

Rozhledy matematicko-fyzikální

Jan Jekl

Anděl na útěku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 4, 21–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153272>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

2. Dokažte, že rozklad poloroviny komplexních čísel na trojice čísel

$$\left\{ u, \frac{1}{u-i}, \frac{1+ui}{u} \right\}$$

definuje bijekci s množinami všech orientovaných rovnostranných trojúhelníků s výjimkou degenerované jednoprvkové třídy

$$\left\{ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right\}.$$

Literatura

- [1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.
- [2] Dlab, V.: Towards understanding of Napoleon's theorem. Complex numbers are the key. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 100 (2025), č. 2, s. 33–40.
- [3] Dlab, V.: *Hlubší porozumění větě Napoleonově*. <https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Hlubsi.porozumeni.pdf>

Anděl na útěku

Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno

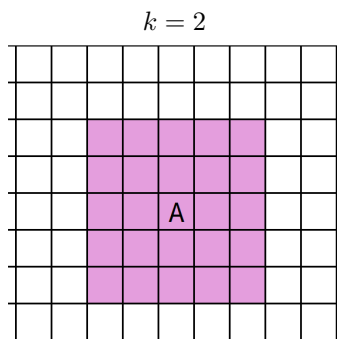
Abstrakt. V tomto článku se zabýváme hrou dvou hráčů na nekonečné šachovnici. Jeden z hráčů (ďábel) odebírá pole a snaží se soupeře polapit, zatímco druhý hráč (anděl) se pohybuje dle předepsaných pravidel a snaží se do nekonečna unikat. Je známo, že anděl dokáže unikat, je-li jeho předem stanovená rychlost dostatečná, a je naopak chycen, když je jeho rychlost příliš malá.

Úvod

Hry a hlavolamy inspirovaly matematiky od nepaměti. Již před naším letopočtem se Archimedes ptal, kolika způsoby lze složit 14 jistých dílků, aby vytvořily čtverec, viz Ostomachion [9]. V roce 1982 tak sepsali Berlekamp, Conway, a Guy dvousvazkovou knihu popisující různé matematické hry *Winning Ways for your Mathematical Plays*. V roce 2004

vyšlo druhé vydání knihy rozdělené do čtyř svazků čítajících dohromady 1000 stran.

Ve druhém svazku z roku 1982 [1] (ve třetím svazku druhého vydání) je zmíněna následující úloha. Představme si, že máme nekonečnou šachovnici, po které se pohybuje anděl. Anděl se pohybuje podobně jako král na šachovnici s jediným rozdílem, že anděl může provést ve svém tahu až k tahů krále, kde k je pevně zvolené číslo, viz obr. 1. Ďábel se snaží polapit anděla tak, že postupně odstraňuje čtverce ze šachovnice, aby na ně anděl nemohl znovu vstoupit. Přitom se dokola střídají v tazích, kdy anděl vždy učiní svůj pohyb a ďábel odstraní jedno pole. Anděl může ve svém pohybu přeskakovat i odstraněná políčka, ale nemůže na nich skončit. Ďábel vyhraje, pokud je anděl uvězněn v pasti, ze které nemůže uniknout. Anděl vyhraje, pokud jej ďábel nikdy nepolapí, tj. pokud dokáže donekonečna unikat. Pro usnadnění budeme používat značení anděl_k , kde se jedná o anděla se silou k .

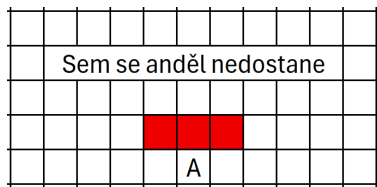


Obr. 1: Vyznačená pole, kam se může přesunout anděl_2

Otázka, která zajímala autory knihy [1], je jednoduchá. Polapí ďábel anděl_k ? Dokáže anděl_k unikat navždy, aniž by byl polapen? Hraje volba k nějakou roli? Část odpovědí na tuto otázku poskytli již samotní autoři knihy [1]. Protože však ani po patnácti letech otázku nikdo uspokojivě nezodpověděl, vypsál J. H. Conway finanční odměnu za nalezení odpovědi na zbývající otázky [3]. V závislosti na získané odpovědi a po přepočtení nabízené částky na dnešní peníze by si tak úspěšný řešitel mohl připsat na účet až 40 tisíc korun.

Kompletní odpověď na uvedené otázky byla získána až v roce 2007. Dnes tedy již víme, že je-li $k = 1$, pak ďábel dokáže polapit anděla.

Je-li k alespoň 2, pak anděl dokáže unikat donekonečna. V tomto článku popíšeme řešení pro $k = 1$ a pro $k \geq 11$, kde vycházíme primárně z článků [3], [8] a knihy [1]. V případě nejasností doporučujeme čtenáři tyto texty také prozkoumat. Zmiňme také, že není známo, zda byla finanční odměna nakonec vyplacena [12].



Obr. 2: Anděl₁ na tahu. Nachází-li se před andělem₁ tři odebraná pole (červená barva), pak se již anděl₁ nikdy za tuto hranici nedostane

Zmiňme nakonec, že není zcela jasné, kdo samotnou hru vymyslel. Silverman je dle článku [4] vynálezcem her, kde se na šachovnici pohybuje šachová figura a protivník odebírá pole. V knize [1] připisují autorství zde popsané verze hry panu Epsteinovi [11]. Nicméně pan Silverman zde uvedenou hru i s jejími obecnými pravidly uvádí také ve své knize [10] z roku 1971, tj. jedenáct let před vydáním knihy [1].

Polapení anděla pro $k = 1$

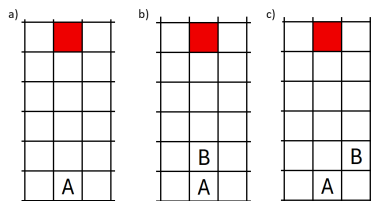
První ze všeho učiníme několik pozorování. Pokud bude ďábel odebírat pole vždy v blízkosti anděla₁, pak dokáže anděl₁ unikat. Proto aby byl anděl₁ chycen, tak musí ďábel nachystat „past“, do které se anděl₁ chytí.

Rozmysleme si také, že tři odebraná pole přímo před andělem₁ tvoří pro anděla₁ nepřekonatelnou hranici, viz obr. 2. Posune-li se anděl₁ doprava, pak ďábel odstraní další pole v řadě napravo. Naopak posune-li se anděl₁ doleva, pak ďábel odstraní další pole v řadě nalevo.

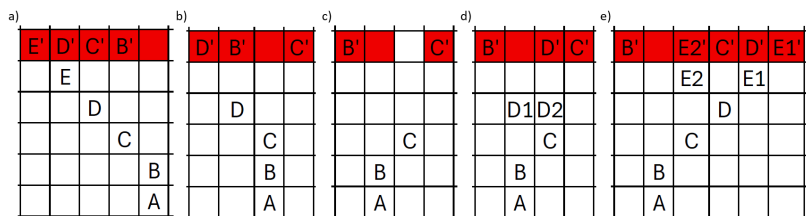
Vítězná strategie vedoucí k uvěznění anděla spočívá v tom, že lze takovou bariéru blížícímu se andělovi předem nachystat. Předpokládejme, že anděl se pohybuje jedním směrem a ďábel ho chce zastavit. Ďáblovi stačí odebrat pole v páté řadě přímo před andělem, viz obr. 3 a), a volit správně následující kroky. Anděl se nyní může posunout dopředu 3 b) nebo do strany 3 c). Vzhledem k symetrii situace stačí studovat pouze posun do jedné ze stran a posun do druhé strany dopadne analogicky.

Rozebereme nejprve variantu 3 b), kdy se anděl₁ posune dopředu na pole B, obr. 4. Ďábel reaguje odebráním pole na jedné straně B'. Vydá-li

se anděl₁ ve směru odebraného pole B', pak ďábel reaguje postupným odebráním polí ve stejném směru, obr. 4 a). Pokud by se anděl₁ posunul z pole B znovu dopředu na pole C, obr. 4 b), pak stačí odebrat pole C' na druhé straně a anděl₁ je již v pasti. Anděl₁ se tedy musí posunout v opačném směru od odebraného pole B', obr. 4 c) a nyní ďábel přeskočí jedno pole a odebere C'. Nyní je již anděl₁ také v pasti.



Obr. 3: a) Anděl₁ se přiblížil k pomyslné hranici, kterou chce ďábel vybudovat, a ďábel odebere čtverec pět polí před andělem₁, aby jej zastavil. Anděl₁ je na tahu a může se posunout vpřed b), nebo do strany c)



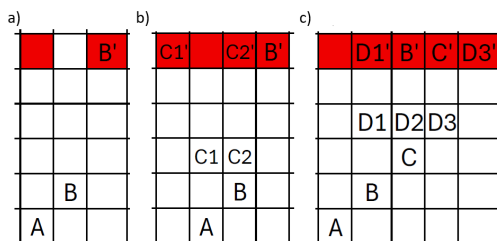
Obr. 4: Tahy anděla₁ jsou vyznačeny tiskacími písmeny. Odpovědi ďábla jsou doplněny o apostrof. Jedná se o rozbor možných tahů, kdy anděl táhne prvním tahem vpřed, viz 3 b).

Posune-li se anděl₁ z pole C doleva nebo dopředu, ďábel odebere vynechané pole D', obrázek 4 d). Posune-li se anděl z pole C dále doprava, obr. 4 e), pak pokračujeme odebráním polí napravo od C', kde vynechané pole E2' odebíráme, jenom kdyby se anděl pokusil proklouznout tahem doleva E2. Pečlivým rozebráním situace vidíme, že anděl₁ je již v pasti.

Nyní se podívejme na druhou variantu 3 c), kde se anděl₁ posune do strany na pole B. Na tento tah je potřeba reagovat vynecháním jednoho pole a odebráním dalšího pole ve směru andělova₁ pohybu, obr. 5 a). Pokud se nyní posune anděl₁ z pole B dopředu na pole C2, pak odebíráme vynechané místo, obr. 5 b), a podobně postupujeme, pokud se

anděl₁ z pole B posune doleva na C1. Pokud se anděl₁ posune z pole B dále doprava na pole C, obr. 5 c), pak odebíráme pole napravo C'. Vynechané místo D1' odebíráme, jenom kdyby se anděl₁ pokusil proklouznout tahem vpřed na D2 nebo doleva na D1. V případě, že anděl pokračuje pohybem na D3, odebíráme další pole D3' v řadě. Ve všech těchto případech je anděl₁ již prakticky zablokován a nemůže překročit ďáblem vytyčenou hranici.

Uvedenými kroky může ďábel uvěznit anděla₁ v jedné polorovině. Je ale jasné, že v tomto případě není anděl chycen, protože stále může nekonečně unikat do strany. Past na anděla₁ však kompletně sklapne, bude-li anděl₁ uvězněn v ohraničené oblasti. Aby bylo možné anděla₁ uvěznit, je potřeba si „oblast“ předem nachystat. Ďábel nejprve odebírá rohová pole ve tvaru písmene L, v dostatečně velkém čtverci tak, jak je vyznačeno na obr. 6. V rozích odebrané pole zajistí, že anděl nebude moci do nekonečně unikat podél přímky.

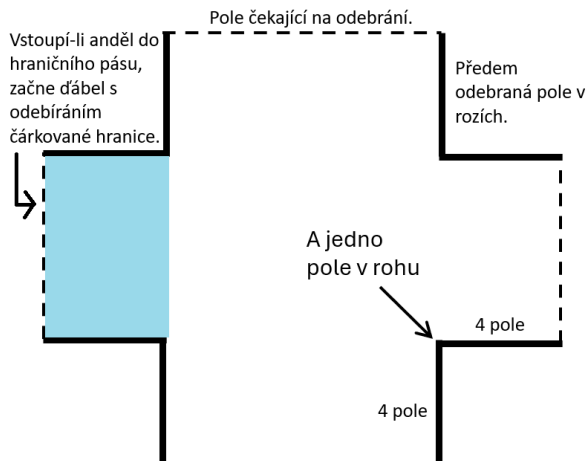


Obr. 5: Tahy anděla₁ jsou vyznačeny tiskacími písmeny. Odpovědi ďábla jsou doplněny o apostrof. Jedná se o rozbor možných tahů, kdy anděl táhne prvním tahem do strany, viz 3 c)

Chystaný čtverec musí být dostatečně velký, aby z něj anděl neunikl než budou rohová pole odebrána. K odebrání rohů stačí ďáblu pouze 36 tahů (9 tahů na vytvoření hranice ve tvaru L v každém rohu), tj. čtverec by měl být dostatečně velký, aby se z něj anděl₁ za 36 tahů nedostal (a nechceme ani, aby se v této době dostal do vznikajících pásů). Tedy počáteční čtverec musí mít stranu délky alespoň 83 polí, tj. 36 v každém směru od anděla. Na stranách čtverce tak vzniknou pásy, do kterých když anděl₁ vstoupí, tak ďábel začne vyplňovat čárkovanou hranici dle výše uvedeného postupu, aby anděl₁ z oblasti neunikl.

Předem odebrané rohy zajistí, že anděl₁ nebude moci unikat do strany věčně, ale dříve nebo později narazí na odebraná pole. Překročí-li anděl₁ z jednoho pásu do druhého, začne ďábel odebírat pole z čárkované hra-

nice nového pásu. Díky předem odebraným rohovým polím jsou na sobě pásy nezávislé a nemůže se tak stát, že by ďábel musel vyplňovat dvě úsečky najednou.



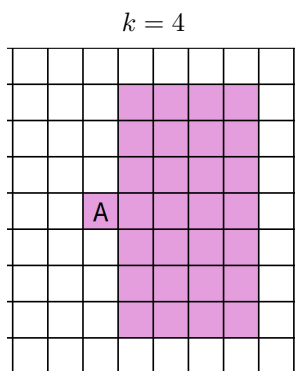
Obr. 6: Předchystaná oblast, kde dojde k uvěznění anděla₁, musí být dostatečně velká, aby ďábel dokázal odebrat vždy 9 polí v každém rohu ve tvaru písmene L, viz černá čára reprezentující odebrané pole. Po tuto dobu se anděl₁ nesmí dostat do vznikajících pásů. Jakmile anděl₁ vstoupí do pásů, začne ďábel odebrat pole na čárkované čáře, aby jej zastavil

Výhoda strategie spočívá také v tom, že pokud by ďábel udělal chybu, pak lze začít znovu od začátku s novou oblastí. Uveďme nakonec, že zde uvedená strategie vychází z textu [6]. Elwyn R. Berlekamp je dle [4] autorem složitější strategie, kterou lze nalézt v knize [1]. Zde je ukázáno, že k uvěznění anděla stačí čtverec o straně délky 33 políček.

Únik anděla není jednoduchý ani pro $k \geq 2$

V předchozí části jsme viděli, že anděla₁ lze polapit. Jak jsme již uvedli, dnes již víme, že pro $k \geq 2$ dokáže anděl_k unikat navždy. Přitom musí být opatrný a volit správnou strategii, neboť pokud by se pohyboval příliš jednoduše, bude uvězněn, jak ukázal Conway [3]. Abychom ukázali, že tomu tak skutečně je, uvažujme anděla_k, který se pohybuje v každém tahu alespoň o jedno pole doprava a nikdy se nevrací doleva, viz obr. 7. Předpokládejme také, že je anděl_k uvězněn, pokud se již nemá kam přesunout. V následující části uvažujme pro přehlednost anděla₄.

Protože se anděl₄ pohybuje pouze jedním směrem, pak ďábel ví, kde je potřeba nachystat past. Předpokládejme, že se pokusíme vybudovat nepropustnou bariéru ve vzdálenosti $h = 2^{260} \approx 1,8 \cdot 10^{78}$ polí napravo od anděla₄. Protože se anděl₄ musí každým tahem posunout doprava, stačí k zastavení anděla₄ dostatečně široká bariéra (o šířce 4), aby ji anděl₄ nemohl přeskočit. Anděl₄ dorazí do vzdálenosti h nejdříve za $\frac{h}{4} = 2^{258}$ tahů, pokud se bude posunovat v každém kroku o 4 pole doprava, tj. co nejrychleji doprava. A naopak nejpozději za $h = 2^{260}$ tahů, pokud se bude pohybovat doprava vždy pouze o jedno pole, tj. co nejpomaleji doprava.

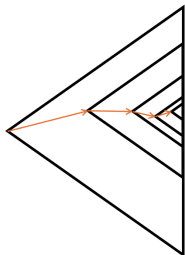


Obr. 7: Pohyb anděla₄ směřujícího vždy alespoň o jedno pole doprava

Nevíme, jaký postup anděl₄ zvolí, a proto je potřeba se dopředu připravit na všechny varianty. Protože se anděl₄ může posunovat ve směru nahoru nebo dolů maximálně h -krát a v každém tahu se posune o maximálně 4 pole, pak chystaná bariéra musí mít délku alespoň $2hk = 8h = 2^{263}$ polí. Zde se zohlednilo, že anděl₄ může směřovat nahoru i dolů. Protože dokonalou neprostupnou bariéru ve vzdálenosti h nelze připravit (ďábel odebírá pole mnohem pomaleji, než se anděl pohybuje), tak si popíšeme, jak lze sestavit alespoň bariéru postačující k uvěznění anděla₄. Předpokládejme nejprve, že budujeme bariéru o šířce 1. Později uvidíme, že stejný postup lze aplikovat 4-krát, aby byla bariéra dostatečně široká.

Rozmysleme si, že čím více se anděl₄ blíží k hranici, tím přesněji víme, kam směřuje, a k jeho zastavení stačí kratší bariéra, viz obr. 8. Jakmile anděl₄ urazí polovinu vzdálenosti $h = 2^{260}$, tj. vzdálenost 2^{259} , tak nově

stačí postavit bariéru zhruba poloviční délky, viz obr. 8. Vždyť původní délka bariéry $2^{263} = 8h$ bude nově také poloviční $8\frac{h}{2} = 4h = 2^{262}$.



Obr. 8: Po několika tazích lze zmenšit chystanou bariéru, neboť známe andělov cíl přesněji

Označme pro následující kroky hodnotu $M = 2^6$ a uvažujme, že

- Anděl₄ urazí polovinu vzdálenosti h , tj. vzdálenost 2^{259} , za 2^{257} tahů, pokud bude spěchat co nejvíce doprava, a za 2^{259} tahů, bude-li se posouvat co nejméně doprava. Za tuto dobu dokáže ďábel určitě odebrat jedno pole z každých $M = 2^6$ polí bariéry o původní délce 2^{263} . Vskutku, k tomu mu stačí pouze $\frac{2^{263}}{M} = \frac{2^{263}}{2^6} = 2^{257}$ tahů.
- Nově andělovi₄ zbývá urazit již jenom druhou polovinu vzdálenosti h , tj. vzdálenost 2^{259} a ďáblovi naopak stačí se nově soustředit pouze na bariéru délky 2^{262} , neboť již přesněji ví, kam anděl₄ směřuje. Polovinu zbývajících vzdálenosti 2^{259} , tj. vzdálenost 2^{258} anděl₄ urazí za 2^{256} tahů, pokud bude spěchat co nejvíce doprava, a za 2^{258} tahů, bude-li se posouvat co nejméně doprava. Za tuto dobu dokáže ďábel z každých $M = 2^6$ polí zbývajících části bariéry jedno pole odebrat. Vskutku, k tomu mu stačí pouze $\frac{2^{258}}{M} = \frac{2^{258}}{2^6} = 2^{256}$ tahů.
- Po dvou krocích již andělovi₄ zbývá urazit pouze vzdálenost 2^{258} a ďáblovi se stačí soustředit na bariéru délky 2^{261} . I ve třetím kroku by se ďáblovi podařilo odebrat vždy jedno z M polí zbývajících části bariéry.
- Ďábel postupuje stejným způsobem pořád dokola. Zatímco anděl₄ urazí polovinu zbývajících vzdálenosti, tak má ďábel dostatek času odebrat vždy 1 z M polí ve tvořící se bariéře. Důležité je, že počáteční vzdálenost je dostatečně velká, aby bylo možné ji opakovaně

půlit. Dále je důležité, že se délka bariéry zmenšuje stejně rychle jako délka vzdálenosti.

- Po M opakováních tohoto postupu již bude stát ve vzdálenosti $\frac{2^{260}}{2^{2^6}} = \frac{2^{260}}{2^{64}} = 2^{196}$ před andělem₄ úsečka o šířce 1 a délce $\frac{2^{263}}{2^{2^6}} = \frac{2^{263}}{2^{64}} = 2^{199}$. Po $4M = 2^8$ opakováních již bude mít bariéra před andělem požadovanou šířku 4.
- Úspěch ďábla spočívá v tom, že si může volit dostatečně velkou počáteční vzdálenost $h = 2^{260}$. Aby postup fungoval pro $k = 4$ a $M = 2^6$, pak musí být $h = 2^\alpha$, kde $\alpha > 256$.

Lze si rozmyslet, že pro obecné k stačí volit $M = 4k^2$ a $\alpha > 4k^3$. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři za úkol. Rozmysleme si také, že bariéra by měla být o něco větší než $2hk$, aby ji anděl v posledním tahu nedokázal obejít. Odebrání krajních polí lze však zajistit zvětšením M a h .

Poznamenejme nakonec, že Conway [3] nazývá anděla_k směřujícího v jednom směru hlupákem.

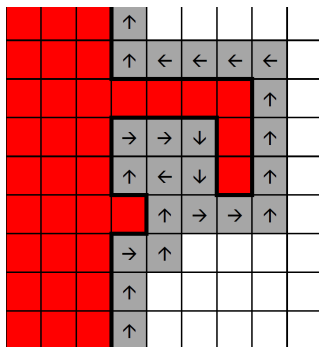
Anděl unikne, je-li $k \geq 11$

Dnes již víme, že anděl_k dokáže unikat, je-li $k \geq 2$. Dvě nezávislá řešení této úlohy byla publikována v roce 2007, a to v článcích [8] a [5]. Přitom autoři o svých výsledcích patrně věděli, neboť se vzájemně ve svých článcích zmiňují. V tomto textu se zaměříme na jednodušší důkaz, který A. Máthé také uvádí ve svém článku [8]. V tomto důkazu je ukázáno, že anděl_k dokáže unikat pro $k \geq 11$. Pro $k \geq 2$ je důkaz o něco složitější a ponecháme jej tedy čtenáři k samostudiu.

Předpokládejme, že je každá buňka hracího pole označena souřadnicemi $[x, y]$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$. Dále předpokládejme, že ďábel již před prvním tahem odebral všechna pole, jejichž x -ová souřadnice je záporná. Tento krok andělovi unik pouze ztíží, a tedy nemá vliv na obecnost důkazu. Namísto anděla však A. Mathé studuje takzvaného běžce. Běžec směřuje těsně podél odebraných polí tak, že:

- má vždy odebraná pole nalevo vzhledem ke směru svého pohybu,
- může urazit libovolný počet polí, aby se dostal tam, kam by se dostal i anděl,
- v každém tahu (dokud není uvězněn) se přesunuje co nejdále to lze.

Pro potřeby důkazu je navíc uvažováno, že běžec při pohybu jakoby obarvuje stěny nalevo, okolo kterých projde. Jak uvidíme později, důkaz také vyžaduje, aby běžec v jednom tahu obarvil maximálně $2k$ stěn, tj. může se zastavit dříve, než by se zastavil anděl kvůli nemožnosti obarvit další stěnu. Obarvené stěny následně poslouží k přibližnému určení běžcovy pozice. Více viz následující důkaz. Pohyb běžce je naznačen na obr. 9.



Obr. 9: Trasa běžce (šedá) těsně podél odebraných polí (červená) směrem vzhůru. Tučné čáry značí již obarvené stěny podél běžcova pohybu

Obarvování stěn hraje v následujícím důkazu klíčovou roli, neboť poloha běžce je odhadována právě podle počtu obarvených stěn. Poznamenejme také, že běžec je slabší verzí anděla, tj. pokud by ďábel dokázal uvěznit anděla, pak dokáže uvěznit i běžce. Naopak pokud ďábel nedokáže uvěznit běžce, pak nedokáže uvěznit ani silnějšího anděla.

Mathé také uvažuje hodného ďábla, který neodebírá pole, na něž běžec dříve vstoupil. Důležité je, viz [8], že pokud hodný ďábel nepolapí anděla, pak jej nepolapí ani ďábel. Z chování hodného ďábla navíc vyplývá, že pokud běžec obarví některou stěnu podruhé, pak se dostal zpátky na svůj začátek a již je polapen, neboť obíhá v kruhu. Podle toho lze také poznat, kdy je běžec uvězněn. Dokud běžec neobarví některou stěnu podruhé, pak může vždy ještě unikat.

Předpokládejme nyní, že běžec začíná v buňce $[0, 0]$ a směřuje vzhůru podél pomyslné osy y . Je jasné, že v prvních několika tazích (řekněme prvních 10) běžec nemůže být uvězněn. Vždyť v jednom tahu dokáže běžec oběhnout více polí, než kolik jich ďábel stihl za prvních 10 tahů odebrat.

Indukcí nyní předpokládejme, že běžec nebyl v prvních t tazích chycen. Běžec v každém tahu urazí alespoň k polí (pokud může směřovat přímo vzhůru k polí dopředu), a v čase t je již obarveno alespoň kt stěn. Kolik z těchto stěn se nachází na ose y ? Běžec směřuje vzhůru podél osy y pouze s výjimkou případů, kdy obíhá odebraná pole (ta mají maximálně $4t$ stěn) a kdy mu ďábel vynutí směr dolů, viz obr. 9 (tehdy se běžec posune maximálně o t polí dolů, neboť více polí není dosud odebráno). Na ose y je tedy obarveno alespoň $kt - 4t - t$ polí, tj. běžec se nachází $t(k-5)$ polí nad osou x . Protože však platí, že $t \geq 10$ a $k \geq 11$, pak máme $t(11-5) \geq 10(11-5) \geq 60$. To znamená, že se běžec nachází alespoň 60 polí nad osou x , a protože běžec nemůže v jednom tahu obarvit více než $2k = 22$ stěn, proto se v $(t+1)$ -ním tahu nemůže vrátit na původní pole $[0, 0]$. Běžec by byl uvězněn, jenom pokud by se vrátil na původní pole $[0, 0]$. Tam se ale v $(t+1)$ -ním tahu nevrátil, a tedy v $(t+1)$ -ním tahu není uvězněn. Provedli jsme důkaz indukci, že běžce nelze polapit.

Nyní jsme dokázali, že hodný ďábel nedokáže polapit běžce. Jak již bylo naznačeno dříve, běžec neumí unikat tak dobře jako anděl. Proto pokud hodný ďábel nepolapí běžce, pak nepolapí ani anděla. Důležitou částí důkazu je také to, viz [8], že pokud anděla nepolapí hodný ďábel, pak jej nepolapí ani ďábel.

Zmiňme nakonec, že $t(k-5)$ je konzervativní odhad polohy anděla. Tím je myšleno, že po zevrubné analýze bychom jistě zjistili, že bychom dokázali najít přesnější odhad běžcovy vzdálenosti od osy x . Tj. patrně se nachází ve větší vzdálenosti od osy x . Pro potřeby našeho důkazu však tento odhad postačuje. Zde uvedený důkaz funguje pro $k \geq 11$, ale fungoval by jistě i pro $k \geq 7$. Pro $k < 7$ je potřeba postupovat opatrněji a počítat pečlivěji. Nejpečlivější výpočty jsou potřeba pro $k = 2$, více viz [8].

Závěr

Poznamenejme, že hra byla studována také ve třech rozměrech, viz [6], [2]. Je tak již známo, že anděl₁₃ dokáže ďáblovi ve třech dimenzích uniknout, viz [6]. Nicméně pokud je nám známo, tak hra ve třech dimenzích dosud nebyla zcela rozřešena. Není tak jisté, zda dokáže například unikat i anděl₁. V minulosti se andělskému problému věnovala jen malá skupina matematiků. Je to patrně také tím, že řešení úlohy nepřináší žádné aplikovatelné poznatky a není jasné, jak na úlohu aplikovat standardní matematické nástroje, se kterými jsou matematici zvyklí pracovat.

Na závěr tedy přenecháme čtenáři otázku. Zamyslete se, zda by bylo

některé z uvedených důkazů možné aplikovat i tehdy, kdyby se anděl pohyboval jako jezdec na šachovnici (viz také [4]). Dopadl by výsledek jinak, kdyby mohl ďábel odebírat ve svém tahu dvě a více polí?

Poděkování

Tento příspěvek vznikl s podporou projektu DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy.

Literatura

- [1] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning Ways for your Mathematical Plays, Volume 2: Games in Particular*. Academic Press, 1982.
- [2] Bollobás, B., Leader, I.: The angel and the devil in three dimensions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, roč. 113 (2006), č. 1, s. 176–184.
- [3] Conway, J. H.: The Angel Problem. In: Nowakowski, R. (eds): *Games of No Chance*. MSRI Publications, roč. 29, 1996, s. 3–12.
- [4] Gardner, M.: Mathematical games. *Scientific American*, roč. 230 (1974), č. 2, s. 106–108.
- [5] Kloster, O.: A solution to the Angel Problem. *Theoretical Computer Science*, roč. 389 (2007), s. 152–161.
- [6] Kutz, M.: Conway’s Angel in three dimensions. *Theoretical Computer Science*, roč. 349 (2005), s. 443–451.
- [7] Kutz, M.: *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots*. PhD Thesis, FU Berlin, 2004.
- [8] Máthé, A.: The Angel of power 2 wins. *Combinatorics, Probability and Computing*, roč. 16 (2007), č. 3, s. 363–374.
- [9] Pickover, C. A.: *Matematická kniha*. Argo – Dokořán, Praha, 2012.
- [10] Silverman, D. L.: *Your Move*. McGraw-Hill, 1971.
- [11] Wikipedia: *Richard Arnold Epstein*. https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Arnold_Epstein, [cit 17.9.2025].
- [12] *The Angel Problem – was the bet paid?*. <https://mathoverflow.net/questions/16686/the-angel-problem-was-the-bet-paid>, [cit 17.9.2025].