

Vlastimil Dlab

Číselná charakteristika podobných trojúhelníků

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 4, 15–21

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153271>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Číselná charakteristika podobných trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Článek [2] poukázal na důležitost pojmu podobnost trojúhelníků při studiu rovinné geometrie. Přitom znovu podtrhl roli komplexních čísel, zdůrazněnou už v učebnici [1]. V tomto článku popíšeme bijekci svazující podobné trojúhelníky a komplexní čísla.

Stejně jako v [2] je náš modus operandi komplexní Gaussova rovina¹⁾ opatřená pravoúhlými souřadnicemi, takže její body $D, V, W, H, Z, \dots$ budeme identifikovat s komplexními čísly $d, v, w, h, z, \dots$. Množinu komplexních čísel budeme značit písmenem $\mathbb{C}$. Trojúhelníky identifikujeme s trojicemi komplexních čísel, které neleží na téže přímce.

Pro porozumění tomuto článku jsou potřeba základní znalosti komplexních čísel: reálná část $\operatorname{Re}(z)$ a imaginární část $\operatorname{Im}(z)$ komplexního čísla z , absolutní hodnota $|z|$, komplexně sdružené číslo $\bar{z}$, argument komplexního čísla, sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel. Je třeba rozumět tomu, že násobení komplexním číslem odpovídá rotaci kolem počátku.

Omezíme se na orientované trojice bodů: Trojúhelníky ABC (tj. abc) a UVW (tj. uvw) jsou podobné, jestliže délky jejich stran AB, BC a CA (tj. absolutní hodnoty $|a - b|, |b - c|$ a $|c - a|$) jsou, pro jisté kladné (reálné) číslo t , t -násobky délek stran UV, VW a WU (tj. $|u - v|, |v - w|$ a $|w - u|$). Budeme v tomto případě mluvit o „přímé“ či „orientované“ podobnosti a značit ji symbolem $\sim$: $abc \sim uvw$.

Jádrem důkazu hlavní věty v článku [2] bylo následující lemma, které je v tomto článku naším výchozím tvrzením.

Lemma. *Trojúhelníky $Z_1Z_2Z_3$, tj. $z_1z_2z_3$, a $W_1W_2W_3$, tj. $w_1w_2w_3$, jsou přímo podobné právě tehdy, když*

$$\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1)$$

Podáme dva důkazy tohoto tvrzení, abychom blíže osvětlili bezprostřední vztah mezi elementární rovinnou geometrií a strukturou komplexních čísel.

¹⁾V cizojazyčné literatuře častěji nazývána Argandova či Argandova–Gaussova rovina.

Prvním důkazem oslovíme čtenáře, kteří se seznamují se strukturou komplexních čísel. Důkaz využívá pojmy translace (posunutí) a rotace (otočení) komplexní roviny a je prezentován ve formě tohoto objasňujícího tvrzení: *Pro každou uspořádanou trojici $z_1 z_2 z_3$ existuje právě jedna trojice tvaru $01u$ splňující $z_1 z_2 z_3 \sim 01u$. Navíc, jestliže je $z_1 z_2 z_3$ kladně orientována²⁾, potom $\text{Im}(u) > 0$.*

Aplikací $t(z) = z - z_1$ dostáváme $z_1 z_2 z_3 \sim 0z'_2 z'_3$, kde $z'_2 = z_2 - z_1$ a $z'_3 = z_3 - z_1$. Poté aplikace $r(z) = (z'_2)^{-1}z$ vede ke $0z'_2 z'_3 \sim 01u$ s $u = (z'_2)^{-1}z'_3$. Tedy $z_1 z_2 z_3 \sim 01u$. Navíc, je-li trojúhelník $z_1 z_2 z_3$ kladně orientován, je kladně orientován též $01u$ a tedy u leží v horní polorovině. Z těchto výpočtů vyplývá, že

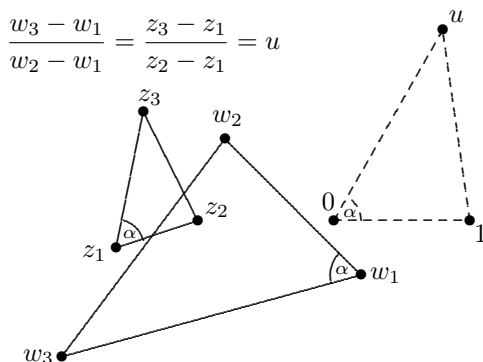
$$u = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad (2)$$

a že tedy $01u$ je taková trojice jediná.

Druhý důkaz je stručná sbírka jednoduchých faktů, které čtenáři obeznámení se strukturou komplexních čísel shledají zcela elementární a evidentní. Absolutní hodnota poměru (1)

$$\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$$

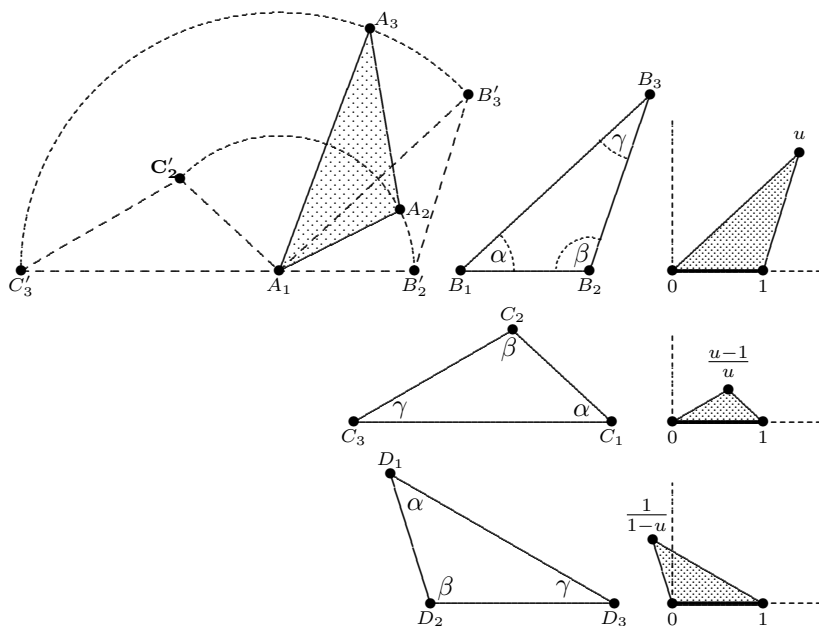
vyjadřuje poměr délek dvou stran trojúhelníku a argument podílu (2) úhel α mezi těmito dvěma stranami. Tuto situaci jasně vyjadřuje obr. 1.



Obr. 1: Trojúhelníky $z_1 z_2 z_3$, $w_1 w_2 w_3$ a $01u$ jsou podobné

²⁾Připomeňme, že trojice bodů z_1, z_2, z_3 je kladně orientována, pokud se na kružnici opsané těmito bodům dostaneme pohybem proti směru ručiček hodin ze z_1 nejprve do z_2 a poté do z_3 .

Důkaz je tedy založen na jednoduché myšlence vybrat ze souboru všech přímo podobných trojúhelníků takový, jehož jedna strana má (zvolenou) délku 1. Takové volby jsou obecně možné tři, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2: Podobné trojúhelníky $01u$, $01\frac{u-1}{u}$ a $01\frac{1}{1-u}$

Obr. 2 dokazuje bezprostředně následující tvrzení.

Věta. Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ splňujících $\text{Im}(z) > 0$ (tj. čísel ležících v Gaussově rovině nad reálnou osou) připouští rozklad na vzájemně disjunktní trojice čísel

$$\mathbb{D}_u = \left\{ u, \frac{1}{1-u}, \frac{u-1}{u} \right\}. \quad (3)$$

Tyto trojice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami přímo podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto trojic degeneruje na jedno číslo

$$u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků.

Zde si neodpustíme malou poznámku týkající se imaginární části čísel v trojici (3). Jakmile jedno z těchto čísel má tuto část kladnou, mají ji kladnou (jak jsme už zaznamenali) i zbylá dvě čísla. Čtenáři, kteří mají v oblíbené početní argument se mohou přesvědčit, že tvar čísla $u = r + s i$, $r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, vede k zápisu

$$\frac{1}{1-u} = \frac{1-r}{(1-r)^2 + s^2} + \frac{s}{(1-r)^2 + s^2} i,$$

$$\frac{u-1}{u} = \frac{r(r-1) + s^2}{r^2 + s^2} + \frac{s}{r^2 + s^2} i,$$

a tedy $\text{Im}\left(\frac{1}{1-u}\right) > 0$ a $\text{Im}\left(\frac{u-1}{u}\right) > 0$.

Každý čtenář se jistě nyní rád přesvědčí, že třídám rovnoramenných trojúhelníků odpovídá trojice

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{t}{2} i, \frac{2}{t^2 + 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} i, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} i \right\}, \quad t > 0,$$

a třídám pravoúhlých trojúhelníků odpovídají trojice

$$\mathbb{D} = \left\{ t i, \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^2 + 1} i, 1 + \frac{1}{t} i \right\}, \quad t > 0.$$

Pravoúhlé trojúhelníky jsou tedy charakterizovány faktem, že přiřazená trojice čísel obsahuje číslo ryze imaginární. Speciálně,

$$\mathbb{D} = \left\{ i, 1 + i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right\}$$

popisuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Poznámka. Shora uvedenou větu můžeme snadno modifikovat na případ všech (tj. neorientovaných) podobných trojúhelníků užitím komplexně sdružených čísel: *Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ splňujících $\text{Im}(z) \neq 0$ (tj. čísel ležících v Gaussově rovině mimo reálnou osu) přiřadí rozklad na vzájemně disjunktní šestice čísel*

$$\overline{\mathbb{D}}_u = \left\{ u, \bar{u}, \frac{1}{1-u}, \frac{1}{1-\bar{u}}, \frac{u-1}{u}, \frac{\bar{u}-1}{\bar{u}} \right\}.$$

Tyto šestice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami všech podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto šestic degeneruje na dvojici čísel

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

a odpovídá množině všech rovnostranných trojúhelníků.

Poznámka. „Normování“ podobných trojúhelníků do polohy, kdy je jedna ze stran identifikována s intervalem $[0, 1]$ je pouze naší (vhodnou) volbou. Volba intervalu $[-1, 0]$ definuje stejným způsobem třídy

$$\left\{ u, -\frac{1+u}{u}, -\frac{1}{1+u} \right\}.$$

Poněkud jiný rozklad dostáváme volbou intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Tato volba vede k rozkladu komplexních čísel s kladnou imaginární částí na třídy

$$\left\{ u, \frac{3+2u}{2-4u}, \frac{2u-3}{4u+2} \right\}.$$

V tomto případě je

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

třídou, která degenerovala na jedno číslo (a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků).

Nezbývá než uvést shora uvedenou větu ve zcela obecném tvaru, kdy zvoleným intervalem je interval $[a, b]$, kde $a \neq b$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$.

Obecná věta. *Množina všech komplexních čísel $z \in \mathbb{C}$ ležících v polovině Gaussovy roviny definované přímkou určenou čísly a a b připouští rozklad na vzájemně disjunktní trojice čísel*

$$\widehat{\mathbb{D}}_u = \left\{ u, a + \frac{(b-a)^2}{b-u}, b + \frac{(b-a)^2}{a-u} \right\}.$$

Tyto trojice jsou v jednoznačné korespondenci s třídami přímo podobných trojúhelníků. Pouze jedna z těchto trojic degeneruje na jedno číslo

$$u = \frac{a(1 - \sqrt{3}i) + b(1 + \sqrt{3}i)}{2}$$

a odpovídá množině orientovaných rovnostranných trojúhelníků.

Pokud bychom chtěli popsat šestice komplexních čísel odpovídající množině všech (tj. neorientovaných) podobných trojúhelníků, využili bychom následující lemma, jehož důkaz ponecháme čtenáři.

Lemma. *Zrcadlový obraz komplexního čísla u podle přímky určené komplexními čísly a a b je číslo*

$$a + \frac{(\bar{u} - \bar{a})(b - a)}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

Poznámka. V této závěrečné poznámce poukážeme na souvislost výše popsaného rozkladu komplexních čísel se skládáním příslušných komplexních funkcí. Zvolme dvě různá komplexní čísla a a b a označme pomocí $\mathbb{C}_{a,b}$ množinu všech komplexních čísel, která neleží na přímce definované čísly a a b . Kromě identické funkce f_1 , $f_1(z) = z$, definujme na $\mathbb{C}_{a,b}$ funkce f_2 a f_3 :

$$f_2(z) = a + \frac{(b-a)^2}{b-z} \quad \text{a} \quad f_3(z) = b + \frac{(b-a)^2}{a-z}.$$

Na množině $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ definujeme „násobení“ $\times$ pomocí skládání funkcí $(f_s \times f_t)(z) = f_s(f_t(z))$. Násobení je tedy dáno tabulkou

$\times$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

V terminologii abstraktní algebry je $(G, \times)$ cyklickou grupou řádu 3.

Závěr článku patří dvěma úlohami čtenáři.

1. Ukažte, že volba $a = -1$ a $b = 1$ definuje bijekci mezi rozkladem poloviny komplexních čísel na tříprvkové třídy

$$\left\{ u, \frac{3+u}{1-u}, \frac{-3+u}{1+u} \right\}$$

a množinami orientovaných podobných trojúhelníků s výjimkou jednočlenné třídy popisující množinu všech orientovaných rovnostranných trojúhelníků. Určete toto komplexní číslo.

2. Dokažte, že rozklad poloroviny komplexních čísel na trojice čísel

$$\left\{ u, \frac{1}{u-i}, \frac{1+ui}{u} \right\}$$

definuje bijekci s množinami všech orientovaných rovnostranných trojúhelníků s výjimkou degenerované jednoprvkové třídy

$$\left\{ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right\}.$$

Literatura

- [1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.
- [2] Dlab, V.: Towards understanding of Napoleon's theorem. Complex numbers are the key. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 100 (2025), č. 2, s. 33–40.
- [3] Dlab, V.: *Hlubší porozumění větě Napoleonově*. <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Hlubsi.porozumeni.pdf>

Anděl na útěku

Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno

Abstrakt. V tomto článku se zabýváme hrou dvou hráčů na nekonečné šachovnici. Jeden z hráčů (ďábel) odebírá pole a snaží se soupeře polapit, zatímco druhý hráč (anděl) se pohybuje dle předepsaných pravidel a snaží se do nekonečna unikat. Je známo, že anděl dokáže unikat, je-li jeho předem stanovená rychlost dostatečná, a je naopak chycen, když je jeho rychlost příliš malá.

Úvod

Hry a hlavolamy inspirovaly matematiky od nepaměti. Již před naším letopočtem se Archimedes ptal, kolika způsoby lze složit 14 jistých dílků, aby vytvořily čtverec, viz Ostomachion [9]. V roce 1982 tak sepsali Berlekamp, Conway, a Guy dvousvazkovou knihu popisující různé matematické hry *Winning Ways for your Mathematical Plays*. V roce 2004