

Bernard Bolzano's Schriften

Inhalt

In: Bernard Bolzano (author); Karel Petr (other); Karel Rychlík (other): Bernard Bolzano's Schriften. Band 1. Functionenlehre. (German). Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1930. pp. I–IV.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400145>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

INHALT.

EINLEITUNG. — VERHÄLTNISSE ZWISCHEN VERÄNDERLICHEN ZAHLEN.

	Text	Anmerkungen Seite
§ 1—5. Funktionen, Funktionen der ersten und der zweiten Art	1	2
§ 4—10. Differenz (Zuwachs) einer Funktion von einer und von mehreren Veränderlichen	5	—
§ 11—12. Differenz von eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen	5	—
§ 13—15. Differenzen höherer Ordnung	6	—
§ 16—18. Summe erster und höherer Ordnung	7	2
§ 19. Die Summe erster Ordnung ist, falls sie existiert, bis auf eine additive Konstante bestimmt	7	—
§ 20—22. Erweiterung des Begriffs der Summe	8	2
§ 23—27. Differenz einer Konstanten, einer Summe; Grenzwerte dieser Ausdrücke	9	2
§ 28—30. $\int ax$, $\int \frac{x}{a}$ und die Grenzwerte dieser Ausdrücke für $ x \rightarrow 0$	10	—
§ 31—36. Differenz eines Produktes und eines Quotienten und ihr Grenzwert	11	2

ERSTER ABSCHNITT. STETIGE UND UNSTETIGE FUNCTIONEN.

§ 1—5. Stetigkeit von Funktionen einer Veränderlichen	15	2
§ 4—6. Stetigkeit einer Konstanten, Stetigkeit von $a \pm x$, ax , $\frac{x}{a}$. x^n (n eine ganze positive Zahl)	16	3
§ 7, 8. Stetigkeit der ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen	18	—
§ 9. Wie eine Funktion unstetig werden kann	19	3
§ 10, 11. Funktionen, die stetig und unstetig sind in verschiedenen Mengen der unabhängigen Veränderlichen	20	—
§ 12. Aus der rechtsseitigen Stetigkeit folgt nicht die linksseitige	22	—
§ 13. Über eine Eigenschaft der in einem offenen Intervalle stetigen Funktionen	23	4
§ 14. Ist $F(x)$ stetig im Punkte m und ist $\lim_{x \rightarrow m} F(x) = M$, so ist $F(m) = M$	24	—

II

§ 15, 16. Bestimmung des Wertes einer Funktion auf Grund der Stetigkeit	25	4
§ 17, 18. Wann reduziert sich eine stetige Funktion auf eine Konstante?	26	4
§ 19. Wächst die Funktion ins Unendliche bei der Annäherung an c , so ist sie gewiß nicht stetig im Punkte $x = c$	27	5
§ 20, 21. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$, so ist sie in diesem Intervalle auch beschränkt	28	5
§ 22. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$ und nimmt sie in diesem Intervalle Werte an, die beliebig nahe an C liegen, so existiert in $[a, b]$ ein Wert c , für den $F(c) = C$ ist	29	5
§ 23. Der Satz des vorigen § gilt nicht für offene Intervalle	29	—
§ 24—26. Ist die Funktion $F(x)$ stetig im Intervalle $[a, b]$, so nimmt sie daselbst einen größten und einen kleinsten Wert an	30	5
§ 27—50. Ist die Funktion $F(x)$ stetig in $[a, b]$, so nimmt sie jeden Wert zwischen $F(a)$ und $F(b)$ wenigstens einmal an	32	6
§ 31—33. Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion $F f(x) $	36	6
§ 34—37. Verschiedene Sätze über Funktionen von mehreren Veränderlichen, die stetig sind in Bezug auf jede dieser Veränderlichen	38	6
§ 38, 39. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen	40	7
§ 40—42. Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion $F f(x), g(x) $	42	7
§ 43—46. Stetigkeit einiger einfacher Funktionen	44	7
§ 47, 48. Nimmt $F(x)$ im Intervalle $[a, b]$ alle Werte zwischen $F(a)$ und $F(b)$ an, so ist sie in diesem Intervalle nicht notwendig stetig	45	7
§ 49—52. Monotone Funktionen	45	—
§ 53. Eine monotone Funktion nimmt jeden Wert höchstens einmal an	46	—
§ 54—57. Weitere Sätze über monotone Funktionen	47	—
§ 58, 59. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen, die jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen, und den monotonen und stetigen Funktionen	48	—
§ 60—62. Maxima und Minima	51	8
§ 63. Der Zusammenhang zwischen den Maxima (Minima) und dem größten (kleinsten) Werte der Funktion	54	8
§ 64. Der größte und der kleinste Wert einer monotonen Funktion	56	8
§ 65—74. Die stetigen Funktionen mit unendlich vielen Maxima und Minima	57	8
§ 75. Die Funktion von Bolzano. Trotzdem sie stetig ist, ist sie in keinem noch so kleinen Teilintervalle ihres Definitionsintervalles monoton	66	11
§ 76—78. Wie die Maxima und Minima aufeinander folgen	70	11
§ 79—82. Einige Sätze über die Unstetigkeitspunkte	74	11

ZWEITER ABSCHNITT. ABGELEITETE FUNKTIONEN.

§ 1—5. Die Ableitungen erster und höherer Ordnung. Partielle Ableitungen. Primitive Funktionen	80	12
§ 4. Die Ableitung kann sowohl konstant als auch veränderlich sein	85	12

§ 5. Die Ableitung ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt	85	—
§ 6. Die Ableitung als unbestimmter Ausdruck	86	—
§ 7, 8. Gilt $f(x) = F'(x)$, $\varphi(x) = F'(x)$ für alle x aus einem bestimmten Intervalle, so ist dort auch $f(x) = \varphi(x)$	86	15
§ 9, 10. Ist in einem Intervalle $F(x) = \Phi(x)$, so folgt hieraus $F'(x) = \Phi'(x)$. Die Umkehrung gilt nicht	87	—
§ 11. Die Ableitung einer Konstanten ist Null	88	15
§ 12. Hat $F(x)$ eine Ableitung im Punkte x , so ist $F(x)$ stetig in diesem Punkte	88	15
§ 13, 14. Fälle, in denen eine stetige Funktion keine Ableitung besitzt	89	15
§ 15—17. Funktionen mit und ohne Ableitung in verschiedenen Punktmengen	94	14
§ 18. Kann ein Funktion Ableitungen in allen Punkten eines Intervalles haben, höchstens einige Punkte ausgenommen? Kritik einer Abhandlung von Galois	96	14
§ 19. Die Funktion von Bolzano (I § 75) besitzt keine Ableitung in einer überall dichten Menge des Intervalles $[a, b]$, obgleich sie daselbst stetig ist	98	14
§ 20. Funktionen mit einer rechtsseitigen und einer linksseitigen Ableitung	99	
§ 21. Aus der Voraussetzung, daß eine Funktion für alle x aus (a, b) eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung besitzt, die beide stetig sind, folgt die Existenz einer beiderseitigen Ableitung in jedem x aus (a, b)	100	17
§ 22. Die Unstetigkeitspunkte der Ableitungen	102	17
§ 23. Aus der Existenz der rechtsseitigen Ableitung folgt nicht die Existenz der linksseitigen Ableitung und umgekehrt	105	—
§ 24. Wie konvergiert $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ gegen $F'(x)$ in (a, b) , falls $F(x)$ eine Ableitung in (a, b) besitzt	104	17
§ 25, 26. Existenz der Ableitung und die Stetigkeit der Funktion	104	—
§ 27—32. Der Mittelwertsatz	106	17
§ 33—35. Einige unrichtige Sätze	118	18
§ 36. Die Ableitung von ax^n (n positiv ganzzahlig)	121	18
§ 37, 38. Die Ableitung einer Summe	121	18
§ 39, 40. Die Ableitung von $aF(x)$, $\frac{F(x)}{a}$ ($a \neq 0$)	122	—
§ 41, 42. Die Ableitung eines Produktes	125	—
§ 43. Die Ableitung eines Quotienten	124	—
§ 44. Die Ableitung einer ganzen und einer gebrochenen rationalen Funktion	124	18
§ 45, 46. Die Ableitungen höherer Ordnung von ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen	125	18
§ 47—50. Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion	126	18
§ 51. Die Ableitung einer inversen Funktion	128	19

IV

§ 52—54. Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion		
$F(f(x), g(x))$	129	20
§ 55. Die Ableitung von $F(x, f(x), g(x))$	135	20
$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$		
§ 56, 57. $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$	134	20
§ 58. Erweiterung auf den Fall von mehreren Veränderlichen		
und höhere Ableitungen	137	21
§ 59, 60. Aus $F'(x) = \Phi'(x)$ in (a, b) folgt $F(x) = \Phi(x) + C$	138	21
§ 61. Primitive Funktion von a	139	—
§ 62. Primitive Funktion einer Summe	139	21
§ 63. Primitive Funktion von $aF(x)$	139	—
§ 64. Primitive Funktion von $F(x)\Phi'(x) + F'(x)\Phi(x)$	139	—
§ 65—67. Erweiterung des Begriffes der primitiven Funktion	139	21
§ 68. Partielle Integration	141	—
§ 69. Primitive Funktion von $\frac{F'(x)\Phi(x) - F(x)\Phi'(x)}{(\Phi(x))^2}$	142	—
§ 70. Primitive Funktion von $F'(f(x))f'(x)$	142	—
§ 71. Primitive Funktion einer ganzen rationalen Funktion	145	—
§ 72. Wann ist die n -te Ableitung einer Funktion von einer Veränderlichen beständig Null?	144	—
§ 73—75. Die Ab- und Zunahme einer Funktion und das Vorzeichen ihrer Ableitung	144	21
§ 76—79. Wann kann ein Extremum stattfinden? Die Betrachtung der ersten Ableitung	147	21
§ 80. Die Betrachtung der höheren Ableitungen	151	21
§ 81. Wie die Maxima und Minima aufeinander folgen können	155	21
§ 82—87. Die Taylorsche Formel	155	21
§ 88—91. Die Taylorsche Reihe	167	22
§ 92—94. Einige Folgerungen aus der Taylorschen Formel	172	22
§ 95—99. Die Taylorsche Formel und Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen	179	22