

Rozhledy matematicko-fyzikální

Luděk Spíchal

Změna délky dne a derivace funkce

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 4, 1–14

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153269>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

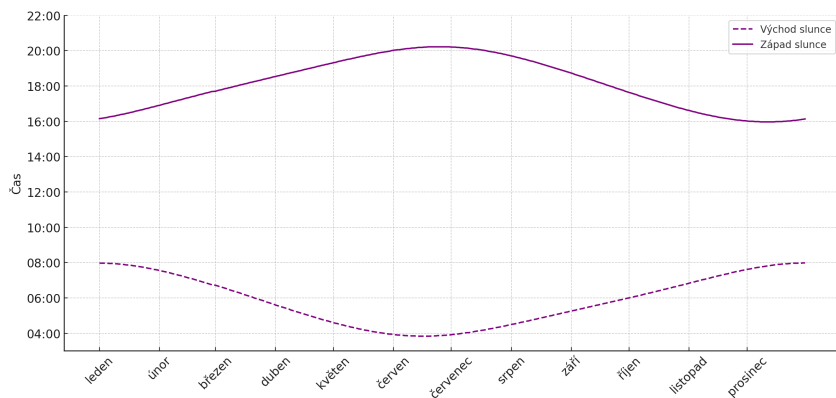


This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Změna délky dne a derivace funkce

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Každý z nás si během roku všímá, že se dny a noci proměňují. Pravidelné změny délky dne v průběhu roku bereme jako naprosto samozřejmou součást přírodních cyklů. Zatímco v zimě vstáváme často ještě za tmy a stmívá se brzy odpoledne, v létě si užíváme dlouhé světlé večery. Na obr. 1 jsou znázorněné časy východů a západů Slunce v průběhu roku na 50° severní šířky a 15° východní délky (středoevropský čas, SEČ) v roce 2025.¹⁾



Obr. 1: Východy a západy Slunce (SEČ) v roce 2025 na 50° s. š. a 15° v. d.

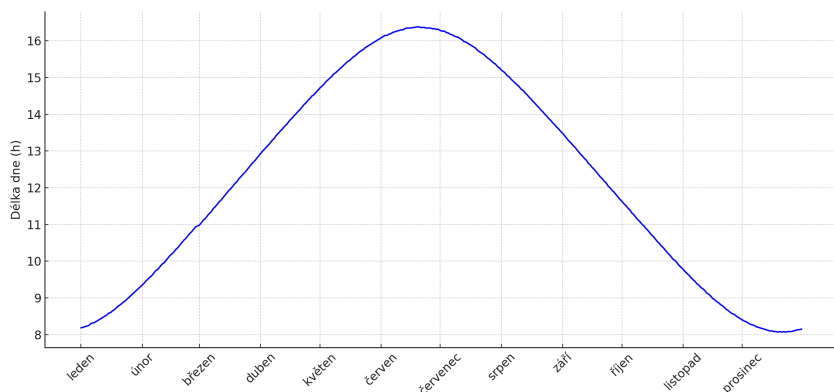
Délka dne, tedy čas mezi východem a západem Slunce, se během roku neustále mění. Nejkratší den nastává v době zimního slunovratu (kolem 21. prosince), nejdelší naopak v letním slunovratu (kolem 21. června). Mezi těmito dvěma body se den zkracuje nebo prodlužuje, rychlost této změny není ovšem vždy stejná.

Například během jara se den může prodlužovat až o tři a půl minuty denně, zatímco v období kolem letního slunovratu se mění jen nepatrně. Tato proměnlivá rychlost změny délky dne je celkem intuitivní. Zatímco

¹⁾ Zdroj: <https://www.myslivo.cz/Pro-myslivoce/Informace-pro-myslivoce/Vychody-a-zapady-Slunce-a-Mesice>

v březnu si prodlužování dne všimneme skoro každým dnem, v červenci si rozdíl prakticky nevšimneme.

Důvodem existence tohoto jevu typického pro střední zeměpisné šířky je naklonění zemské osy vůči rovině dráhy kolem Slunce zhruba o $23,5^\circ$.²⁾ Proto se během roku střídá úhel, pod kterým sluneční paprsky dopadají na dané místo. Na 50° s. š. (přibližná poloha České republiky) trvá nejkratší den kolem zimního slunovratu asi 8 h 5 min, zatímco nejdelší den v období letního slunovratu dosahuje zhruba 16 h 14 min.³⁾ Mezi těmito extrémy se délka dne vyvíjí relativně hladce a periodicky. Na grafu pak vypadá téměř jako čistá sinusoida (obr. 2).



Obr. 2: Délka dne (50° s. š., 15° v. d.)

Zatímco délka dne se mění plynule a poměrně snadno předvídatelně, rychlost těchto změn se během roku výrazně liší. V blízkosti rovnodenností (kolem 21. března a 23. září) se den prodlužuje nebo zkracuje nejrychleji. V našich zeměpisných šířkách to znamená až několik minut

²⁾Naklonění zemské osy (tzv. sklon ekliptiky) má vliv nejen na délku dne, ale i na střídání ročních období. Tento sklon není neměnný, s velmi dlouhou periodou se mírně mění (tzv. nutace a precese), což má vliv i na dlouhodobé klimatické změny (např. Milankovičovy cykly).

³⁾Zmíněné změny jsou výrazně závislé na zeměpisné šířce. V tropických i polárních oblastech tak zaznamenáme značně odlišné poměry. V tropických oblastech poblíž rovníku (zeměpisná šířka 0°) je délka dne téměř stejná po celý rok – přibližně 12 hodin. Ráno slunce vychází kolem 6. hodiny a zapadá okolo 18. hodiny, s jen malými sezónními výkyvy. V polárních oblastech (nad $66,5^\circ$ severní nebo jižní šířky) dochází k extrémům – v létě nastává období tzv. polárního dne, kdy Slunce nezapadá vůbec, a v zimě naopak polární noc, kdy Slunce vůbec nevychází. Například na severu Norska trvá polární den několik týdnů.

denně. Naopak v období slunovratů (kolem 21. června a 21. prosince) se délka dne mění nejpomaleji, zůstává stejná. A právě zde přichází ke slovu pojem, který je základem nejen matematiky, ale i fyziky, techniky a přírodních věd obecně – derivace. Zatímco funkce popisuje, jaká je například délka dne v určitém okamžiku, derivace nám říká, jak rychle se tato veličina mění. Jinými slovy řečeno platí, že derivace odpovídá na otázku „jak rychle roste nebo klesá“ délka dne [3].

V článku se podíváme na to, jak můžeme pomocí goniometrických funkcí popsat jak změnu délky dne v průběhu roku, tak rychlost změny délky dne. V obecné rovině si představíme pojem derivace funkce a ukážeme, že funkce popisující rychlost změny délky dne velmi dobře odpovídá derivaci funkce délky dne. Přitom využijeme reálná data a ukážeme, že i něco tak zdánlivě „obyčejného“, jako je střídání dne a noci, může v sobě ukrývat fascinující matematický rytmus. Pojem derivace funkce tak nebude jen abstraktním matematickým pojmem, ale velmi užitečným nástrojem pro porozumění světu kolem nás.

Délka dne a graf funkce sinus

V úvodu jsme zmínili, že graf délky dne v průběhu roku svým tvarem odpovídá grafu funkce sinus. V této kapitole se pokusíme ukázat, že křivku délky dne lze skutečně aproximovat pomocí grafu funkce sinus.

Předpokládejme, že hledaná funkce určující délku dne (v hodinách), kde t je číslo dne v roce (např. $t = 1$ je 1. leden, $t = 172$ je 21. červen apod.), má tvar

$$L(t) = A + B \sin(C(t - D)). \quad (1)$$

Pro jednotlivé parametry rovnice platí, že:

- A je střední délka dne (hod), která představuje aritmetický průměr délek dnů za celý rok, v modelu je $A \approx 12,26$.
- B je amplituda grafu funkce sinus (hod)⁴⁾, v modelu je

$$B = \frac{L_{max} - L_{min}}{2} = \frac{16,233 - 8,083}{2} \doteq 4,08.$$

- C je úhlová frekvence (rad/den), udávající, o kolik radiánů se fázový úhel posune za jediný den, v modelu je $C = \frac{2\pi}{365}$.

⁴⁾Pro výpočet amplitudy byly uvažovány následující hodnoty: nejkratší den – 8 hod 5 min, nejdelší den – 16 hod 14 min.

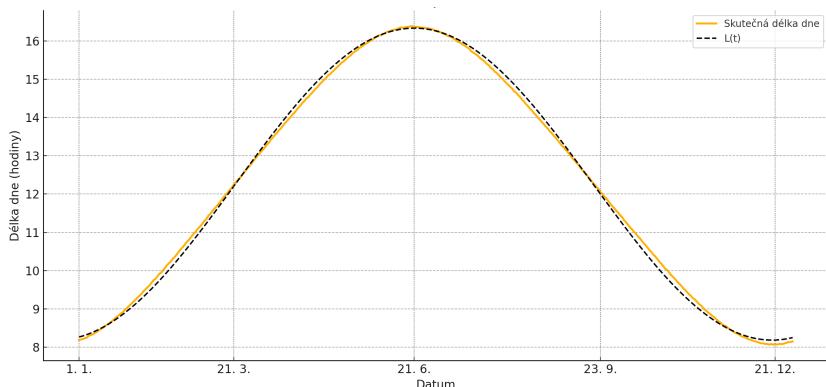
- D představuje (fázový) posun tak, aby maximum funkce připadlo na letní slunovrat ($t = 172$). Funkce určená rovnicí (1) má maximum, když

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi(t-D)}{365}\right) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2\pi(t-D)}{365} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D = 91,25 \Rightarrow D = t - 91,25.\end{aligned}$$

Pokud je $t = 172$, pak $D = 172 - 91,25 = 80,75$. Po úpravě a dosazení do rovnice (1) dostáváme funkci

$$L(t) \approx 12,26 + 4,08 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right). \quad (2)$$

Na obr. 3 vidíme srovnání grafu skutečných délek dne a grafu funkce (2). Funkce se blíží skutečným hodnotám, ale není s nimi zcela totožná. Použitá aproximující funkce dobře vystihuje periodickou povahu jevu (střídání délky dne). Velikost odchylky od reálných hodnot je možné kvantifikovat např. pomocí *střední kvadratické chyby*.⁵⁾



Obr. 3: Srovnání skutečných délek dne (50° s. š., 15° v. d., plná čára) a grafu funkce (2)

⁵⁾Střední kvadratická chyba se označuje také jako *root mean square error*, ve zkratce RMSE. RMSE umožňuje měřit, jak daleko se průměrně předpovědi modelu liší od skutečných hodnot. Menší hodnota RMSE znamená lepší shodu se skutečností.

V našem případě činí střední kvadratická chyba empirického modelu cca 0,12 hod, tedy cca 7 min. Výpočet střední kvadratické chyby znamená, že porovnáváme hodnoty modelu s hodnotami skutečnými. Například náš model tvrdí, že 100. den v roce trvá cca 13,59 hodiny, i když ve skutečnosti trval cca 13,48 hodiny. Rozdíl je tedy cca 0,11 hodiny. Takové rozdíly určíme pro každý den v roce. Každý rozdíl dále umocníme, aby se nezrušily při následném sčítání kladné a záporné hodnoty (např. $-0,3$ a $+0,3$ dávají 0,09). Pokud sečteme všechny tyto čtverce a vydělíme počtem dní, pak dostaneme průměrnou kvadratickou chybu. Nakonec z toho vezmeme odmocninu, abychom získali výsledek opět ve stejných jednotkách jako původní rozdíly (v našem případě v hodinách) [2].

Vedle vlastního modelu délky dne můžeme uvést návrh modelu vytvořený pomocí jazykového modelu ChatGPT (OpenAI), který navrhl následující funkci

$$L_m(t) \approx 12,27 + 3,99 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81,9)\right). \quad (3)$$

Tato funkce vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 6,5 minuty.⁶⁾

Změny délky dne a graf funkce kosinus

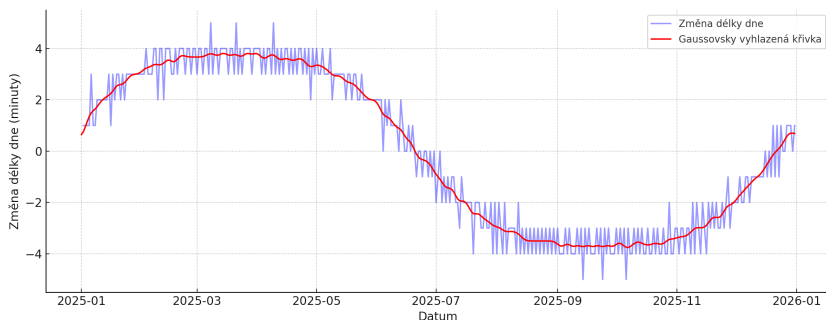
Již v úvodní části jsme zmiňovali proměnlivou rychlost změny délky dne v průběhu roku. Na obr. 4 můžeme sledovat změnu délky dne, která v průběhu roku dosahuje svého maxima v období rovnodenností a minima v období slunovratu. Kladné hodnoty označují dny, kdy se den prodlužoval, záporné hodnoty naopak jeho zkracování.

Lomená křivka v grafu byla dále vyhlazena tak, aby bylo možné roční rytmus změny délky dne lépe pozorovat. Použité gaussovské vyhlazení funguje tak, že se pro každý den vypočítá průměr z okolních dnů.⁷⁾ Nejedná se ovšem o běžný aritmetický průměr, nýbrž vážený průměr, kde největší váhu mají dny nejbližší a čím jsou dny vzdálenější, tím menší mají vliv. Tento způsob vážení se řídí Gaussovou křivkou, která má zvonovitý tvar.⁸⁾

⁶⁾ Modelová funkce byla získána s využitím nástroje ChatGPT (model GPT-4-turbo, OpenAI) dne 14. června 2025.

⁷⁾ Carl Friedrich Gauss (1777–1855) byl německý matematik, jehož práce ovlivnila mnoho oblastí matematiky, statistiky a fyziky. Je po něm pojmenována nejen Gaussova křivka (normální rozdělení), ale i například metoda nejmenších čtverců nebo Gaussovův zákon v elektrostatice.

⁸⁾ Více o metodě vyhlazení např. <https://en.wikipedia.org/wiki/Smoothing>,



Obr. 4: Graf změn délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a jeho gaussovsky vyhlazení

Vyhlazená křivka tedy neukazuje přesné denní změny, ale jejich plynulý průměr, který pomáhá lépe zachytit celkový rytmus prodlužování a zkracování dne během roku, kde maximální rychlost změny nastává kolem jarní a podzimní rovnodennosti a minimum kolem slunovratů.

I v případě grafu rychlosti změny délky dne zaznamenáváme periodické změny odpovídající jisté goniometrické funkci. Současně si můžeme vzhledem ke grafu délek dnů (obr. 3) všimnout určitého fázového posunu, který odpovídá zhruba $1/4$ roku. Pro sestavení modelu tedy v tomto případě použijeme funkci kosinus, která má maximum posunuté o $\pi/2$, tj. budeme předpokládat funkci ve tvaru

$$L_z(t) = A_z + B_z \cos\left(C_z(t - D_z)\right). \quad (4)$$

Pro jednotlivé parametry rovnice platí, že:

- A_z je střední hodnota změny délky dne (min), představující aritmetický průměr změn délek dnů za celý rok, v modelu je $A_z \approx -0,01$.
- B_z je amplituda grafu funkce kosinus (min), v modelu je $B_z = 5$.
- $C_z = \frac{2\pi}{365}$ je úhlová frekvence (rad/den).
- D_z představuje posun tak, aby nulová hodnota změny délky dne připadla na letní slunovrat ($t = 172$). Funkce určená rovnicí (4) má nulovou hodnotu, když

https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_filter?utm_source=chatgpt.com,
<https://medium.com/data-science/gaussian-smoothing-in-time-series-data-c6801f8a4dc3>

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi(t-D_z)}{365}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2\pi(t-D_z)}{365} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D_z = 91,25 \Rightarrow D_z = t-91,25.\end{aligned}$$

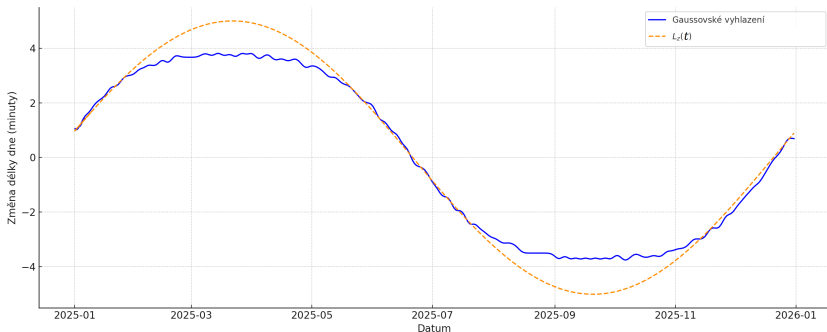
Pokud je $t = 172$, pak

$$D_z = 172 - 91,25 = 80,75.$$

Po úpravě a dosazení do rovnice (4) dostáváme funkci

$$L_z(t) \approx -0,01 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80,75)\right). \quad (5)$$

Nalezená funkce vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 0,51 minuty (30 vteřin).



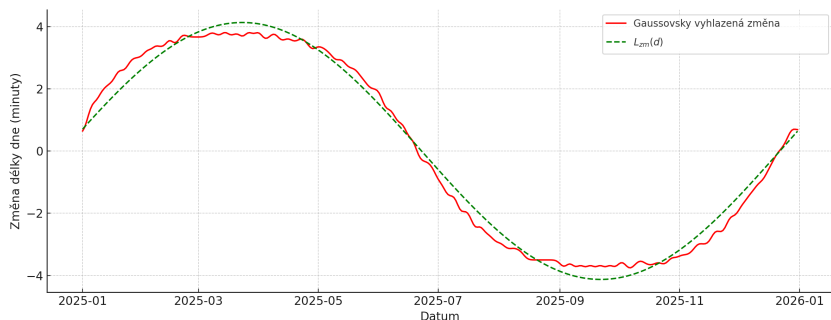
Obr. 5: Srovnání grafu délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a aproximace pomocí funkce (5)

Model ChatGPT (OpenAI) navrhl následující funkci

$$L_{zm}(t) \approx 0,01 + 4,13 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-82,28)\right). \quad (6)$$

Tato funkce podle modelu vykazuje střední kvadratickou chybu přibližně 0,31 minuty (19 vteřin).⁹⁾

⁹⁾ Modelová funkce byla získána s využitím nástroje ChatGPT (model GPT-4-turbo, OpenAI) dne 18. června 2025.



Obr. 6: Srovnání grafu délek dne v roce 2025 (50° s. š., 15° v. d.) a aproximace pomocí funkce (6)

Změna délky dne a derivace funkce

Pokud nyní shrneme předchozí pozorování, pak můžeme konstatovat, že délku dne i změnu délky dne lze aproximovat goniometrickou funkcí. Naším záměrem bude nyní ukázat, že jestliže funkce $L(t)$ (resp. $L_m(t)$) představuje aproximaci délky dne, pak funkce $L_z(t)$ (resp. $L_{zm}(t)$) jako funkce aproximující změnu délky dne je její derivací.¹⁰⁾

Pojem derivace funkce zde představíme stručně v obecné podobě, se zaměřením na význam pojmu derivace.¹¹⁾

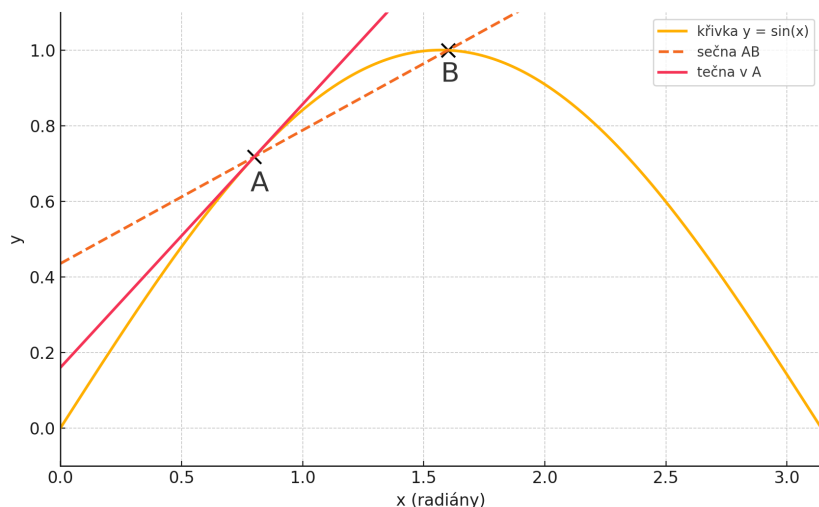
V reálném světě se derivace nejčastěji překládá jako okamžitá časová změna. U jízdy automobilu je derivací jeho dráhy okamžitá rychlost vozu, derivací jeho rychlosti je zrychlení nebo zpomalení. Sledujeme-li průměrnou denní teplotu, derivace udává tempo oteplování či ochlazování. U délky dne derivace zase říká, o kolik minut se den právě prodlužuje či krátí. Přitom jednotky derivace vždy prozradí, co měříme: metry za sekundu, stupně Celsia za hodinu, minuty za den a podobně.¹²⁾

¹⁰⁾Slovo „derivace“ pochází z latinského „derivare“ znamenající „odvádět“ nebo „odvozovat“, doslova „vést od něčeho“. Derivace je „odvozená hodnota“, která vychází z původní funkce. Není tedy něčím, co existuje samo o sobě, ale vzniká z funkce jako nový údaj, jako její „odvozenina“.

¹¹⁾Pojem derivace vznikl v 17. století v souvislosti s rozvojem infinitezimálního počtu. Zakladateli diferenciálního počtu byli nezávisle na sobě Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), přičemž Newton pojem odvozoval z fyziky (rychlost), zatímco Leibniz rozvíjel spíše formální symboliku. Podobnými problémy jako Newton a Leibniz se již ve 30. letech 17. století zabýval i P. de Fermat, který hledal maximální a minimální hodnoty funkcí – tedy případy, kdy je změna nulová.

¹²⁾Znalost okamžité rychlosti změny je cenná i proto, že tam, kde derivace přechází

Jestliže budeme nyní sledovat obr. 7, pak průměrnou změnu (např. průměrnou rychlost) v určitém intervalu (např. mezi body A a B) si geometricky můžeme představit jako sklon úsečky spojující tyto dva body (sečna). Pokud bychom rovnici sečny zapsali ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, pak průměrná rychlost je hodnota směrnice k .



Obr. 7: Průměrná a okamžitá (derivace) změna

Budeme-li nyní bod B přibližovat k bodu A tak, že zmenšíme interval na nekonečně malou (infinitesimální) hodnotu, pak se sečna promění v tečnu, která se křivky dotýká jen v jediném bodě A . Sklon tečny v bodě A prozrazuje okamžitou změnu (okamžitou rychlost), tedy derivaci. Pokud bychom rovnici tečny zapsali ve směrnicovém tvaru $y = mx + r$, pak hodnota směrnice tečny m je okamžitá rychlost v bodě A , tedy derivace funkce v A .¹³⁾ Derivaci funkce $L(t)$ budeme označovat symbolem $L'(t)$.

z kladné do záporné hodnoty (nebo naopak), dosahuje křivka svého vrcholu či dna. Tak lze zjistit nejvyšší denní teplotu, maximální tržby podniku nebo nejdelší den v roce bez nutnosti prohlížet každý bod grafu.

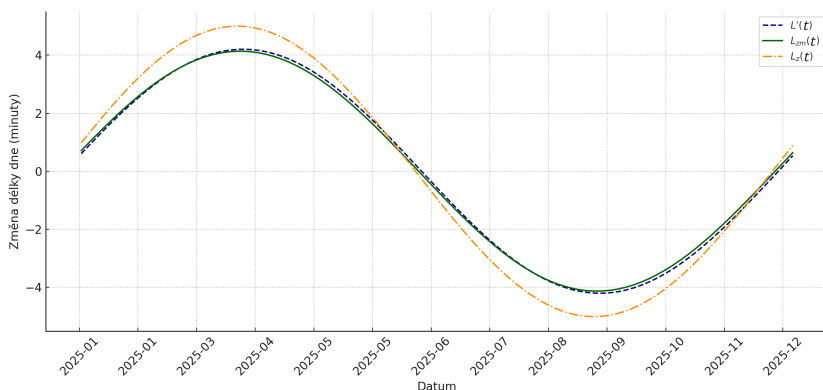
¹³⁾K úplnému porozumění a zvládnutí pojmu derivace nestačí jen vědět, že jde o rychlost změny. Základem je pochopení, co je funkce a jak se její hodnoty mění. Důležité je umět číst grafy funkcí a rozpoznat, kdy funkce roste nebo klesá. Derivace funkce je v moderní matematice založena na pojmu limity funkce. Čtenář by měl vědět, co znamená, když „přibližujeme dva body k sobě“, a jak limitní přechod, kdy je přírůstek vstupu funkce nekonečně malý, vede k okamžité změně. Pro využití derivace

Pro konkrétní výpočet derivace funkce sinus, která popisuje délku dne, nebudeme uvádět podrobný matematický postup. Pro přesný výpočet lze využít řadu volně dostupných nástrojů na internetu.¹⁴⁾ Tyto nástroje umožňují nejen výpočet derivace, ale často také její grafické znázornění či krokové řešení. Pro derivaci funkce (2) platí

$$L'(t) \approx 4,08 \cdot \frac{2\pi}{365} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right) = 0,07 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80,75)\right),$$

neboť derivací funkce sinus je funkce kosinus.

Pokud dále amplitudu funkce $L'(t)$ vyjádříme rovněž v minutách, kde $B = 0,07$ hod $\doteq 4,2$ min, pak můžeme provést srovnání grafů funkcí $L'(t)$, $L_z(t)$ a $L_{zm}(t)$ (obr. 8).



Obr. 8: Srovnání grafů funkcí $L'(t)$, $L_z(t)$ a $L_{zm}(t)$

Střední kvadratická chyba mezi funkcemi $L'(t)$ a $L_z(t)$ je přibližně 0,57 minuty, mezi funkcemi $L'(t)$ a $L_{zm}(t)$ pak přibližně 0,1 minuty.

Funkce pro změnu délky dne $L_z(t)$ i $L_{zm}(t)$ skutečně odpovídá derivaci funkce délky dne, od které se liší pouze měřítkem. Je to tedy derivace až na konstantní násobek a posun, což je přesně to, co bychom čekali při

je třeba zvládnout základní pravidla pro její výpočet, pravidla pro derivace elementárních funkcí, pravidla pro derivace součtů, součinů či podílů funkcí apod. Čtenář by současně měl umět použít derivaci při popisu konkrétního jevu (např. změna délky dne) a interpretovat výsledek, např. kdy je změna nejrychlejší nebo kdy se zastaví.

¹⁴⁾Např. Symbolab: Derivative Calculator

(<https://www.symbolab.com/solver/derivative-calculator>),

GeoGebra CAS kalkulačka (<https://www.geogebra.org/classic/cas>),

WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com/input/?i=derivative>)

porovnání fyzikální derivace a empirického přepočtu v jiných jednotkách (hodiny vs. minuty).

Jistě existuje celá řada přírodních cyklů, které mají periodický charakter a lze je amproximovat pomocí goniometrických funkcí. Z dalších můžeme zmínit např. změny výšky hladiny moří jako důsledek střídajícího se přílivu a odlivu, změnu délky stínu v závislosti na poloze Slunce, změnu teploty půdy v průběhu roku, fáze Měsíce apod [1, 4].¹⁵⁾

Čtenář si může ověřit úvahy zmíněné v článku na následující úloze týkající se změny teploty vzduchu v průběhu roku (poznámky k řešení jsou v Příloze A).

Problém. V tab. 1 je uveden normál průměrných měsíčních teplot v Trutnově.¹⁶⁾ Na obr. 9 je graf teplot z tab. 1 a dále graf meziměsíčních změn teplot.

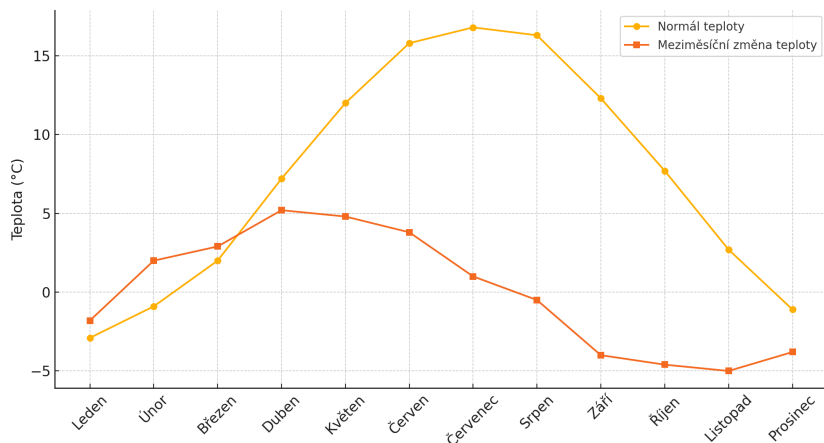
Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Normál	−2,9	−0,9	2,0	7,2	12,0	15,8
Měsíc	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
Normál	16,8	16,3	12,3	7,7	2,7	−1,1

Tab. 1: Normál průměrných měsíčních teplot v Trutnově

1. Určete předpisy funkcí aproximujících graf průměrných měsíčních teplot a graf meziměsíčních změn teplot vzduchu v Trutnově.
2. Porovnejte (pomocí grafu) nalezené aproximující funkce s grafem průměrných měsíčních teplot a grafem meziměsíčních změn teplot vzduchu.
3. Určete střední kvadratickou chybu (RMSE) pro modely průměrných měsíčních teplot i meziměsíčních změn teploty vzduchu.
4. Derivaci funkce průměrných měsíčních teplot srovnajte s funkcí meziměsíčních změn teplot.
5. Vyzkoušejte AI pro vytvoření modelových funkcí a určení RMSE. Porovnejte tyto modely s empirickými modely z bodu 1.

¹⁵⁾Periodické jevy jako příliv a odliv popisoval už v 17. století Galileo Galilei (1564–1642). Jeho pozorování měsíčních fází, pohybu planet i mořských jevů vedla k hlubšímu chápání rytmů v přírodě.

¹⁶⁾Normál teploty vzduchu je průměrná hodnota teploty, která je vypočtena z dlouhodobého sledování počasí. Typicky se počítá za období 30 let podle metodiky Světové meteorologické organizace (WMO).



Obr. 9: Graf průměrných měsíčních teplot vzduchu a meziměsíčních změn teplot vzduchu v Trutnově

Závěr

Obsah článku o změně délky dne jako modelu periodického přírodního jevu nabízí příležitost propojit výuku goniometrických funkcí s reálným světem. Funkce sinus a kosinus tak nejsou jen abstraktní matematické objekty, ale naopak velmi užitečné nástroje k popisu pravidelně se opakujících jevů v přírodě. Konkrétně bylo ukázáno, jak parametry těchto funkcí – amplituda, perioda, fázový posun a vertikální posun – odpovídají skutečným charakteristikám délky dne během roku.

V článku jsme využili i možnosti, které nabízí umělá inteligence (AI). Modely, které jsme takto získali, poskytly přesnější přizpůsobení modelů reálným datům než ručně získané modely. Jedním ze zásadních důvodů, proč model navržený pomocí AI (např. ChatGPT) vykazuje nižší střední kvadratickou chybu než ručně odvozená funkce, je použití numerické optimalizace. AI model hledá takové parametry funkce (například střední hodnotu, amplitudu, frekvenci a fázový posun), které vedou k co nejmenší chybě mezi modelem a reálnými daty. Tento přístup je výpočetně náročnější, ale umožňuje přesnější přizpůsobení modelu konkrétnímu datovému souboru.

Zatímco ručně odvozená funkce se často snaží přesně vystihnout konkrétní klíčový bod (například délku dne při letním slunovratu), AI model bere v úvahu chybu napříč celým rokem a snaží se ji rovnoměrně minimalizovat. Výsledkem bývá model, který nemusí perfektně odpoví-

dat fyzikální interpretaci (např. maximálně přesný den slunovratu), ale poskytuje menší celkovou odchylku.

Literatura

- [1] Benth, F. E., Benth, J. Š.: Weather derivatives and stochastic modelling of temperature. *International Journal of Stochastic Analysis*, roč. 2011 (2011), č. ID 576791, s. 1–21.
- [2] Hodson, T. O.: Root-mean-square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): When to use them. *Geoscientific Model Development*, roč. 15 (2022), s. 5481–5487.
- [3] Strogatz, S.: *Infinite Powers. The Story of Calculus, The Language of the Universe*. Atlantic Books, Londýn, 2020.
- [4] Wang, Y.-K.: Mathematical model for solving the relationship of shadow length changing over time through solar elevation. *Advances in Engineering Research*, roč. 118 (2017), s. 226–228.

Příloha

Předpokládejme, že funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar odpovídající rovnici (1). Podle tab. 1 platí, že $A \doteq 7,51$ a $B \doteq 9,85$. Úhlová frekvence funkce odpovídá počtu měsíců v roce, tj. $C = 2\pi/12 = \pi/6$. K odhadu fázového posunu D uvážíme fakt, že maximum teploty nastává v červenci ($t = 7$). Funkce určená rovnicí (1) má maximum, když

$$\sin\left(\frac{\pi(t-D)}{6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi(t-D)}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t-D = 3 \Rightarrow D = t-3.$$

Pokud je maximum teploty v $t = 7$, pak $D = 7 - 3 = 4$. Po dosazení do rovnice (1) platí, že funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar (obr. 10 vlevo)

$$L(t) = 7,51 + 9,85 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-4)\right). \quad (7)$$

Předpokládejme, že funkce aproximující meziměsíční změny teploty vzduchu má tvar odpovídající rovnici (4).

Podle tab. 2 platí, že $A_z = 0$ a $B_z \doteq 5,1$. Úhlová frekvence funkce odpovídá počtu měsíců v roce, tj. $C_z = 2\pi/12 = \pi/6$.

Měsíc	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Změna teploty	-1,8	2,0	2,9	5,2	4,8	3,8
Měsíc	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
Změna teploty	1,0	-0,5	-4,0	-4,6	-5,0	-3,8

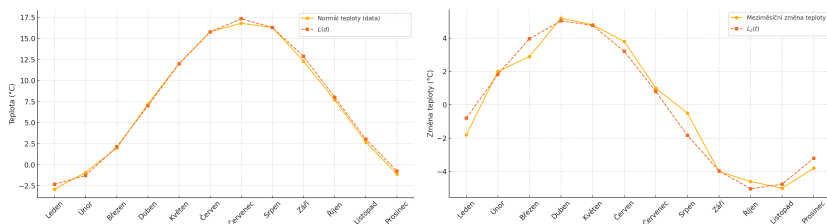
Tab. 2: Meziměsíční změny teploty vzduchu

K odhadu fázového posunu D_z uvážíme fakt, že maximální změna teploty vzduchu nastává v dubnu ($t = 4$). Funkce určená rovnicí (4) má maximum, když

$$\cos\left(\frac{\pi(t - D_z)}{6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi(t - D_z)}{6} = 0 \Rightarrow t - D_z = 0 \Rightarrow D_z = t.$$

Pokud maximální změna teploty nastává v $t = 4$, pak $D_z = 4$, a funkce aproximující průměrné teploty vzduchu má tvar (obr. 10, vpravo)

$$L_z(t) = 5,1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right). \quad (8)$$



Obr. 10: Porovnání reálných dat s modelovými funkcemi pro průměrné měsíční teploty vzduchu (vlevo), meziměsíční změny teplot vzduchu (vpravo)

Střední kvadratická chyba pro model průměrných měsíčních teplot určený rovnicí (7) je cca $0,7^\circ\text{C}$, střední kvadratická chyba pro model meziměsíčních změn teploty vzduchu určený rovnicí (8) je cca $1,12^\circ\text{C}$. Pro derivaci funkce teploty vzduchu platí

$$L'(t) \approx 9,85 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right) \doteq 5,15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right).$$

Srovnání funkcí $L'(t)$ a $L_z(t)$ ukazuje malý rozdíl v amplitudě, střední kvadratická chyba činí cca $0,04^\circ\text{C}$.