vhodné poukázat na tři možnosti vzdáleností bodu od geometrického útvaru na příkladu kružnice, osy úseček, přímek rovnoběžných a různoběžných a podobně.

Literatura

[1] Daintith, J., & Nelson, R. D. (1989). *Dictionary of mathematics*. Penguin.

[2] Hruša, K., & Vyšín, J. (1964). *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní škole*. SPN.

[3] Kabele, J., Janků, M., & Hruša, K. (1976). *Metodický list pro učitele k učebnici matematiky pro 2. ročník ZŠ*. SPN.

[4] Šedivý, J. (1977). *O modernizaci školské matematiky*. SPN.

[5] Vopěnka, P. (2013). *Hádání v hospodě*. Práh.

Abstract

In the first part of the article we present a historical perspective on the replacement of the traditional term locus by the "modern" term set of points. We define our position on this substitution of the term. The formulation of our position is followed by ten solved problems where we search for the locus. These problems illustrate that in school we can use not only the term set of all points of a given property, but also the term locus.

František Kuřina
e-mail: kurinovi@gmail.com
Jana Cachová
e-mail: jana.cachova@uhk.cz
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové