

Rozhledy matematicko-fyzikální

Oldřich Lepil
Energie větru

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 4, 46–51

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153276>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

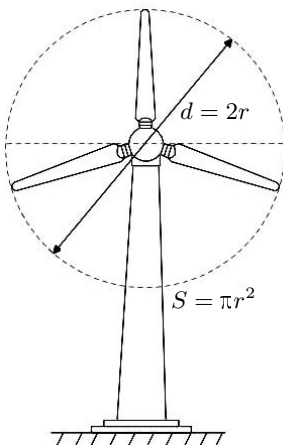
Energie větru

Oldřich Lepil, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Větrné elektrárny jako alternativní zdroje elektrické energie jsou v současnosti ve středu pozornosti celé společnosti. Dříve to byly hlavně tepelné elektrárny, které pracují na základě termodynamických zákonů. O nich víme, že cyklus takového tepelného stroje má svoje omezení, která určují účinnost přeměny tepla na mechanickou energii. V tomto příspěvku se podíváme, zda existují obdobná omezení účinnosti přeměny energie proudícího vzduchu na mechanickou energii pro pohon elektrárny.

Určíme energii větru a posoudíme možnost její přeměny na energii otáčivého pohybu soustrojí větrné elektrárny. Budeme uvažovat větrnou elektrárnu, jejíž rotor má průměr $d = 2r$, takže účinná plocha S rotoru větrné elektrárny, kterou proudí vzduch, bude $S = \pi r^2$ (obr. 1). Vzduch má hustotu ρ a výpočet provedeme pro rovnoměrný pohyb vzduchu stálou rychlostí v . Jestliže vzduch urazí za dobu Δt dráhu Δs , bude hmotnost vzduchu, který projde účinnou plochou rotoru, $m = \rho S \Delta s$ a celková kinetická energie vzduchu je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho S \Delta s v^2.$$



Obr. 1

Pokud by veškerou tuto energii bylo možné využít, získali bychom výkon

$$P = \frac{E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S \frac{\Delta s}{\Delta t} v^2 = \frac{1}{2} \rho S v^3.$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že pro využití větrné energie je rozhodující rychlost větru. Kdybychom uvažovali např. průměrnou rychlost větru v České republice ve výšce 10 m nad zemí, která je $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, byl by při hustotě vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ výkon připadající na 1 m^2 účinné plochy rotoru $P/S = 0,6 v^3 \approx 38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (veličina se označuje jako hustota výkonu). Větrné elektrárny se budují v lokalitách, kde je průměrná rychlost větru alespoň $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a tomu odpovídá hustota výkonu $130 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, tedy téměř 3,5krát větší.

Výkon větrné elektrárny ovlivňuje také hustota vzduchu, která se v místě elektrárny může měnit v závislosti na změnách tlaku a teploty vzduchu. Pro určení hustoty vzduchu vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m} RT,$$

kde $M_m = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ je efektivní molární hmotnost vzduchu. Pro hustotu vzduchu pak platí vztah

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_m}{R} \frac{p}{T} = \frac{1}{287} \frac{p}{T},$$

kde p je tlak vzduchu v pascalech a T je termodynamická teplota vzduchu v kelvinech. V blízkosti povrchu Země lze při zjednodušených výpočtech uvažovat již uvedenou přibližnou hodnotu hustoty vzduchu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

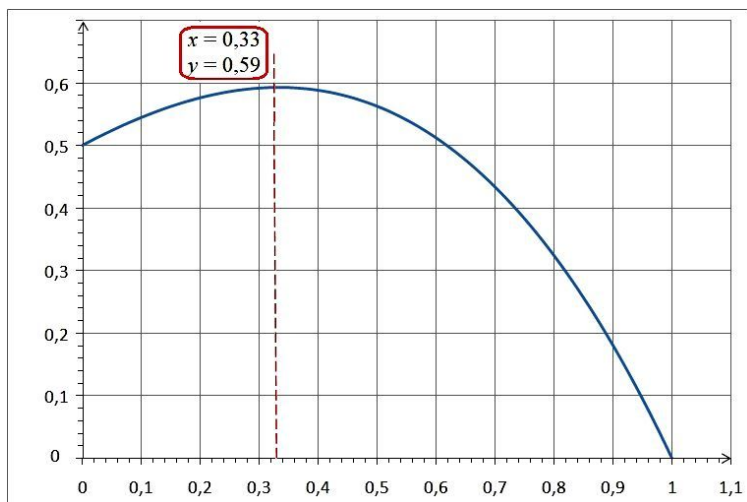
V praxi je však možné využít jen podstatně menší část energie větru. Tímto problémem se ve 20. letech 20. století zabýval rakouský inženýr *Albert Betz* (1885–1968), který zkoumal možnost využití energie větru k pohonu. Jestliže např. plochou rotoru proudí vzduch rychlostí v_1 (vstupní rychlost), předává mu část energie a rychlost vzduchu se zmenší na rychlost v_2 (výstupní rychlost). Můžeme uvažovat, že vzduch zařízením proudí průměrnou rychlostí $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$ a hmotnost vzduchu, který projde rotorem za jednotku času, čili *hmotností tok* vzduchu je $\bar{m} = \rho S \bar{v}$. Na vstupu elektrárny má vzduch energii $E_{k1} = \frac{1}{2} \bar{m} v_1^2$ a na výstupu energii $E_{k2} = \frac{1}{2} \bar{m} v_2^2$. Je tedy možné získat energii

$$\Delta E = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \bar{m} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \rho S \cdot \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2).$$

Důležité však je, jak tato energie závisí na poměru obou rychlostí. Označíme x poměr rychlostí ($x = v_2/v_1$) a

$$y = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}v_1^3(1 - x^2 + x - x^3).$$

Na obr. 2 je graf závislosti $y = f(x)$, z něhož je patrné, že veličina y dosahuje maxima při hodnotě $x = 0,33$, tedy když rychlost na vstupu zařízení je 3krát větší než na výstupu ($v_2/v_1 = 1/3$).



Obr. 2

Provedeme výpočet veličiny y pro tento poměr rychlostí, při němž se maximální část energie větru přemění na rotační energii:

$$y = \frac{1}{2}v_1^3(1 - x^2 + x - x^3) = \frac{1}{2}v_1^3\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = \frac{16}{27}v_1^3 \doteq 0,59 v_1^3.$$

Odtud vyplývá, že maximální výkon zařízení využívajícího energii větru je

$$P_{\max} \doteq 0,59 \cdot \frac{1}{2}\rho S v_1^3.$$

Tento vztah se označuje také jako *Betzovo pravidlo*. Maximální dosažitelná hustota výkonu při rychlosti větru v je s ohledem na Betzovo pravidlo dána vztahem

$$\frac{P_{\max}}{S} \approx 0,35 v^3.$$

Teoretická největší účinnost zařízení využívajících energii proudícího vzduchu je tedy necelých 60 % celkové kinetické energie vzduchu. Ani nejmodernější systémy současných větrných elektráren však této účinnosti nedosahují, poněvadž dochází k dalším ztrátám energie. Jsou to jednak ztráty v mechanickém soustrojí elektrárny, jednak ztráty v elektrických obvodech generátoru a při transformaci výstupního napětí elektrárny. To způsobuje, že větrné elektrárny využívají přibližně jen 30 % až 45 % energie větru.

Například větrná elektrárna v ČR u obce Pchery má rotor o průměru 100 m a jeho osa je ve výšce 88 m. Startovní rychlost větru je $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, jmenovitá rychlost $12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a vypínací rychlost $22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jmenovitý výkon elektrárny je 3 032 kW. Energie větru při jmenovité rychlosti a hustotě vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je

$$P = \frac{1}{2} \rho S v^3 \approx 9\,400 \text{ kW}.$$

Vzhledem k jmenovitému výkonu elektrárny je využito přibližně jen 32 % energie větru, což je 56 % maximálně využitelné energie určené Betzovým pravidlem.

Dosud jsme si všímali jen změn rychlosti proudění vzduchu před vrtulemi rotoru elektrárny a za rotorem, přičemž $v_2 < v_1$. Současně budeme předpokládat, že vzduch proudí plochou rotoru průměrnou rychlostí $\bar{v}$. To znamená, že podle zákona zachování energie, vyjádřeného Bernoulli-ovou rovnicí, dochází v místě rotoru k poklesu tlaku vzduchu Δp . Tomu odpovídá vznik tahové síly T rotoru, která je dána rozdílem tlaků těsně před rotorem a za ním. Má velikost $T = \Delta p S$, kde S je plocha rotoru. Tahovou sílu lze současně vyjádřit na základě 2. Newtonova pohybového zákona jako změnu hybnosti vzduchu, který prošel rotorem za jednotku času, čili $T = \bar{m}(v_1 + v_2)$, kde $\bar{m}$ je hmotnostní tok vzduchu. Nejvíce nás však zajímá výkon P , který lze prouděním vzduchu rotorem získat:

$$P = \frac{1}{2} \bar{m} (v_1^2 - v_2^2).$$

Pro posouzení vlivu rychlosti větru na tahovou sílu rotoru a výkon elektrárny se zavádí bezrozměrová veličina, *axiální indukční faktor* a . Je definován vztahem

$$a = \frac{v_1 - \bar{v}}{v_1},$$

takže $\bar{v} = v_1(1-a)$ a $v_2 = v_1(1-2a)$. S použitím součinitele a vyjádříme velikost tahové síly

$$T = 2\bar{m}v_1a(1-a)$$

a výkon

$$P = 2\bar{m}v_1^2a(1-a)^2.$$

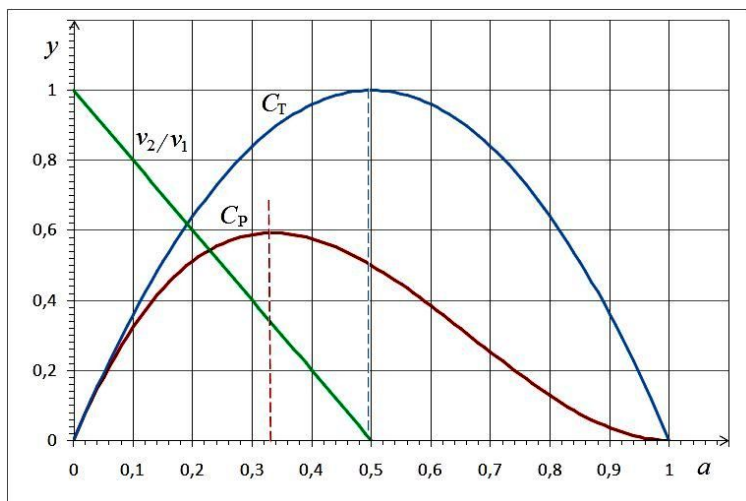
Porovnáme tahovou sílu s maximální hodnotou danou dynamickým tlakem vzduchu proudícího rychlostí v_1

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\rho S v_1^2 = \frac{1}{2}\bar{m}v_1.$$

a definujeme veličinu *tahový součinitel* C_T

$$C_T = \frac{T}{T_{\max}} = \frac{2\bar{m}v_1a(1-a)}{\frac{1}{2}\bar{m}v_1} = 4a(1-a).$$

Graf součinitele tahu $C_T = f(a)$ je na obr. 3.



Obr. 3

Optimální rychlosti $\bar{v}$ proudění vzduchu rotorem odpovídá maximum této funkce, kterou určíme anulováním její derivace

$$\frac{dC_T}{da} = \frac{d}{da} [4a(1-a)] = 4 - 8a = 0 \implies a = 0,5.$$

Z výsledku vyplývá, že maximální tahové síly lze dosáhnout v případě, že rotorem protéká vzduch poloviční rychlostí, než je rychlost volně proudícího vzduchu ($\bar{v} = 0,5v_1$). Při této hodnotě součinitele a má poměr rychlostí v_2/v_1 nulovou hodnotu (viz zeleně na obr. 3) a při větších hodnotách a je poměr rychlostí záporný, což postrádá fyzikální smysl. Proto hodnotou $a = 0,5$ také končí platnost Betzova pravidla (tzv. *Betzův limit*).

Obdobnou úvahou porovnáme celkový výkon volně proudícího vzduchu

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\rho S v \cdot v^2 = \frac{1}{2}\bar{m}v^2$$

s výkonem P a určíme *výkonový součinitel* C_P

$$C_P = \frac{P}{P_{\max}} = 4a(1-a)^2.$$

Závislost $C_P = f(a)$ je rovněž na obr. 3. Vidíme, že maximum dosahuje při menší hodnotě a a tedy při menší rychlosti. To opět zjistíme určením maxima:

$$\frac{dC_P}{da} = \frac{d}{da} [4a(1-a)^2] = 1 - 4a + 3a^2 = 0 \implies a \in \{1, 1/3\}.$$

Pro $a = 1/3$ platí

$$C_{P_{\max}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \doteq 0,593.$$

Výsledek odpovídá Betzovu pravidlu, odvozenému v první části příspěvku.

Dospěli jsme k závěru, že tahová síla rotoru větrné elektrárny závisí na druhé mocnině rychlosti větru a průměru rotoru a na součiniteli tahu. Snahou je minimalizovat tah rotoru pro danou rychlost větru a průměr motoru, tzn. pro co nejmenší hodnoty C_T . Výkon elektrárny závisí na třetí mocnině rychlosti větru, na druhé mocnině průměru rotoru a na součiniteli C_P .

Literatura

- [1] Aerodynamics_Presentation.pdf (nd.edu).
- [2] 2a.1 The Actuator Disk Model | AERSP 583: Wind Turbine Aerodynamics (psu.edu).
- [3] Physics of Wind Turbines | Energy Fundamentals (uni-leipzig.de).