Učitel matematiky

Johanka Sadílková; Vlasta Moravcová

Teoretické řešení plochých střech v programu GeoGebra

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 3, 179–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153149

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

TEORETICKÉ ŘEŠENÍ PLOCHÝCH STŘECH V PROGRAMU GEOGEBRA

Johanka Sadílková, Vlasta Moravcová

Úvod

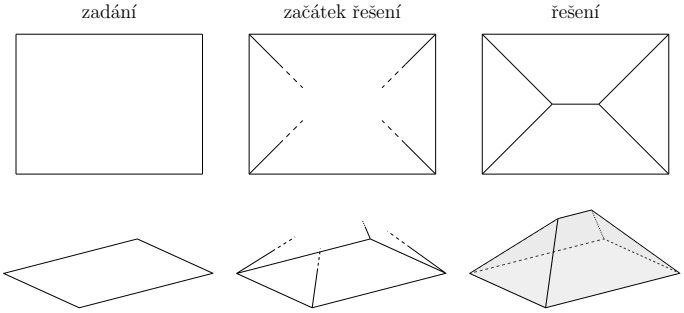
Kótované promítání patří mezi zobrazovací metody deskriptivní geometrie vyučované na středních a vysokých školách. Jednou z jeho aplikací je teoretické řešení střech, neboli sestrojení střechy (odpovídající nějakým vstupním předpokladům) nad daným půdorysem budovy. V současnosti je k dispozici řada on-line materiálů zaměřených na teorii a vzorové příklady k tomuto tématu. Například v diplomové práci (Bisová, 2020) je možné najít úlohy s podrobným řešením různých typů střech včetně jejich 3D náhledů nebo v diplomové práci (Bezstarostová, 2022) jsou vytvořeny a popsány nástroje v programu GeoGebra, které řešení střech usnadňují. S každým rokem se objevují nové zdroje podporující studium i vedení výuky teoretického řešení střech, které usnadňují práci učitele. Při procházení dostupných materiálů na internetu jsme však nenalezli jeden univerzální nástroj pro řešení plochých střech, který by mohl učitel či student využít k jednoduché a rychlé kontrole svého řešení a k prohloubení geometrické představivosti. To motivovalo první z autorek tohoto příspěvku k vytvoření GeoGebra appletu věnovanému této problematice. Než však applet (Sadílková, 2024) podrobněji představíme, stručně připomeneme teoretické řešení střech a pojem Voroneho diagram, na jehož principu applet funguje.

Jak úvodní odstavec naznačuje, příspěvek je určen především učitelům deskriptivní geometrie. Může však rozšířit povědomí o využití elementárních matematických pojmů a vztahů v praxi také učitelům matematiky základních i středních škol. Jedná se

především o uplatnění stereometrie, neboť řešení střech je založeno na určování vzájemných poloh dvou i více rovin, hledání průsečnic rovin a práci s trsem rovin. V našem příspěvku dále pracujeme s pojmy rotační kuželová plocha a jehlanová plocha či s množinou bodů v rovině, konkrétně s osou úsečky jako množinou bodů stejně vzdálených od krajních bodů této úsečky v eukleidovské i manhattanské metrice. V neposlední řadě může být inspirací dále popsaný proces vizualizace prostorových útvarů, modelování situací pomocí softwaru dynamické geometrie a jeho užití k řešení prostorové úlohy v rovině.

Teoretické řešení střech

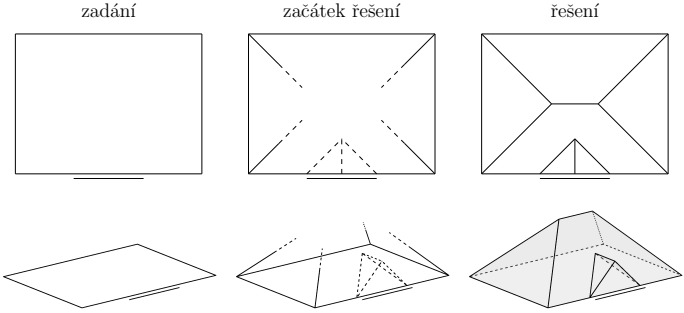
V příspěvku se věnujeme pouze střechám tvořeným částmi rovin s konstantním spádem, přičemž určující prvky těchto rovin leží v jedné horizontální rovině. Takové střechy jsou obvykle řešeny na střední škole v rámci deskriptivní geometrie a příbuzných předmětů. Dle určujících prvků můžeme rozlišit střechy s okapy, bez okapů, popřípadě střechy s oběma těmito prvky.



Obr. 1: Řešení valbové střechy

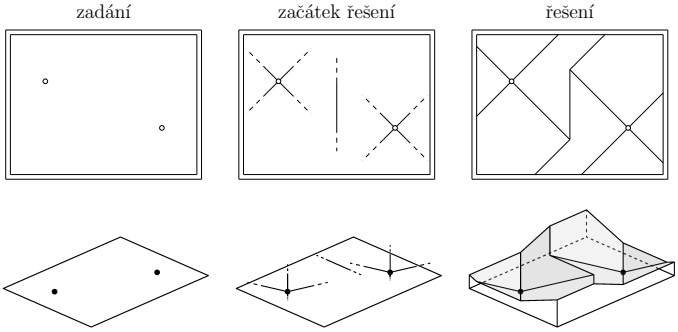
Ukázkou střechy s okapy je řešení valbové střechy nad obdélníkovým půdorysem (obr. 1). Zadáním je obdélník v horizontální rovině a úkolem je nalézt průsečnice jednotlivých střešních rovin navzájem stejného spádu, které prochází stranami daného obdélníku. Tyto strany nazýváme okapy střechy.

Některé okapy nebo jejich části mohou být tzv. zakázané (v zadání znázorněno dvojitou čarou), což má vliv na výsledný tvar střechy (obr. 2). V případě, že jsou zakázané všechny okapy, musí být zadáno jedno nebo více jednobodových odtokových míst nazývaných výpusť či gula. Opět předpokládáme, že všechny výpusti leží v jedné horizontální rovině. U střech tohoto typu zpravidla volíme malý spád střešních rovin (menší než 5°) a nazýváme je střechami plochými.



Obr. 2: Řešení valbové střechy se zakázaným okapem

Ukázka střechy se všemi zakázanými okapy je na obrázku 3. Při řešení plochých střech hledáme průsečnice takových střešních rovin, které jsou rovnoběžné se stranami půdorysu dané budovy a zároveň procházejí danými výpusťmi.

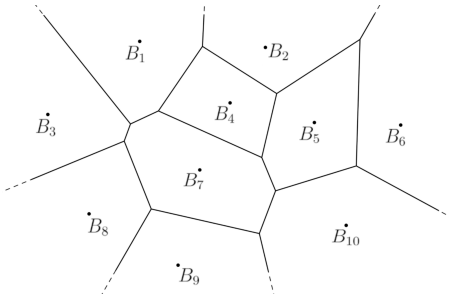


Obr. 3: Řešení ploché střechy zadané dvěma odtoky

Voroneho diagram

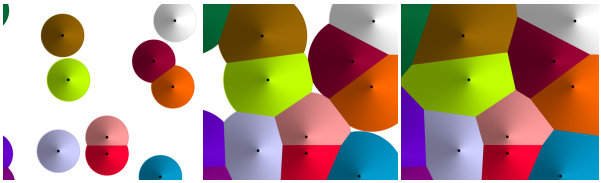
Na obrázku 3 vpravo dole vidíme dva trsy střešních rovin, na které můžeme nahlížet jako na části shodných jehlanových ploch s vrcholy ležícími ve stejné horizontální rovině. Část řešení střechy je tvořena jejich průnikem. Tento princip ilustrujme na obecnějším příkladu z matematiky, kterým je Voroneho diagram, a poté se k myšlence s jehlanovými plochami vrátíme.

Obecnou definici Voroneho diagramu a další s ním související poznatky lze nalézt například v (Samková, 2007). My se budeme zabývat Voroneho diagramem v rovině, který lze definovat následovně: Mějme rovinu ϱ a množinu jejích navzájem různých bodů B_i. Voroneho diagramem v rovině rozumíme rozdělení roviny na souvislé oblasti $V(B_i)$ takové, že každý bod oblasti $V(B_i)$ je blíže k bodu B_i než k libovolnému bodu B_j, kde $i \neq j$.



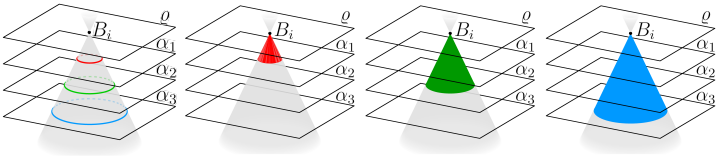
Obr. 4: Voroneho diagram v rovině

Je zřejmé, že Voroneho diagram zadaný dvěma různými body B_1, B_2 je tvořen dvěma polorovinami, jejichž hranicí je osa úsečky B_1B_2. Na obrázku 4 je příklad Voroneho diagramu zadaného 10 body. Jeho jednotlivé oblasti jsou ohraničeny částmi os úseček B_iB_j, $i \neq j$. Uvědomme si, že osa úsečky B_iB_j je množinou společných bodů všech kružnic $k_i(B_i; r)$, $k_j(B_j; r)$, kde r probíhá kladná reálná čísla. Proces vzniku Voroneho diagramu si tedy můžeme také představit pomocí navzájem shodných kruhů se středy v bodech B_i a postupně se zvětšujícími poloměry (obr. 5). Tuto situaci lze však také reprezentovat pomocí rotačních kuželových ploch.



Obr. 5: Tvorba Voroneho diagramu pomocí kruhů, generováno v (Walsh, 2017)

Uvažujme umístění roviny ϱ do prostoru, kde body B_i ztotožníme s vrcholy shodných rotačních kuželových ploch, jejichž osy jsou kolmé k rovině ϱ (obr. 6). Kruhy s postupně se zvětšujícími poloměry můžeme simulovat pomocí pohybu roviny α, kterou v počáteční fázi ztotožníme s rovinou ϱ a následně ji posouváme ve směru kolmém k rovině ϱ (přičemž se pohybujeme pouze v jednom poloprostoru vymezeném rovinou ϱ). Pravoúhlý průmět částí kuželových ploch vymezených rovinným pásem $\varrho\alpha$ do roviny α pak odpovídá kruhům generujícím Voroneho diagram. Podotkněme, že v prostorové situaci (obr. 7) je průnikem každé dvojice sousedních kuželových ploch hyperbola, jejíž část se v daném pravoúhlém průmětu zobrazí jako úsečka, popřípadě polopřímka či přímka.



Obr. 6: Řezy rotační kuželové plochy pohybující se rovinou α



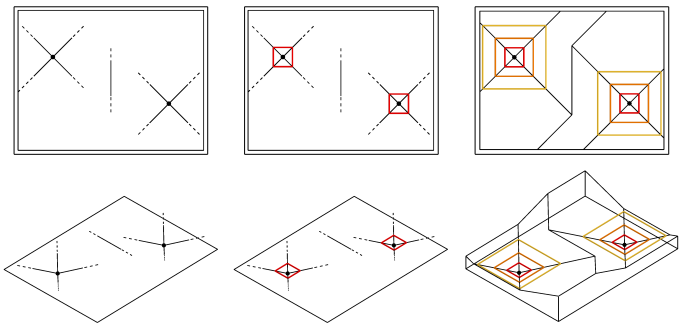
Obr. 7: Tvorba Voroneho diagramu pomocí kuželových ploch, generováno v (Walsh, 2017)

Poznamenejme, že v programu GeoGebra existuje speciální funkce, která ze seznamu bodů dokáže sestrojit Voroneho diagram v rovině. Stačí do vstupního příkazového řádku zadat `Voronoi(<Seznambodu>)`.

Využití poznatků o Voroneho diagramu při řešení plochých střech pomocí appletu

Poznatky o Voroneho diagramu v rovině, zejména myšlenku jeho konstrukce pomocí průniků navzájem shodných rotačních kuželových ploch, nyní využijeme při teoretickém řešení plochých střech.

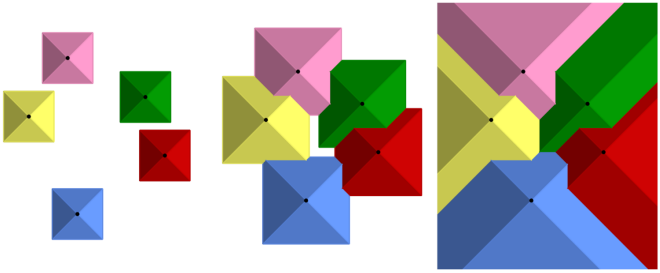
Pracujme se zadáním střechy z obrázku 3. Body, které představují odtoky, ztotožníme s body zadávajícími Voroneho diagram a podrobně rozebereme postup řešení této konkrétní střechy. Z každého z daných bodů vedeme čtyři polopřímky – průměty průsečnic střešních rovin (obr. 8 vlevo). Průsečnice dvou rovin se v kótovaném promítání sestrojuje nejčastěji pomocí hlavních přímek roviny, tj. přímek, které náleží dané rovině a zároveň jsou rovnoběžné s průmětnou. Uvažujeme-li roviny procházející jednou gulou a sestrojíme-li průměty hlavních přímek těchto rovin o stejné kótě (výšce), vymezí tyto přímky čtverec, jehož úhlopříčky náleží již sestrojeným průmětům průsečnic (obr. 8 uprostřed). Budeme-li proces opakovat, zjistíme, že pro libovolnou kótu můžeme sestrojit odpovídající skupinu průmětů hlavních přímek, které vždy vy-



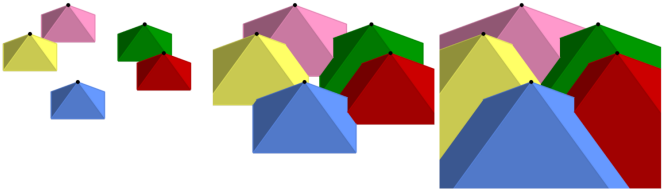
Obr. 8: Zobrazení částí hlavních přímek v řešení střechy

mezí čtverec. Proces hledání této střechy si tedy můžeme představit pomocí navzájem shodných dvojic čtverců s pevnými středy v daných bodech (průsečík úhlopříček) a postupně se zvětšujícími velikostmi stran (obr. 8 vpravo).

Tyto postupně se zvětšující čtverce můžeme prezentovat prostorově, stejně jako jsme kruhy prezentovali pomocí kuželových ploch u Voroneho diagramu. V předchozí kapitole jsme již zmínili, že v obrázku 3 vpravo dole (a také nyní v obrázku 8) vidíme dva trsy střešních rovin. Na tyto trsy rovin můžeme nahlížet jako na navzájem shodné jehlanové plochy s vrcholy ve stejné horizontální rovině. Kruhy tedy nahradíme čtverci[1] (obr. 9) a kuželové plochy jehlanovými plochami (obr. 10).



Obr. 9: Proces řešení střechy pomocí čtverců



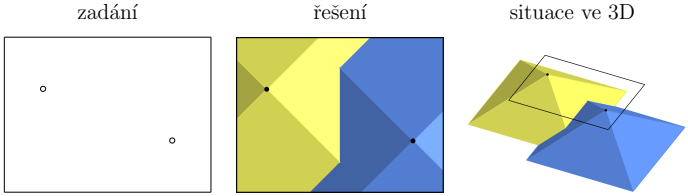
Obr. 10: Proces řešení střechy pomocí jehlanových ploch

Postupně se zvětšující čtverce s pevně danými středy úhlopříček z obrázku 9 simulují proces hledání průmětů průsečnic

[1] Čtverce místo kruhů lze také získat pomocí manhattanské metriky, viz (Moravcová & Skálová, 2023). Voroneho diagram sestrojený v této metrice odpovídá části řešení střechy.

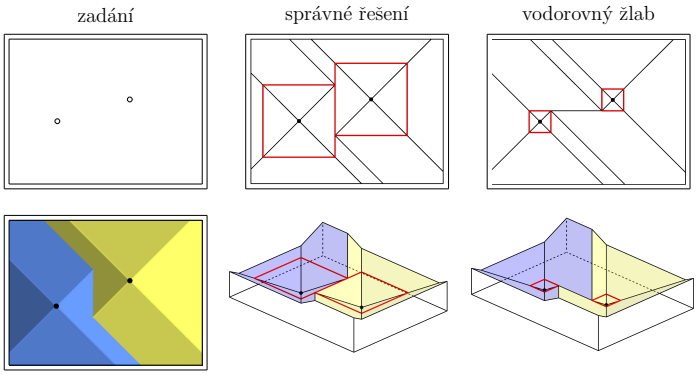
střešních rovin. Úhlopříčky čtverců představují průměty průsečnic, které přímo vycházejí z daných gul. Hranice, kde se čtverce o sebe v obrázku 9 „zastaví“ (tj. hranice dvou barev), pak představují průměty průsečnic, které jsou rovnoběžné s průmětnou. Společně tvoří řešení dané střechy. Zdůrazněme, že oproti situaci s Voroneho diagramem, kde jsme využili pouze průmět průniků kuželových ploch, zde využíváme i průměty částí hran jehlanových ploch.

Všimněme si, že oproti představě z obrázků 3 a 8, kde pro vrchol jehlanové plochy představující trs střešních rovin platí, že z něj vycházíme „nahoru“ (jelikož tvoříme odtok), v obrázku 10 postupujeme opačně, tj. z vrcholu vycházíme „dolů“. Tímto způsobem totiž v GeoGebře 3D získáváme vhodnou viditelnost – vidíme pouze ty části hran jehlanových ploch, které skutečně představují v průmětu řešení střechy, a také pouze ty části společných průsečnic jehlanových ploch, které v průmětu opět tvoří část řešení střechy.



Obr. 11: Tvorba řešení střechy pomocí appletu v GeoGebře

Na popsané myšlence je založen dále prezentovaný applet *Teoretické řešení plochých střech s až 5 odtoky* (dále jen *TŘPS*) (Sadílková, 2024), v němž jsou zadávajícími prvky body ležící v jedné horizontální rovině. Tyto body představují pozice odtokových míst. Každý takový pevný bod je vrcholem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož výšku můžeme libovolně měnit pomocí posuvníku, čímž reprezentujeme postupně narůstající část jehlanové plochy vymezené rovinným pásem. Ztotožníme-li pozici zadávajících bodů s odtokovými místy dané střechy, můžeme určit řešení této střechy pomocí pohledu shora (obr. 11).



Obr. 12: Správné řešení ploché střechy vs. vodorovný žlab

Poznamenejme, že applet *TŘPS* správně řeší situace, kde hrozí vznik nežádoucího tzv. žlabu (tj. vodorovné průsečnice, k níž stéká voda). V obrázku 12 je pro porovnání zobrazeno správné i nevhodné řešení takové střechy. Jelikož vznik střechy v TŘPS můžeme simulovat postupně se zvětšujícími čtverci, vidíme, že případ vodorovného žlabu nemůže nastat, jelikož čtverce, které by generovaly střechu se žlabem, mají prázdný průnik.

Využití appletu *TŘPS* ve výuce teorie plochých střech

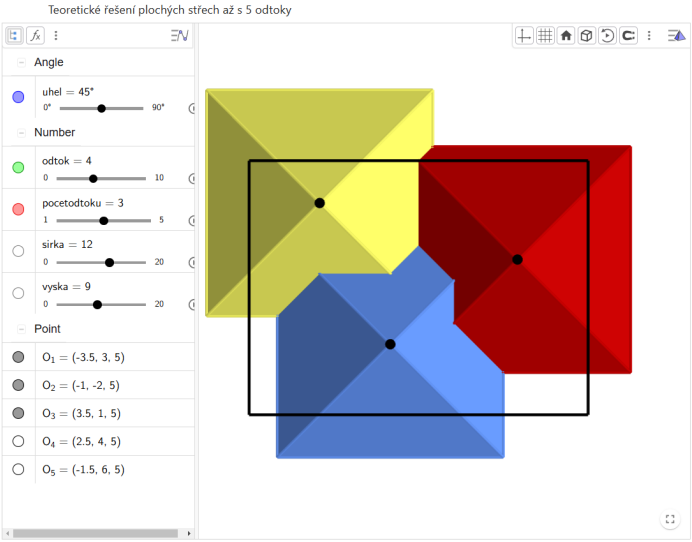
Applet *TŘPS* (Sadílková, 2024) je možné využít k rychlé kontrole základních příkladů z teorie plochých střech, k samostudiu studentů či jako pomůcku při výkladu úvodní teorie plochých střech. Je však nezbytné studenty upozornit, že přestože applet vrací odpovídající řešení v pohledu shora, prostorová situace skutečnému tvaru ploché střechy neodpovídá. Za účelem získání adekvátní prostorové představy je vhodné využití appletu kombinovat s odkazy na prostorová řešení příkladů uvedených například v (Bisová, 2020). Dalším limitem appletu je způsob, jakým vykresluje řešení v případě, kdy dvě či více gul leží na rovnoběžce s některou ze stran daného půdorysu. Určité stěny navzájem různých jehlanů (tedy zobrazené různou barvou) pak leží v téže střešní rovině,

tedy barevně by měly splynout, což applet *TŘPS* neumí (viz obrázek 13, v němž dvě guly náleží téže straně daného půdorysu).



Obr. 13: Problém s vykreslením specifického zadání (Sadílková, 2024)

Applet *TŘPS* lze zobrazit v internetovém prohlížeči či přímo v programu GeoGebra. Při zobrazení v prohlížeči je applet ve formátu 4 : 3 (obr. 14). Pro úpravu formátu je třeba soubor buď otevřít ve webové aplikaci nebo jej stáhnout a otevřít mimo prohlížeč.



Obr. 14: Zobrazení appletu v internetovém prohlížeči

V algebraickém okně (sloupec vlevo v obrázku 14) jsou uvedeny pouze nejdůležitější prvky: posuvníky k ovládání appletu a zadávající body střechy (body O_i). Význam jednotlivých ovlá-

dacích prvků a jejich použití jsou shrnuty v tabulce 1. S body O_i, které představují zadaná odtoková místa, lze pomocí myši pohybovat a libovolně měnit jejich polohu v rovině obdélníku. Pro přesné zadání bodů O_i pomocí souřadnic je možné využít algebraické okno.

Tab. 1: Ovládací prvky appletu *TŘPS*

název prvku	*význam a použití prvku*
uhel	slouží k změně odchylky stěn pravidelných čtyřbokých jehlanů od jejich podstavy, pro kontrolu řešení není nutné tuto hodnotu měnit
odtok	slouží k zvětšení stran čtvercových podstav jehlanů, postupným zvětšováním této hodnoty simulujeme hledání řešení střechy, změnou hodnoty na nulu zobrazíme pouze zadávající body O_i
pocet odtoku	určuje počet odtokových míst (bodů O_i), je možné zobrazit nejvýše 5 takových bodů
sirka	stanovuje první rozměr obdélníku, který představuje hranici půdorysu střechy
vyska	stanovuje druhý rozměr obdélníku, který představuje hranici půdorysu střechy

Změna pohledu se v appletu realizuje zakliknutím volného prostoru pravým tlačítkem myši a následovným pohybem. Pro opětovné vrácení do pohledu shora, ve kterém je vidět řešení střechy, stačí kliknout v pravém horním rohu na symbol domečku a poté na první z nabízených krychlí, tj. na tu se zvýrazněnou horní stěnou (obr. 15).



Obr. 15: Volba pohledu v appletu

Ovládání appletu je koncipováno tak, aby jej zvládl použít i uživatel, který nemá zkušenosti s programem GeoGebra. K nalezení řešení střechy totiž není nutné měnit pohled; stačí zadat požadovanou polohu zadávajících bodů a využít posuvníky.

Pracovní list

Přílohou tohoto příspěvku je pracovní list[2] ve formátu A4 obsahující zadání i řešení 32 jednodušších i složitějších plochých střech nad obdélníkovým půdorysem. Většinu z těchto střech lze řešit pomocí appletu *TŘPS*. Obtížnost úloh postupně graduje. Zadání úloh 9 a 10 jsou záměrně stejná, v řešení jsou poskytnuty dvě varianty – s vodorovným žlabem a bez něj. Tato dvě zadání také odpovídají příkladům řešeným ve čtvrté kapitole práce (Bisová, 2020, s. 75–77), v níž je uveden i odkaz na jejich prostorové řešení vymodelované pomocí GeoGebry. Úlohy z pracovního listu můžeme využít při odvozování teorie stejně jako při procvičování daného tématu. Pracovní list lze vytisknout či promítnout za účelem procvičování, popřípadě zadat v rámci samostudia studentů.

Závěr

V článku jsme představili applet *TŘPS* (Sadílková, 2024) vytvořený jako seminární práce první z autorek příspěvku. Princip fungování appletu vychází z teorie Voroneho diagramu. Applet umožňuje řešit plochou střechu konstantního spádu nad obdélníkovým půdorysem zadanou pomocí jedné až pěti gul. Součástí příspěvku je také pracovní list s 32 úlohami na téma řešení plochých střech. Domníváme se, že úlohy z pracovního listu jsou spolu s využitím appletu *TŘPS* vhodné nejen jako podklad k výuce tohoto tématu v rámci hodin deskriptivní geometrie, ale také k samostudiu. Student totiž, kromě kontroly svého řešení, může v appletu pozorovat změny, k nimž dojde změnou zadání, proces

[2]Pracovní list je dostupný ve formátu pdf přímo z appletu (Sadílková, 2025, viz odkaz ve spodní části obrazovky) a bude také součástí on-line vydání časopisu Učitel matematiky na `https://www.dml.cz`.

vzniku řešení apod. U studentů s dobrou prostorovou představivostí a zájmem o matematiku a geometrii lze seznámení s appletem propojit s představením Voroneho diagramu.

Bohužel jsme zatím neměli možnost realizovat výuku s využitím tohoto appletu ve třídě. Výše uvedená doporučení vychází z osobní zkušenosti autorek s výukou deskriptivní geometrie, z využití appletu při doučování jednotlivců a z konzultací appletu i zvolených úloh s kolegy vyučujícími deskriptivní geometrii na různých typech středních škol. Věříme, že applet *TŘPS* nalezne využití ve výuce deskriptivní geometrie jako názorná pomůcka k výuce teoretického řešení plochých střech.

Literatura

[1] Bezstarostová, B. (2022). *Řešení střech v GeoGebře* [Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci]. Knihovna Univerzity Palackého v Olomouci. `https://library.upol.cz/arl-upol/en/csg/?repo=upolrepo&key=19458022560`

[2] Bisová, K. (2020). *Teoretické řešení střech* [Diplomová práce, Masarykova Univerzita]. Archiv závěrečných prací MUNI. `https://is.muni.cz/th/rrzho/Diplomova_prace.pdf`

[3] Moravcová, V., & Skálová, Z. (2023). Manhattanská a maximová metrika v úlohách školské geometrie. *Učitel matematiky*, *31*(4), 251–265.

[4] Sadílková, J. (2024, 31. července). *Teoretické řešení plochých střech až s 5 odtoky*. GeoGebra. `https://www.geogebra.org/m/dkfubhpy`

[5] Samková, K. (2007). *Voroneho diagramy a jejich aplikace* [Semestrální práce z předmětu Matematické Modelování, Západočeská univerzita v Plzni]. Galerie studentských prací MM. `https://home.zcu.cz/~mikaMM/Galerie%20studentskych%20praci%20MM/2007/Samkov%C3%A1-%20Voroneho%20diagramy%20a%20jejich%20aplikace.pdf`

[6] Walsh, T. (2017, 14. května). *Voronoi cones*. GeoGebra. `https://www.geogebra.org/material/show/id/HNxm3pxf`

Abstract

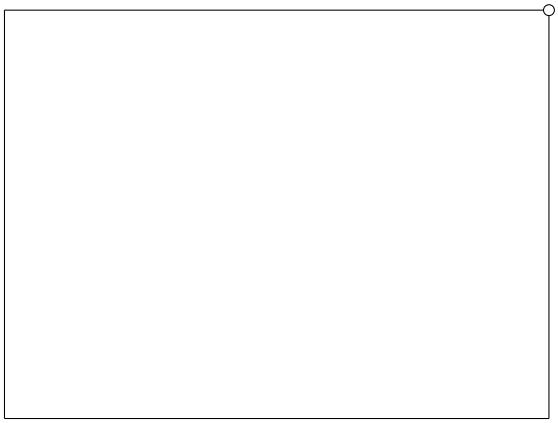
The paper presents an applet for solving flat roofs created with GeoGebra. This applet is based on the idea of the Voronoi diagram. The paper provides the necessary theory, explains the principle of the applet's working and describes its use, including recommendations for teaching. A worksheet containing 32 tasks and solutions for flat roofs is attached.

Johanka Sadílková
Anglicko-české gymnázium AMAZON
Rytířská 10
110 00 Praha 1
e-mail: johanka.sadilkova@gmail.com

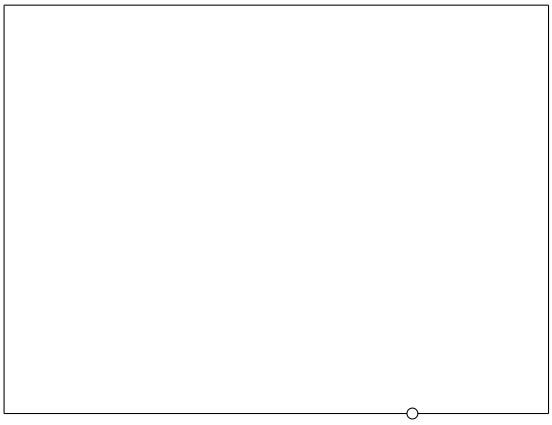
Vlasta Moravcová
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 49/83
186 75 Praha 8
e-mail: vlasta.moravcova@matfyz.cuni.cz

Teoretické řešení plochých střech až s 5 odtoky https://www.geogebra.org/m/dkfubhpy

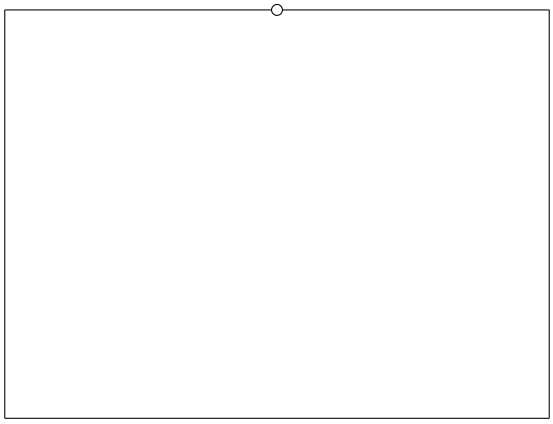
1



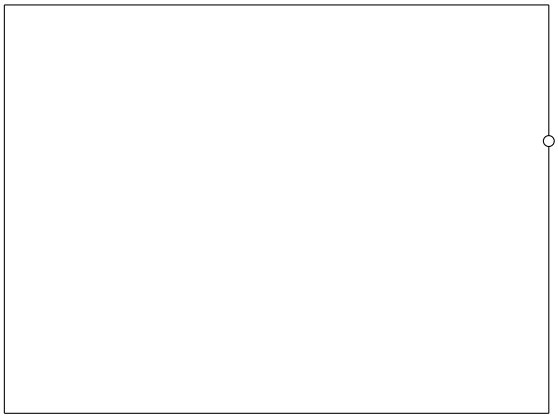
2



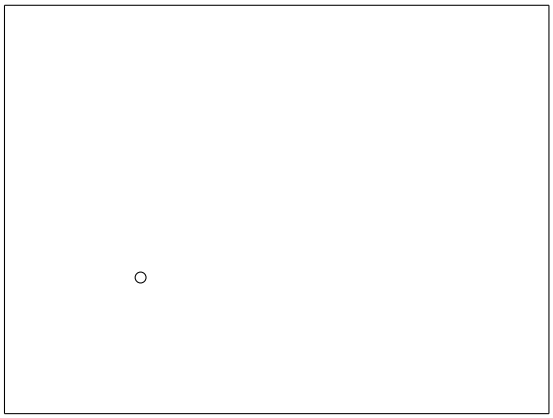
3



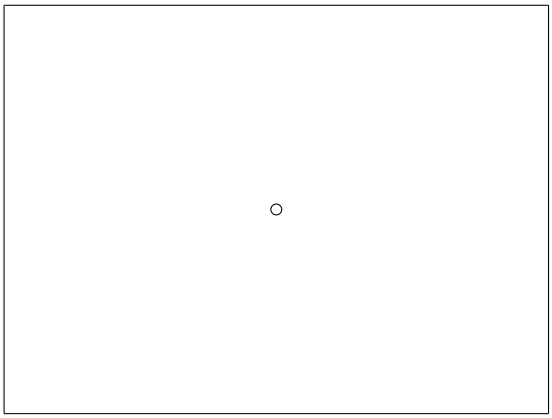
4



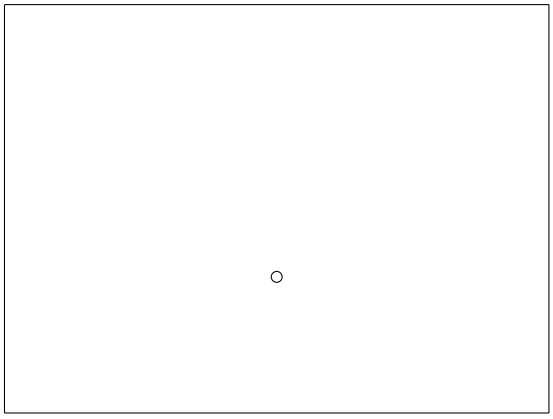
5



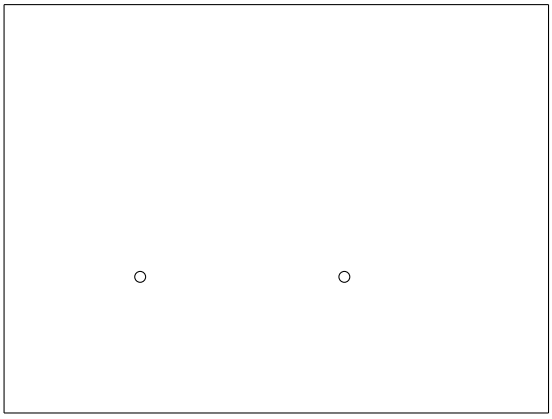
6



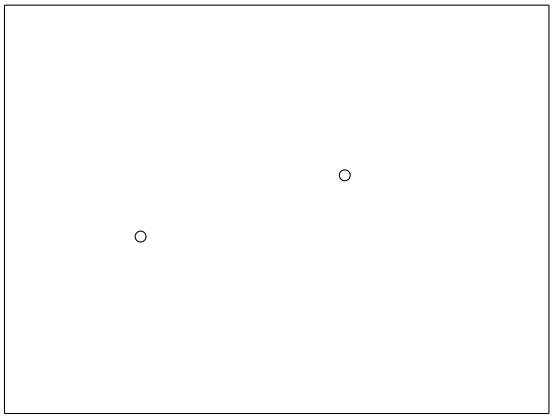
7



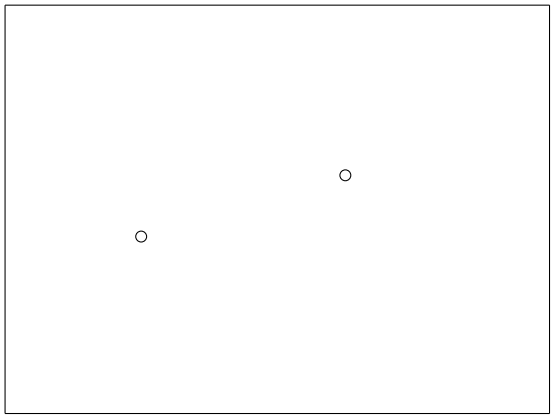
8



9



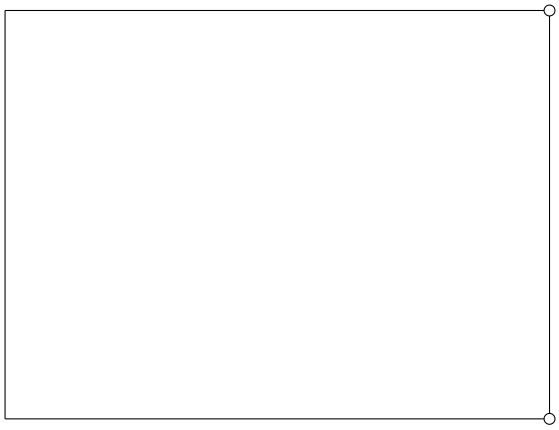
10



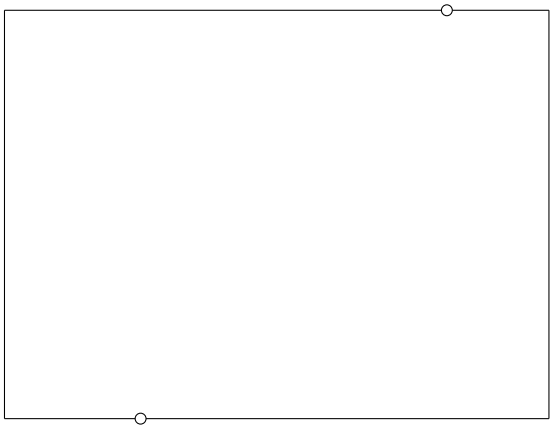
11



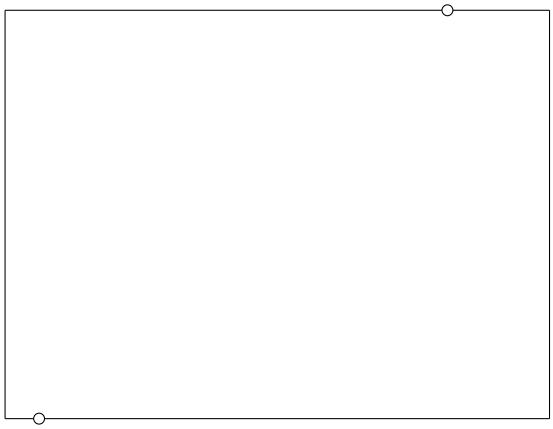
12



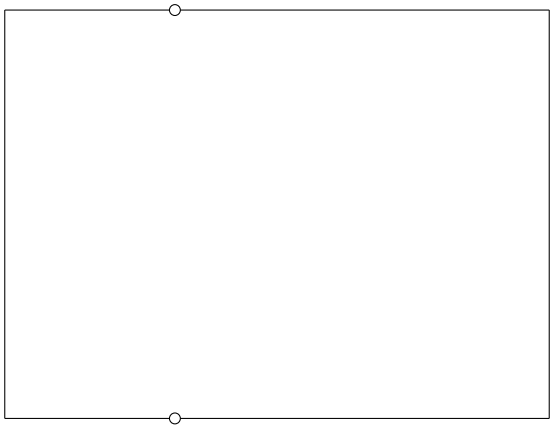
13



14



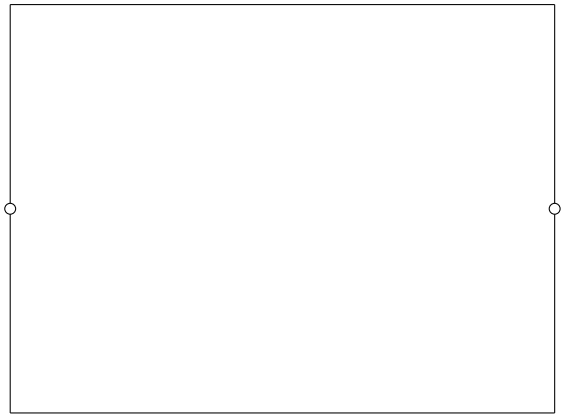
15



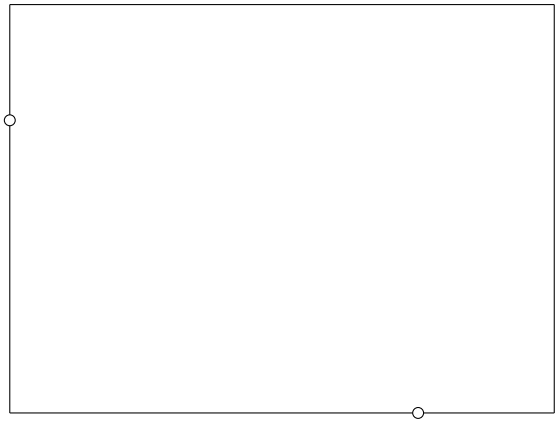
16



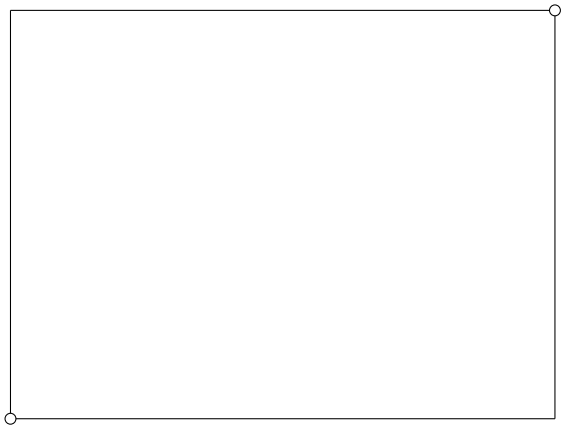
17



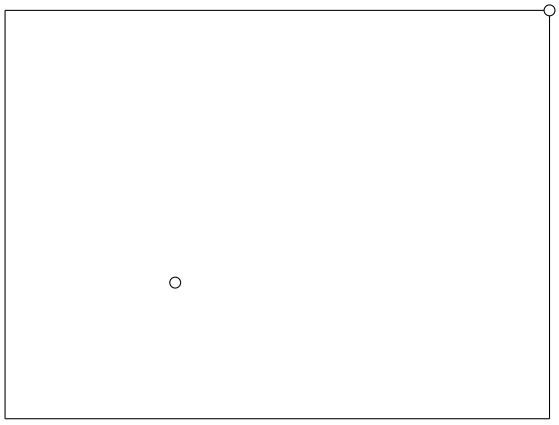
18



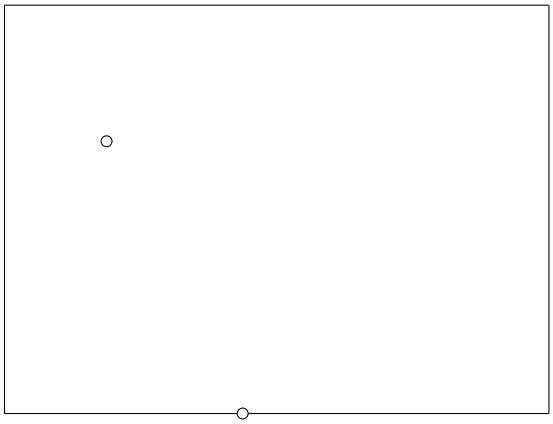
19



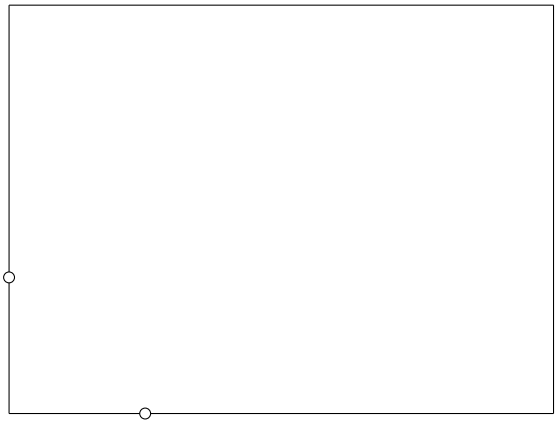
20



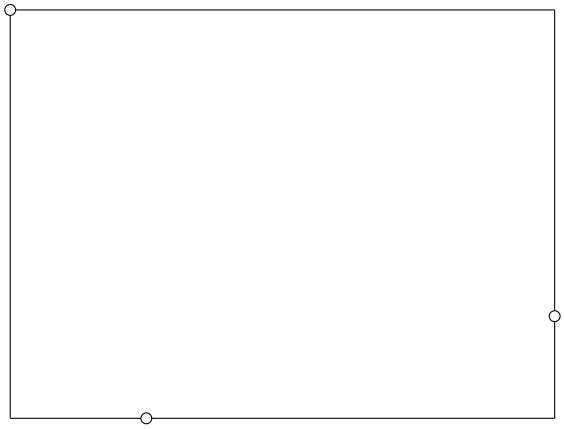
21



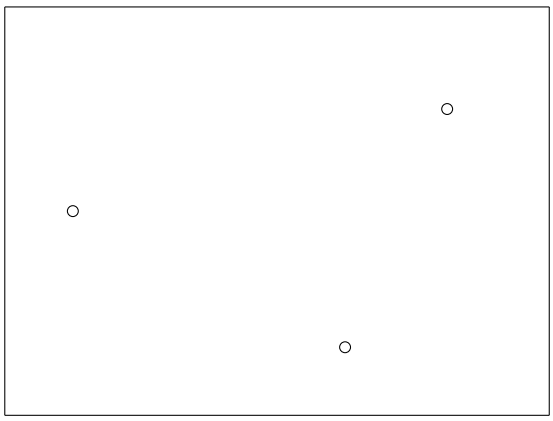
22



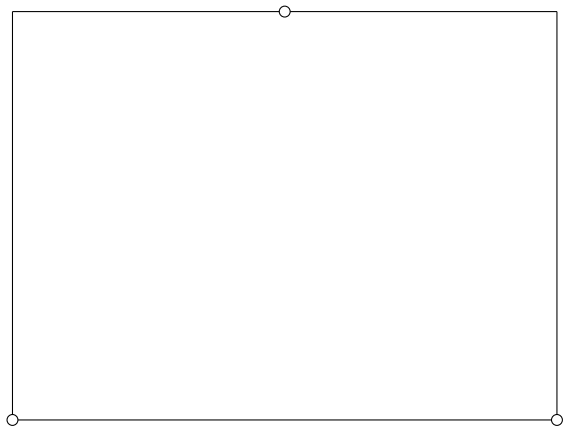
23



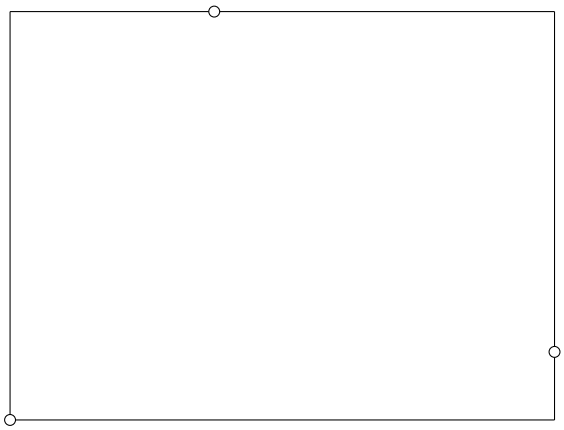
24



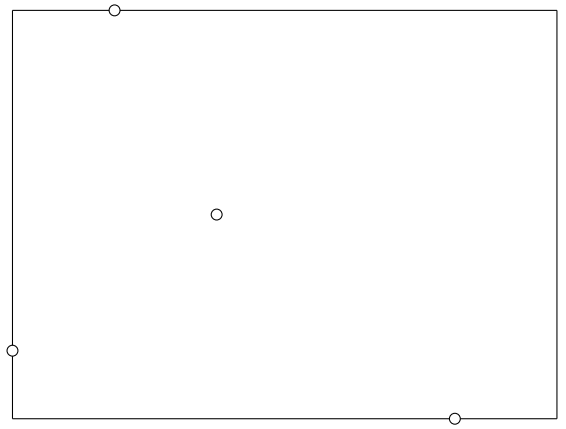
25



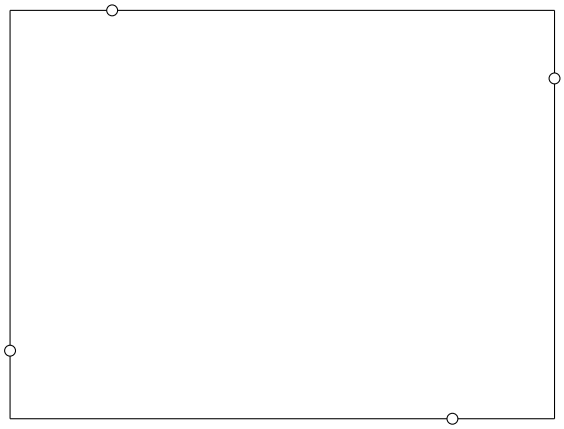
26



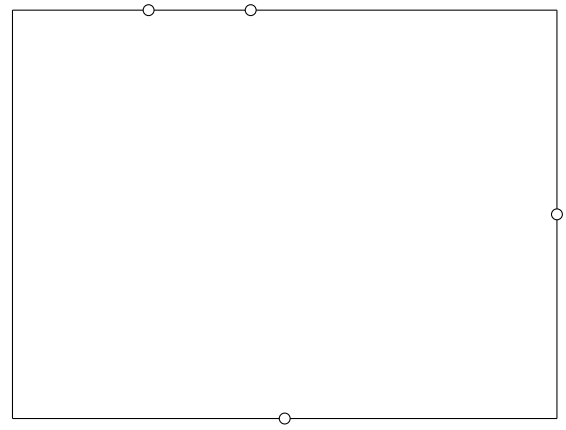
27



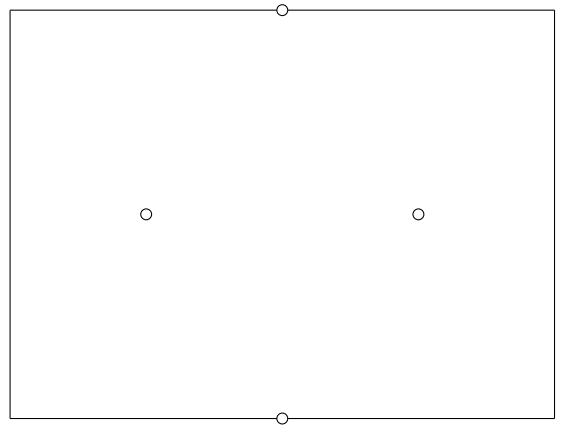
28



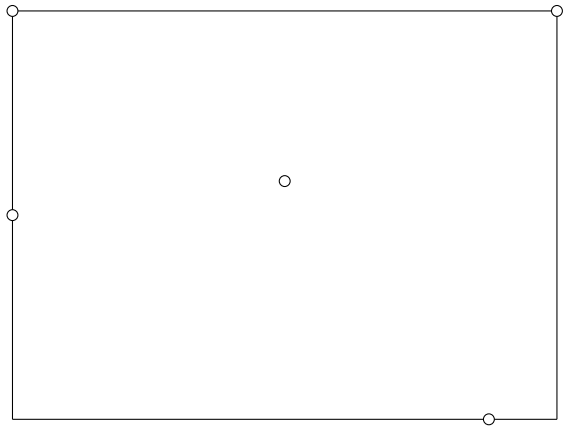
29



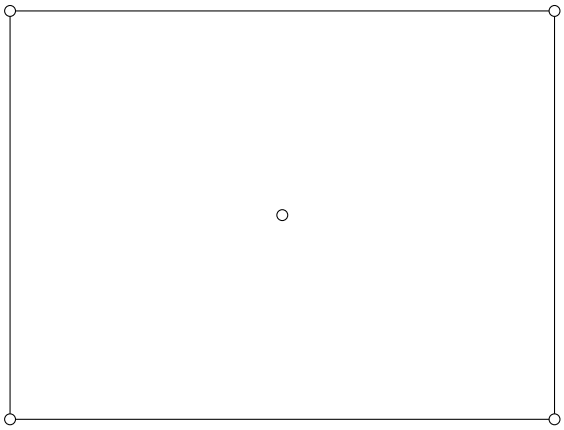
30



31

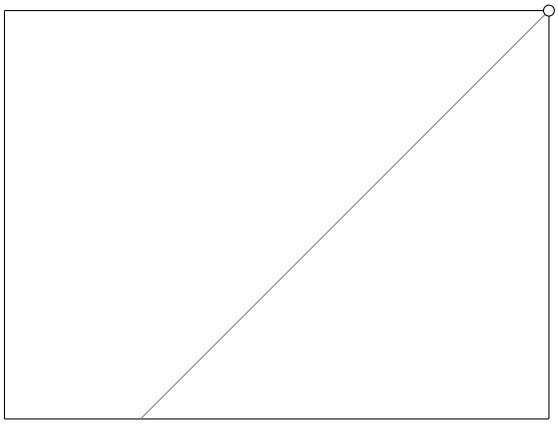


32

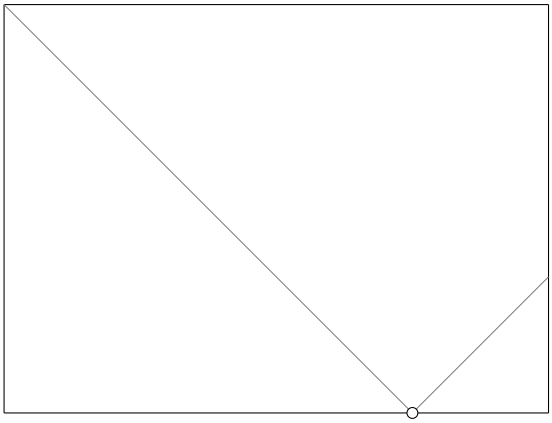


Teoretické řešení plochých střech až s 5 odtoky https://www.geogebra.org/m/dkfubhpy

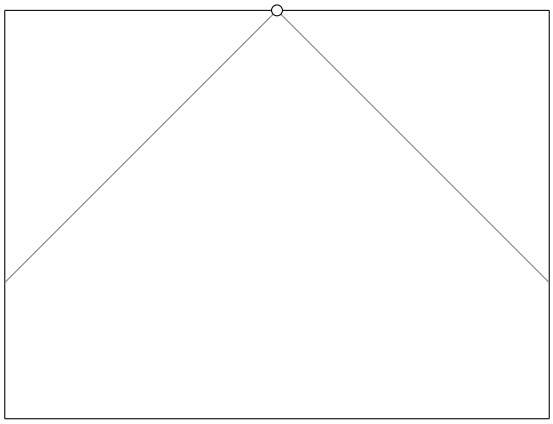
1



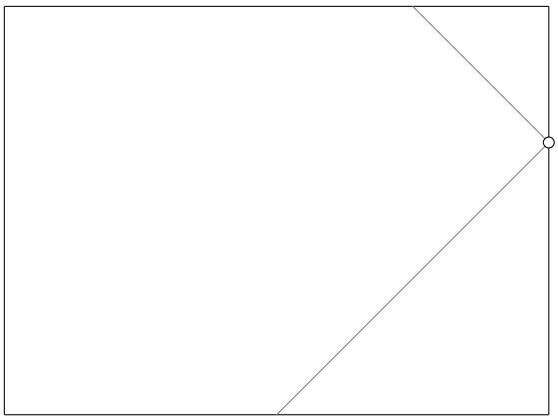
2



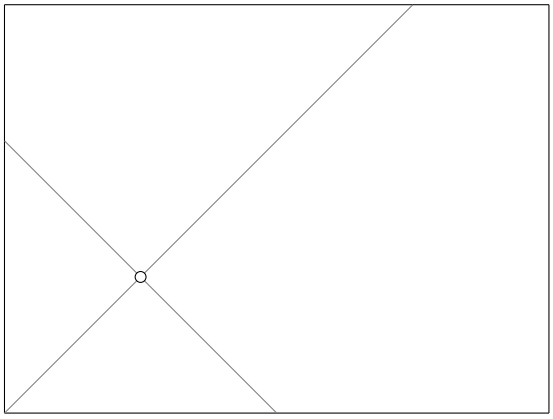
3



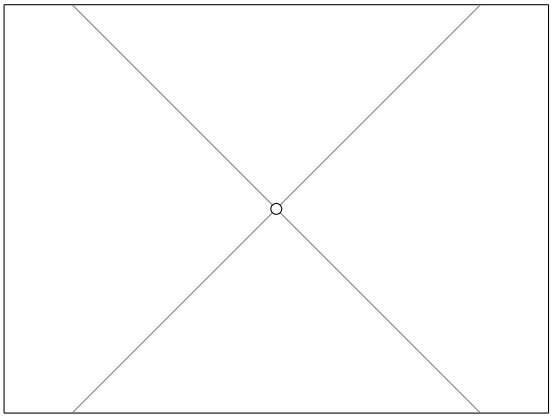
4



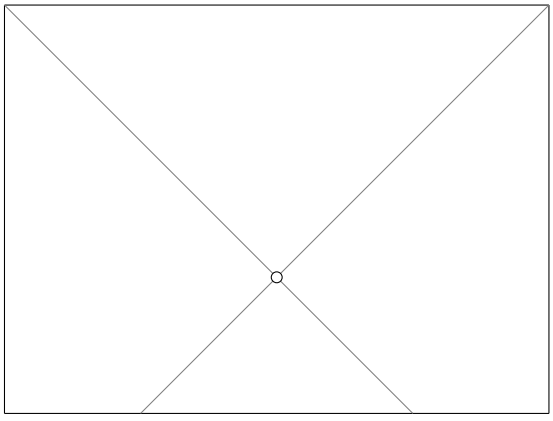
5



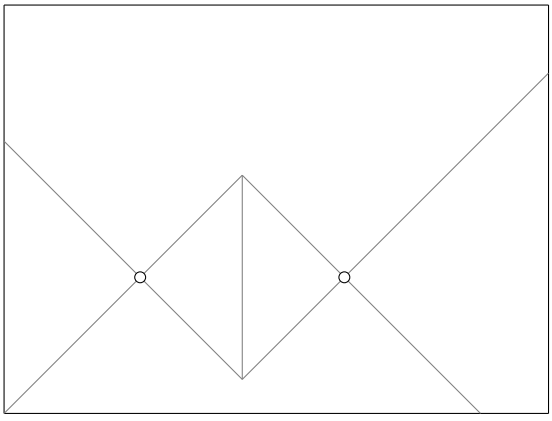
6



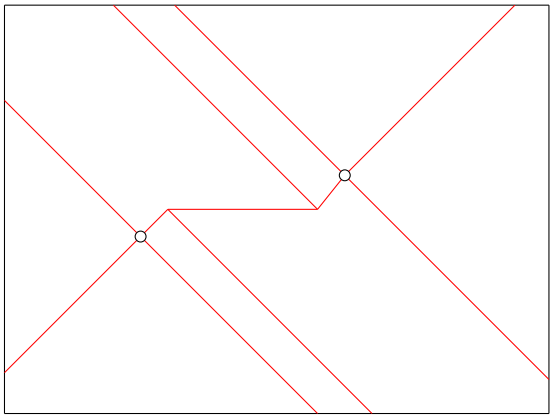
7



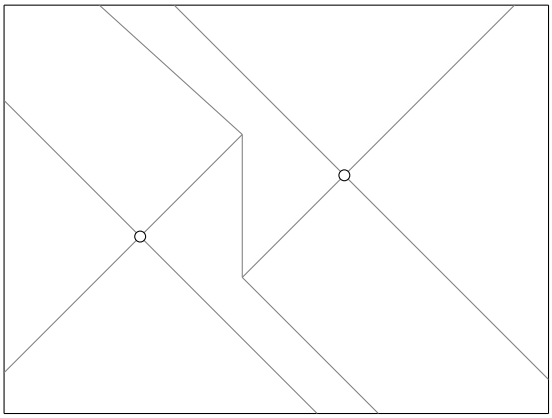
8



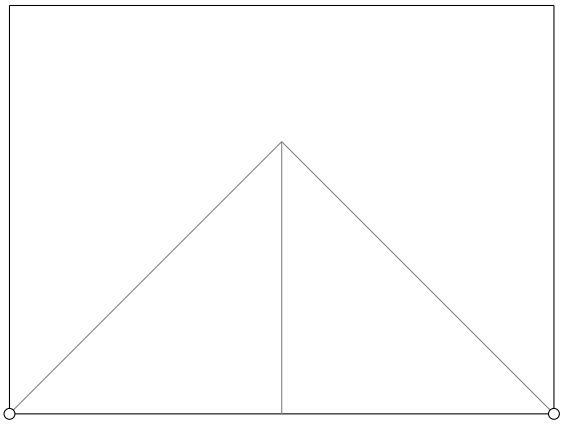
9 ! vodorovný žlab



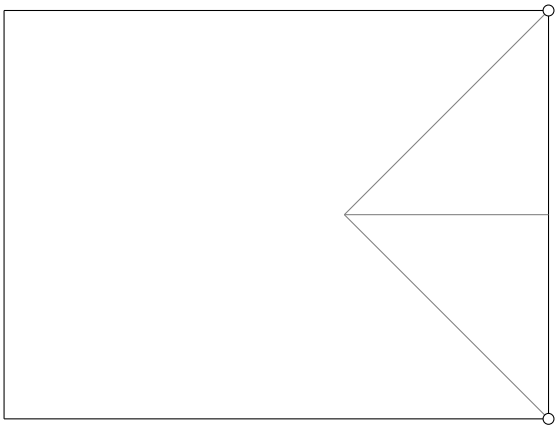
10



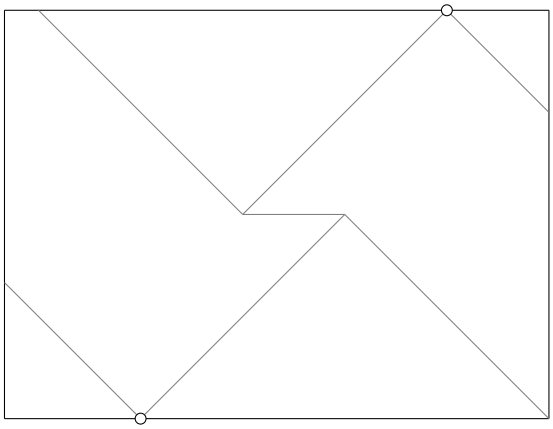
11



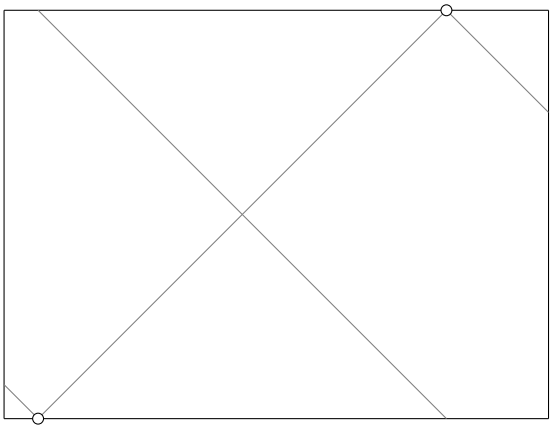
12



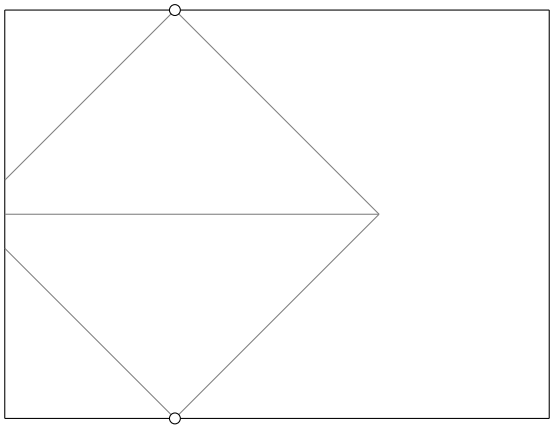
13



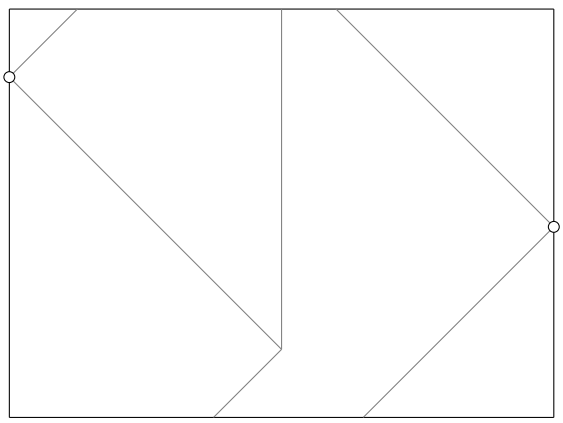
14



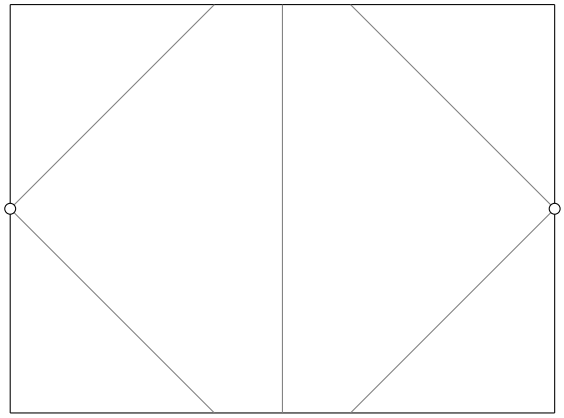
15



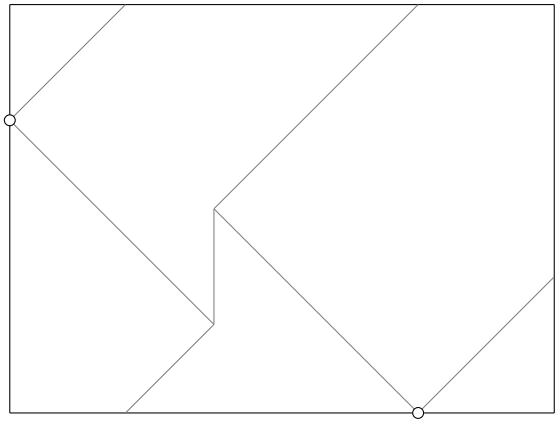
16



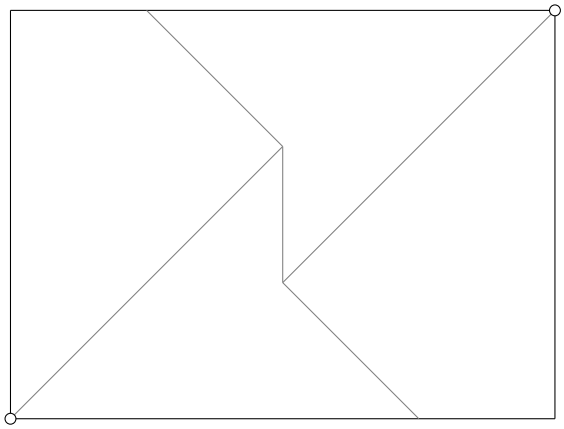
17



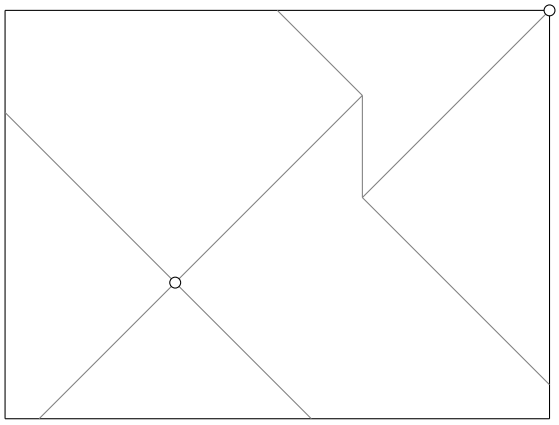
18



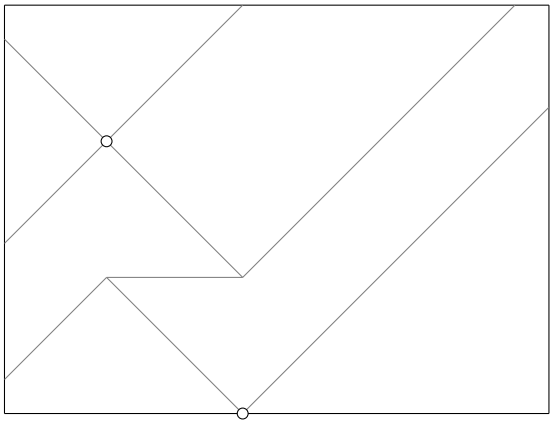
19



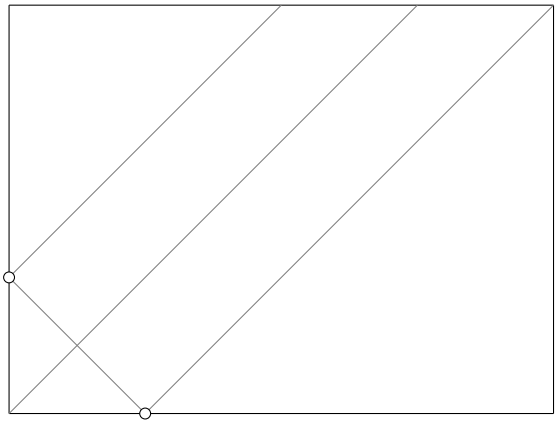
20



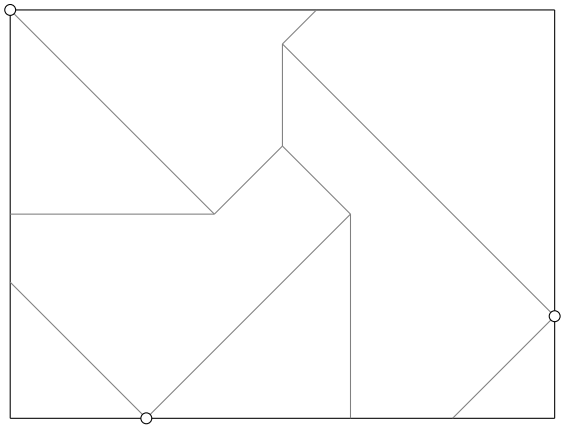
21



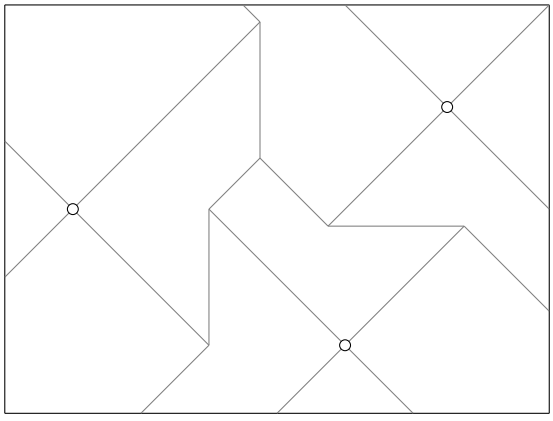
22



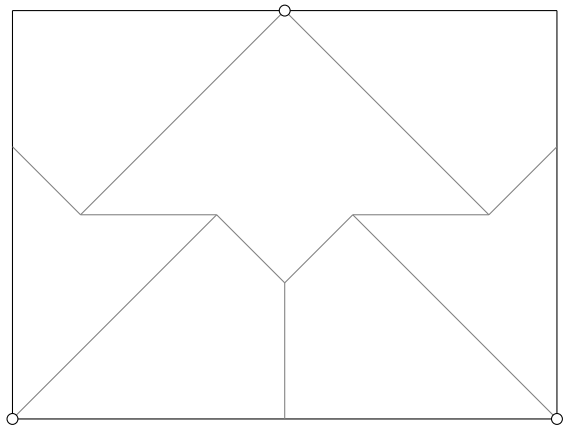
23



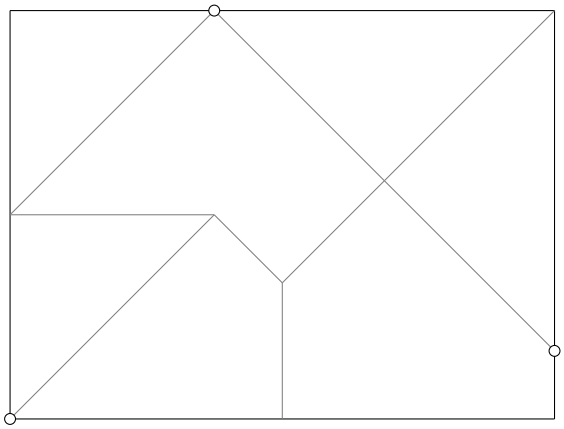
24



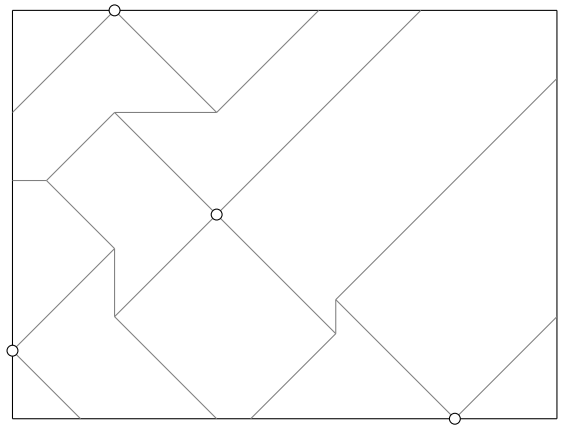
25



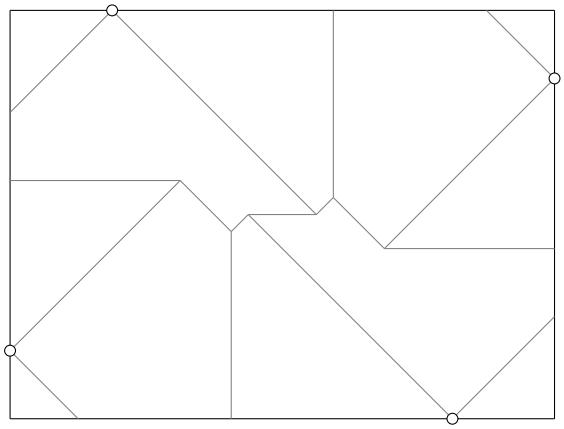
26



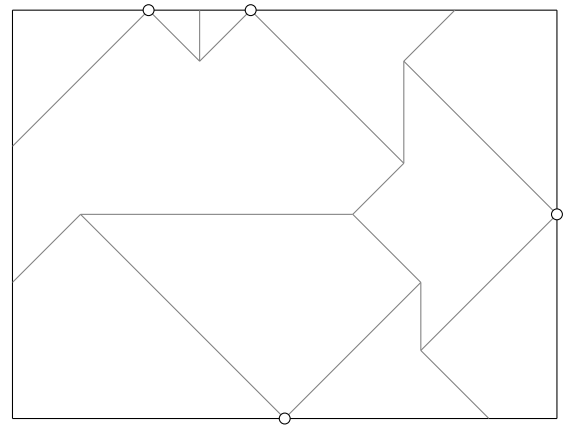
27



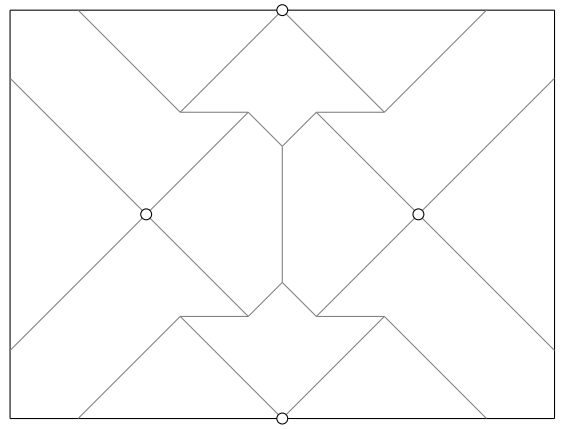
28



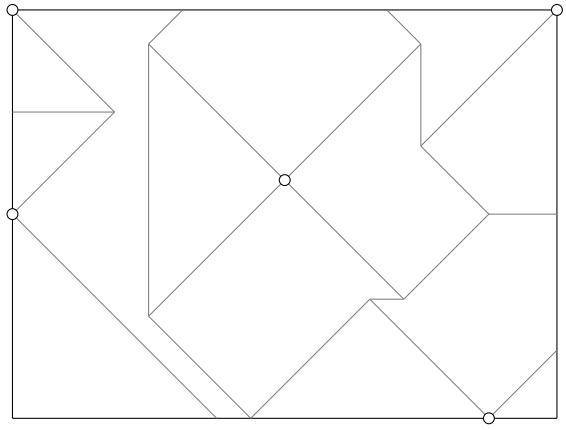
29



30



31



32

