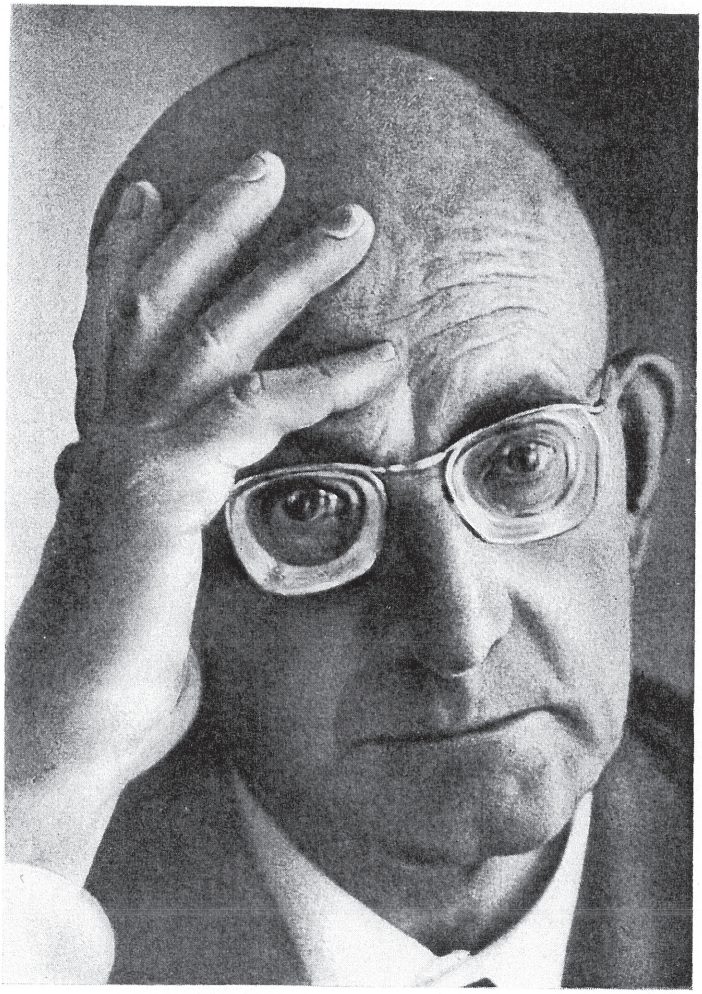
Jarník's notes of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P.S. Aleksandrov (Göttingen 1928)

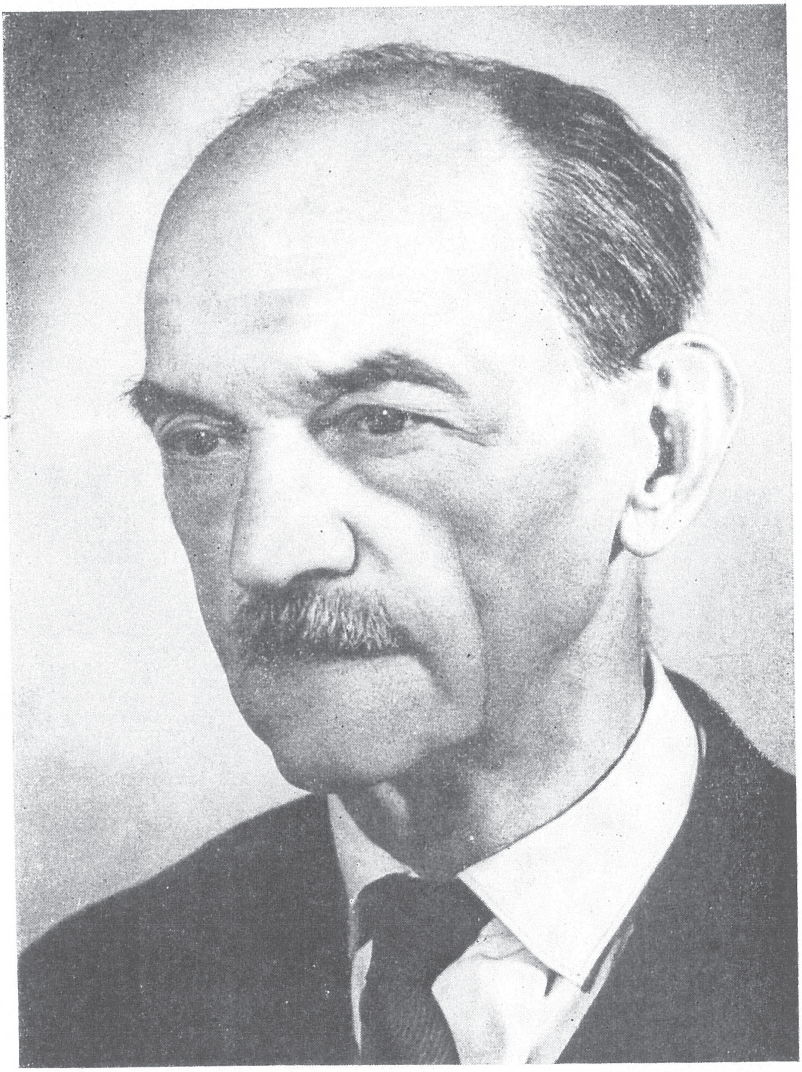
Illustrations

In: Martina Bečvářová (author); Ivan Netuka (author): Jarník's notes of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P.S. Aleksandrov (Göttingen 1928). (English). Praha: Matfyzpress, 2010. pp. [114]–[132].

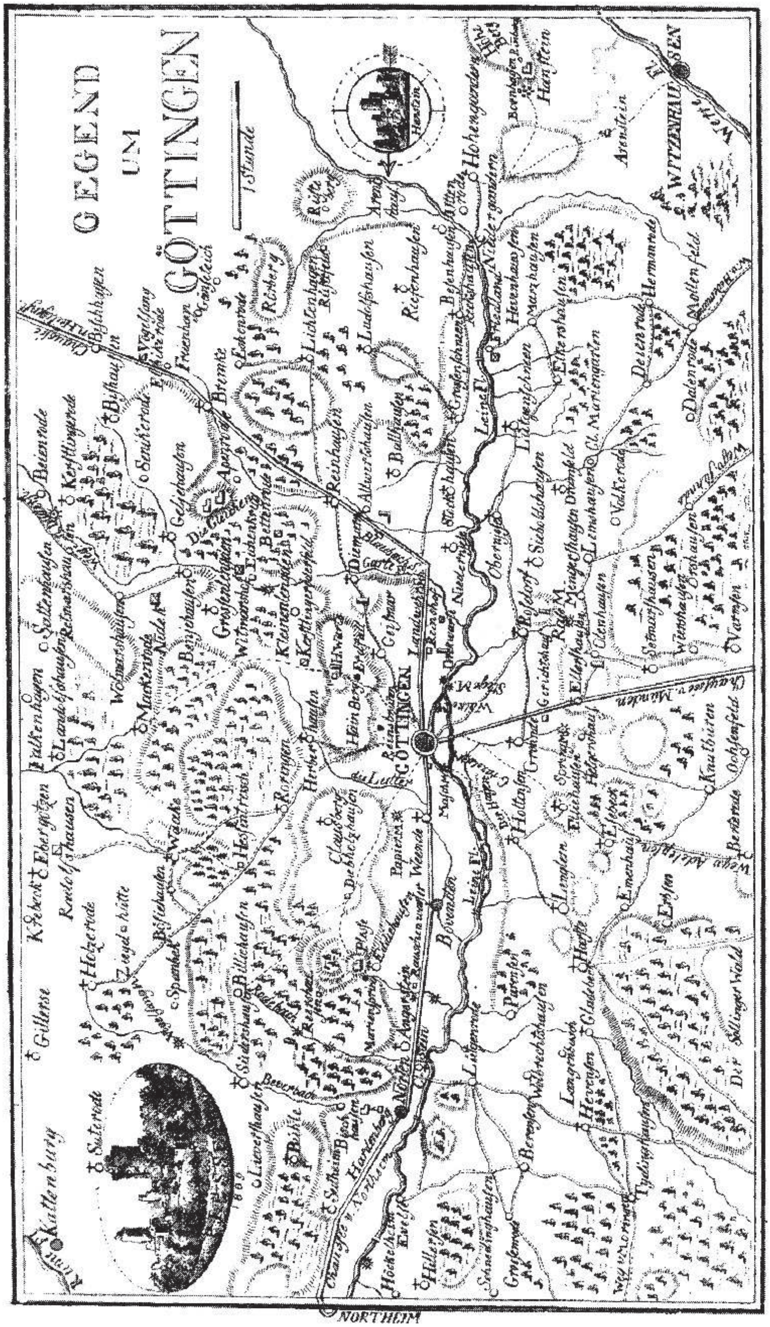
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401009

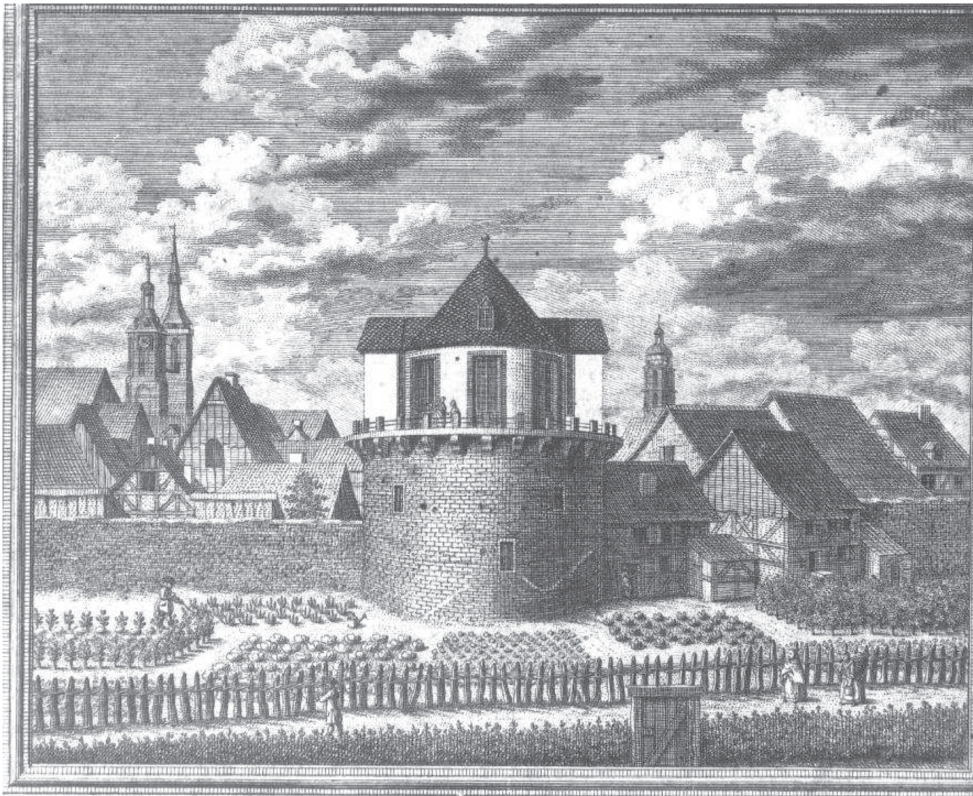


П. Александров



V. Jarník


GEGEND
UM
GÖTTINGEN
1 Stunde
GÖTTINGEN
NORTHEIM


Stern=Warte zu Göttingen verfertiget von J. P. Kaltenhofer, 1773

V

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

UNTER MITWIRKUNG
VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COURANT, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR V. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

CONSTANTIN CARATHÉODORY
IN MÜNCHEN.

95. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la puissance des ensembles mesurables* B. Note de M. **P. Alexandroff**, présentée par M. Hadamard.

1. Le but de cette Note est de résoudre le problème suivant : « Déterminer la puissance de tout ensemble *non dénombrable* mesurable B. » Ce problème m'a été posé par M. N. Lusin, et c'est grâce à son concours précieux que j'ai obtenu le résultat ci-dessous; quelques points de la démonstration lui sont également dus.

Soit E un ensemble F de classe α non dénombrable. D'après les beaux résultats de M. Lebesgue, nous pouvons développer E en tableau à double entrée

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1^1 + E_1^2 + E_1^3 + \ldots + E_1^{q_1} + \ldots, \\ E_2^1 + E_2^2 + E_2^3 + \ldots + E_2^{q_1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E_{p_1}^1 + E_{p_1}^2 + E_{p_1}^3 + \ldots + E_{p_1}^{q_1} + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où l'ensemble donné E est la partie commune aux ensembles-sommes situés dans les lignes horizontales du tableau (E). Il est important de remarquer que la classe de tout ensemble $E_{p_1}^{q_1}$, soit $\alpha_{p_1}^{q_1}$, est inférieure à α, c'est-à-dire $\alpha > \alpha_{p_1}^{q_1}$. Si $E_{p_1}^{q_1}$ n'est pas un ensemble fermé, nous pouvons le développer en tableau analogue. Le terme général de ce sous-tableau, soit $E_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$, est un ensemble F de classe $\alpha_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$ inférieure à $\alpha_{p_1}^{q_1}$. Si ce n'est pas un ensemble fermé, nous pouvons le représenter par un nouveau tableau de terme général $E_{p_1 p_2 p_3}^{q_1 q_2 q_3}$ et ainsi de suite.

Considérons une suite des ensembles déduits les uns des autres $E_{p_1}^{q_1}$, $E_{p_1 p_2}^{q_1 q_2}$, $E_{p_1 p_2 p_3}^{q_1 q_2 q_3}$, ... : les classes correspondantes vont en décroissant, donc la suite ne comprend qu'un nombre *fini* de ces ensembles. Nous serons arrêtés quand nous arriverons à un ensemble fermé $E_{p_1 p_2 \ldots p_\lambda}^{q_1 q_2 \ldots q_\lambda}$ (λ fini). Donc nous représenterons, à l'aide d'une infinité énumérable d'opérations, l'ensemble donné E par un tableau dont les éléments sont des sous-tableaux, et ainsi de suite.

2. Cela posé, appelons *produit* d'ensembles donnés la partie commune à ces ensembles.

Formons le produit π_1 de n ensembles (n donné arbitrairement > 1)

$$\pi_1 = E_1^{r_1} E_2^{r_2} E_3^{r_3} \ldots E_n^{r_n},$$

où $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ constituent un système de n entiers positifs choisi arbitrairement. En remplaçant, dans ce produit π_1, chaque facteur non fermé $E_k^{r_k}$ par le produit de $n-k+1$ ensembles $E_{k,1}^{r_k s_1} E_{k,2}^{r_k s_2} \ldots E_{k,n-k+1}^{r_k, s_{n-k+1}}$, tous les s étant des entiers quelconques déterminés, nous déduisons du produit π_1 le second produit π_2. En remplaçant, dans ce produit π_2 chaque facteur non fermé $E_{k,i}^{r_k s_i}$ par le produit de $n-k+1$ ensembles

$$E_{k,i,1}^{r_k s_i t_1} E_{k,i,2}^{r_k s_i t_2} \ldots E_{k,i,n-k+1}^{r_k s_i t_{n-k+1}},$$

les t déterminés, choisis arbitrairement, nous aurons le troisième produit π_3 et ainsi de suite. Il est bien évident qu'en recommençant ainsi cette opération, on finira par arriver à un produit π_μ (μ fini) dont chaque facteur est un ensemble fermé. Ce produit π_μ étant un ensemble fermé, nous l'appellerons *ensemble fermé de $n^{\text{ième}}$ espèce*. Tous les produits π_μ que nous définissons ont un nombre fini de facteurs à un nombre fini d'indices; ils forment par suite un ensemble énumérable. Nous dirons qu'un ensemble fermé π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce est *ensemble canonique de $n^{\text{ième}}$ espèce*, si le produit $E\pi_1\pi_2\pi_3\ldots\pi_\mu$ contient une infinité non dénombrable de points. Il est clair que tous les ensembles canoniques π_μ de $n^{\text{ième}}$ espèce forment un ensemble énumérable; nous pouvons donc les écrire de la manière suivante :

$$e_n^1,\ e_n^2,\ e_n^3,\ \ldots,\ e_n^\nu,\ \ldots.$$

Si l'on fait varier le nombre n, on obtient un tableau à *double* entrée (e). Nous dirons que ce tableau (e) est *tableau canonique d'ensembles* E.

3. Considérons maintenant les propriétés du tableau canonique (e). Chaque ensemble e_n^ν étant un des produits π_μ, nous dirons que $e_n^{\nu'}$ est *diviseur régulier* de $e_m^{\nu''}(m > n)$, s'il y a parmi les facteurs du produit $e_m^{\nu''}$ tous les facteurs du produit $e_n^{\nu'}$. Nous dirons qu'une suite

$$e_{n_1}^{\nu_1},\ e_{n_2}^{\nu_2},\ e_{n_3}^{\nu_3},\ \ldots,\ e_{n_k}^{\nu_k},\ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots)$$

est *chaîne régulière*, si e^{ν_k} est diviseur régulier de $e_{n_{k+1}}^{\nu_{k+1}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

La partie commune à tous les ensembles $e_{n_k}^{\nu_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ d'une chaîne régulière sera nommée *noyau de cette chaîne régulière*.

Cela posé, le Tableau canonique (e) possède les propriétés suivantes:

1° Le noyau de toute chaîne régulière est contenu dans E;

2° Tout point de E (à une infinité dénombrable près) est contenu dans un au moins des noyaux;

3° L'ensemble e_n^ν étant donné, il existe, dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ ligne, un ensemble $e_{n-1}^{\nu'}$ et un seul qui est un diviseur régulier de e_n^ν;

4° Tout ensemble e_n^ν est un diviseur régulier d'un au moins des ensembles $e_m^{\nu'}(m > n)$;

5° Soit e_n^ν un diviseur régulier de $e_m^{\nu_i}$ $(m > n)$; quel que soit un ensemble M non dénombrable de points de E $(e_n^\nu - e_m^{\nu'})$, il existe toujours un ensemble $e_m^{\nu''}(\nu'' \neq \nu')$ contenant une infinité non dénombrable de points de M et qui admet l'ensemble e_n^ν pour son diviseur régulier.

4. Passons maintenant à la démonstration du théorème fondamental :

Théorème. — *Tout ensemble de points non dénombrable mesurable* B *contient un ensemble parfait.*

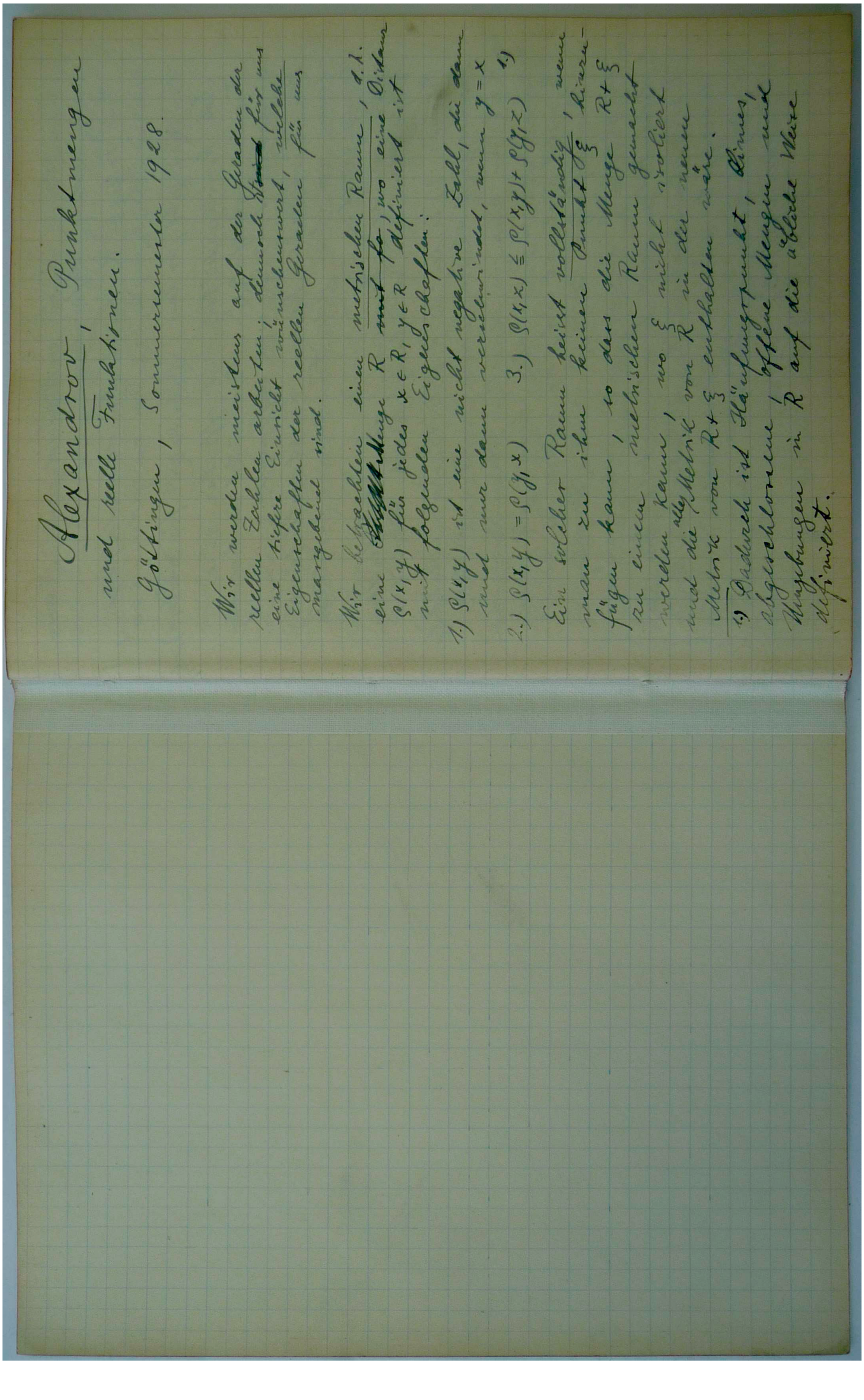
Tout d'abord le théorème est évident s'il existe au moins une chaîne régulière, dont le noyau (toujours fermé) est non dénombrable. Passons donc au cas où le noyau de toute chaîne régulière est dénombrable.

Dans ce cas, quels que soient un ensemble e_n^ν et un ensemble parfait π contenu dans e_n^ν et contenant une infinité non dénombrable de points de E, il existe (en vertu de 5°), dans π, deux ensembles parfaits π_1 et π_2 sans point commun et contenant une infinité non dénombrable de points de E, tels que π_1 appartient à $e_m^{\nu'}(m > n)$, π_2 à $e_m^{\nu''}(\nu'' \neq \nu')$, $\pi_1 e_m^{\nu''} = 0$, $\pi_2 e_m^{\nu'} = 0$, où $e_m^{\nu'}$ et $e_m^{\nu''}$ sont deux ensembles dont e_n^ν est un diviseur régulier. Nous dirons que π_1 et π_2 sont *ensembles déduits de* π.

Cela posé, prenons dans e_1^1 un ensemble parfait π contenant une infinité non dénombrable de points de E. D'après ce qui précède, nous pouvons déduire de π deux ensembles π_1 et π_2; de l'ensemble π_{α_1} $(\alpha_1 = 1$ ou $2)$ deux ensembles $\pi_{\alpha_1 1}$ et $\pi_{\alpha_1 2}$; $\pi_{\alpha_1\alpha_2}$ $(\alpha_2 = 1$ ou $2)$ deux ensembles $\pi_{\alpha_1\alpha_2 1}$ et $\pi_{\alpha_1\alpha_2 2}$ et ainsi de suite. Le procédé se poursuit indéfiniment, de sorte qu'on obtient une suite infinie d'ensembles parfaits :

$$(1) \qquad \pi_{\alpha_1}, \; \pi_{\alpha_1\alpha_2}, \; \pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \; \ldots, \; \pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \; \ldots, \; \alpha_k}, \; \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k, \ldots$ est une suite infinie arbitraire d'entiers dont chacun est égal à 1 ou 2. La partie commune X à tous les ensembles π de la suite (1) appartient, d'après 1°, à l'ensemble donné E; l'ensemble de tous les X est évidemment un ensemble parfait contenu dans E, ce qui démontre la proposition.



Alexandrov, Punktmengen und reelle Funktionen.

Göttingen, Sommersemester 1928.

Wir werden meistens auf der Geraden der reellen Zahlen arbeiten; dennoch ~~wird~~ für uns eine tiefere Einsicht wünschenswert, welche Eigenschaften der reellen Geraden für uns maßgebend sind.

Wir betrachten einen metrischen Raum, d.h. eine ~~[illegible]~~ Menge R ~~mit fo~~, wo eine Distanz $\varrho(x,y)$ für jedes $x \in R$, $y \in R$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\varrho(x,y)$ ist eine nicht negative Zahl, die dann und nur dann verschwindet, wenn $y = x$

2.) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ 3.) $\varrho(x,z) \leqq \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ 1.)

Ein solcher Raum heisst vollständig, wenn man zu ihm keinen Punkt ξ hinzufügen kann, so dass die Menge $R+\xi$ zu einem metrischen Raum gemacht werden kann, wo ξ nicht isoliert und die alte Metrik von R in der neuen Metrik von $R+\xi$ enthalten wäre.

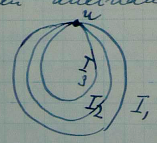
1.) Dadurch ist Häufungspunkt, Limes, abgeschlossene, offene Mengen und Umgebungen in R auf die übliche Weise definiert.

M ist also offen in $\bar{M}$, also

$$\bar{M} - M = \Phi, \text{ wo } \Phi$$ abgeschlossen in $\bar{M}$, also ist Φ abgeschlossen auf der reellen Geraden.* Also

$$M = \bar{M} - \Phi, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir betrachten nun die komplementären Intervalle zu Φ**: $I_1, I_2, \ldots$; diese verbiegen wir in Kreise und heften sie in ~~dem~~ (zusammenfallenden) Endpunkten aneinander:



So bekommen wir ein homöomorphes Abbild M' von M.

M' ist freilich auch Nulldimensional; auch $M'+u$ (Man zerlege $M'+u$ so:

nein! noch immer denselben Kreis um u für alle I_n

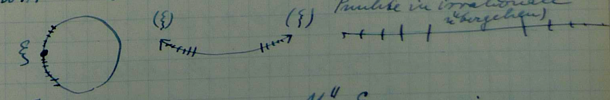
aus jedem Kreis I_n nehme man einen Bogen um u der Länge $< \frac{\varepsilon}{2}$ (und $> \frac{\varepsilon}{4}$), dessen Endpunkte im komplementären ~~Intervallen~~ Bogen zu dem in I_n enthaltenen Teil von M' gehören;

dann bildet u + die auf diesen Bögen enthaltenen Punkte von M' eine in $M'+u$ offene Menge vom Durchmesser $< \varepsilon$; ~~den~~ Rest von $M'+u$ kann man offenbar in ~~gst~~ abzählbar viele getrennte in $M'+u$ offene Mengen vom Durchmesser $< \varepsilon$ teilen)

$M'+u$ ist weiter abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, also homöomorph zu einer abgeschlossenen, beschränkten, nirgends dichten Menge (M'') der Irrationalzahlen auf der Zahlengeraden.

M' ist also homöomorph zu M'', aus dem ein Punkt ξ entfernt ist.

Wir ~~biegen~~ bilden M'' homöomorph auf einen Kreis ab, schneiden diesen Kreis im Punkte ξ, entfalten ihn in eine Strecke und diese ~~bilden~~ dehnen wir ins Unendliche (so dass irrationale Punkte in irrationale übergehen)



Dadurch wird $M''-\xi$ zu einer (im allgemeinen nicht beschränkten) abgeschlossenen, nirgends dichten Menge von Irrationalzahlen.

---

* und freilich nirgends dicht.

** Dort liegt M

nicht erweitern: denn jede Folge von diesen Mengen

$$M_1, M_2, \dots \quad \text{gehört ganz}$$

zu einer Klasse α; ihre Vereinigung oder Durchschnitt also sicher zur Klasse $\alpha + 1$.

Eine ganz besonders wichtige Rolle spielen die Klassen F_σ und G_δ. Zunächst besteht der Satz:

Es sei $f(x)$ ~~stets eine stetige~~ Funktion, die in einer ~~Menge~~ Menge M definiert ist. Die Menge der Stetigkeitspunkte ist in M ein G_δ.

Beweis: Es sei $\omega_x f = \lim\limits_{\substack{a \to x-0 \\ b \to x+0}}$ der Schwankung von f in $\langle a, b \rangle \cdot M$.

Die Unstetigkeitspunkte sind die Punkte von M, in welchen $\omega_x f > 0$.

Es sei $F_n = \{x ; \omega_x f \geqq \frac{1}{n}\}$; F_n ist abgeschlossen in M; $U = \sum\limits_1^\infty F_n$ ist genau die Menge aller Unstetigkeitspunkte; sie ist ein F_σ (in bez. auf M); ihre komplementärmenge in bez. auf M ist also ein G_δ in bezug auf M, w. z. b. w.

Die ganze Masstheorie bezieht sich in Hauptsache auf die Mengen F_σ und G_δ; denn zu jeder messbare Punktmenge ~~lässt~~ M gibt es ein F_σ und ein G_δ so, dass

$$F_\sigma \subset M \subset G_\delta,$$

Mass von F_σ = Mass von M = Mass von G_δ.

Das ist der Grund, warum sich jede messbare Funktion bis auf eine Menge von Mass ε ($\varepsilon > 0$ beliebig) wie eine stetige Funktion, und bis auf eine Menge vom Mass 0 wie eine Funktion 1. Klasse verhält.

Es sei $f(x)$ auf einer Menge M (des Eukl. Raumes) erklärt und stetig; dann lässt sich ~~M~~ $f(x)$ zu einer auf einem $G_\delta \supset M$ stetigen Funktion ergänzen.

Beweis: $\bar{M}$ sei die abgeschlossene Hülle von M. Es sei $x \in \bar{M} - M$. Es sind zwei Fälle möglich: 1.) Für jede Folge $x_n \to x$, $x_n \in M$ ist $f(x_1), f(x_2), \dots$ konvergent.

2.) Es ist dies nicht der Fall.

$f(x)$ ist stetig auf $\mathfrak{D}^*$; wäre nun
$f(y) = f(z) = t$ für $y \neq z$, $y \in \mathfrak{D}^*$, $z \in \mathfrak{D}^*$,
so gäbe (da $\mathfrak{D}^*$ in $\bar{M}$ enthalten ist)
es zwei Folgen aus M $y_n \to y$, $z_n \to z$
mit $f(y_n) \to t$, $f(z_n) \to t$;
es sei $f(y_n) = t_n$,
$f(z_n) = u_n$; t_n, u_n liegen in M; es ist
$t_n \to t$, $u_n \to t$; $f^{-1}(t_n) = y_n \to y$
$f^{-1}(u_n) = z_n \to z$.

t liegt aber in Δ; in Δ soll aber f^{-1} stetig erweitert sein; also müsste $f^{-1}(t_n) \to f^{-1}(t)$, $f^{-1}(u_n) \to f^{-1}(t)$, was wegen $y \neq z$ nicht der Fall ist.

Also ist f eine eineindeutige und (einseitig) stetige Abbildung von $\mathfrak{D}^*$ auf $\Delta\Delta_1$.

~~Auf dieser Teilmenge von $\Delta\Delta_1$ ist die Umkehrung dieser stetigen (erweiterten) Abbildung definiert aus $f(y_n) \to f(y)$ ($f(y_n), f(y)$ in dieser Teilmenge)~~

~~folgt $y_n \to y$; denn sonst~~

Die (auf M definierte) Funktion f^{-1} würde zu einer auf $\Delta\Delta_1$ stetigen Funktion erweitert. Wenn nun $t \in \Delta\Delta_1$, $t_n \in M$,
$t_n \to t$, so gibt es genau ein
$x \in \mathfrak{D}^*$, $x_n \in M$ mit $f(x) = t$, $f(x_n) = t_n$.
Es ist $x_n = f^{-1}(t_n)$. Wäre nicht
$x = \lim x_n$, so müsste $t \in \Delta\Delta_1 - M$ sein (denn auf M, M haben wir Homöomorphie). Man könnte dann eine Folge $y_n \in M$, $y_n \to x$ finden; es wäre dann $f(y_n) = \tau_n \to f(x) = t$.

Also hätten wir eine Folge
$t_1, \tau_1, t_2, \tau_2, \dots$ aus M, die gegen einen Punkt t aus $\Delta\Delta_1$ konvergiert, für welche aber
$f^{-1}(t_1), f^{-1}(\tau_1), f^{-1}(t_2), f^{-1}(\tau_2) \dots$
$\equiv x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ nicht konvergieren würde, was ~~gegen~~ alle Voraussetzung widerspricht, dass

$$\varrho(x,y) = \frac{\varrho_F(x,y)\,\bigl(\varrho(x,F) + \varrho(y,F)\bigr)}{1 - \varrho_F(x,y)}$$

Für $\varrho_F(x,y) < \frac{1}{4}$ ist also wegen

$$\varrho(y,F) \leqq \varrho^{\#}(x,y) + \varrho(x,F)$$

$$\varrho(x,y) \leqq 2\varrho_F(x,y)\bigl(\varrho(x,y) + 2\varrho(x,F)\bigr)$$

$$\varrho(x,y) \leqq \frac{4\varrho(x,F)\,\varrho_F(x,y)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\leqq 8\varrho(x,F)\,\varrho_F(x,y) \to 0.$$

Also ist dies wirklich eine erlaubte Abänderung der Metrik von G.

Nun sei $\overline{M}$ ein G_σ im vollständigen Raum R; G_n offen in R, $M = \prod_1^\infty G_n$, $F_n = R - G_n$; es ist $\varrho_{F_n}(x,y) < 1$ bei $x \in M$, $y \in M$. Man bilde

$$\varrho^*(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varrho_{F_n}(x,y);$$

das ist eine Entfernungsfunktion für M. Es ist

$$\varrho_{F_n}(x,y) \leqq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)};$$

$$\varrho^*(x,y) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)};$$

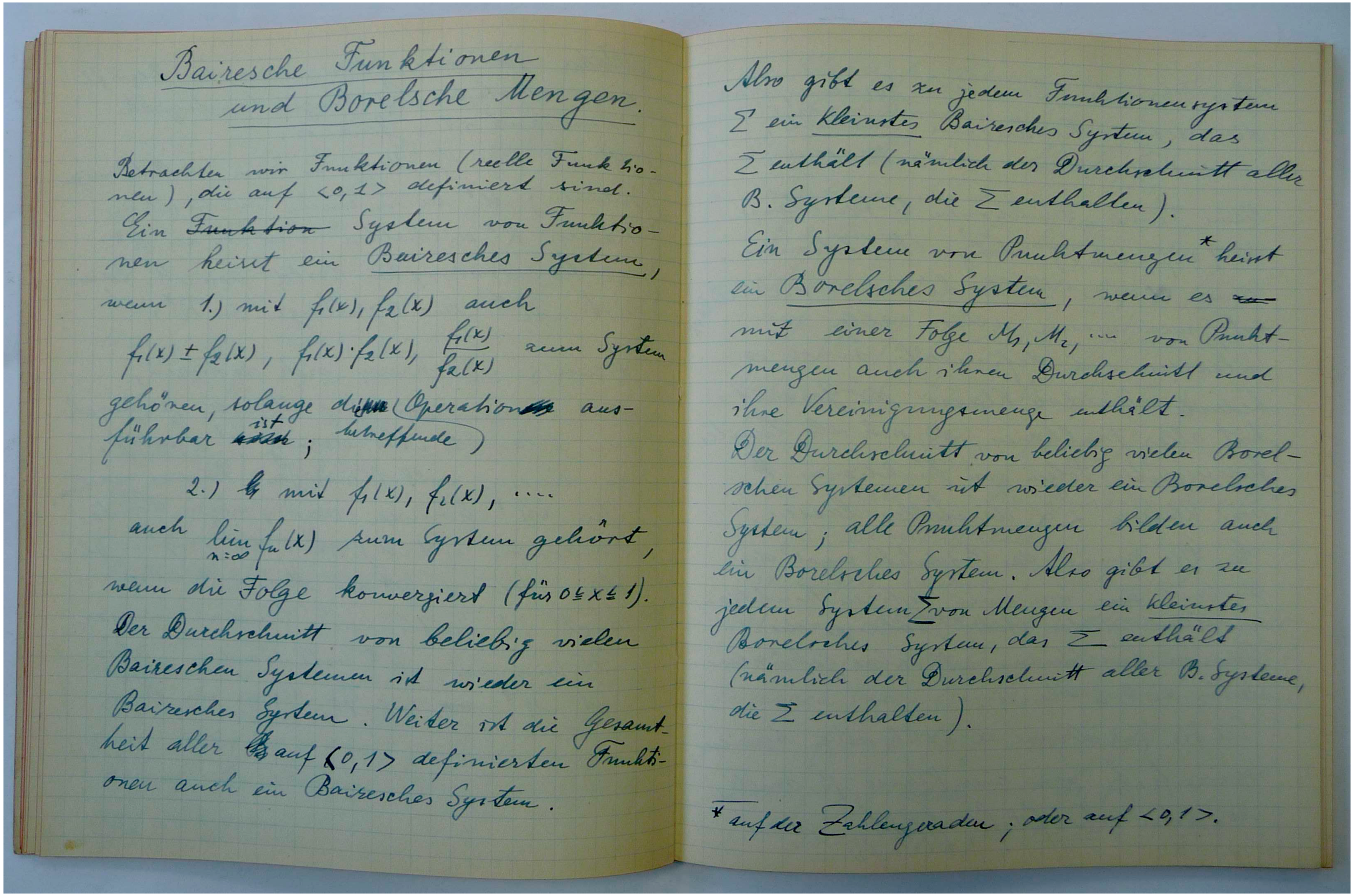
Es sei x fest in M gegeben;
(es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen $N = N(\varepsilon)$ so, dass $\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$;

es sei $a = \underset{n=1,2,\dots,N}{\mathrm{Min}}\ \varrho(x,F_n)$; es ist $a = a(\varepsilon) > 0$

$$\sum_1^N \frac{1}{2^n} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)} \leqq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + a}$$

Für $\varrho(x,y) < \eta = \eta(\varepsilon)$ ist der letzte Ausdruck $< \varepsilon$.

Also: für $y \in M$, $\varrho(x,y) < \eta(\varepsilon, x)$ ist $\varrho^*(x,y) < \varepsilon$.



Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen.

Betrachten wir Funktionen (reelle Funktionen), die auf $\langle 0,1\rangle$ definiert sind.

Ein ~~Funktion~~ System von Funktionen heisst ein Bairesches System, wenn 1.) mit $f_1(x), f_2(x)$ auch $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ zum System gehören, solange di~~e~~ (betreffende) Operation~~en~~ ausführbar ~~sind~~ ist;

2.) ~~G~~ mit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ auch $\lim_{n=\infty} f_n(x)$ zum System gehört, wenn die Folge konvergiert (für $0 \leq x \leq 1$).

Der Durchschnitt von beliebig vielen Baireschen Systemen ist wieder ein Bairesches System. Weiter ist die Gesamtheit aller ~~B~~ auf $\langle 0,1\rangle$ definierten Funktionen auch ein Bairesches System.

Also gibt es zu jedem Funktionensystem Σ ein kleinstes Bairesches System, das Σ enthält (nämlich der Durchschnitt aller B. Systeme, die Σ enthalten).

Ein System von Punktmengen* heisst ein Borelsches System, wenn es ~~zu~~ mit einer Folge $M_1, M_2, \ldots$ von Punktmengen auch ihren Durchschnitt und ihre Vereinigungsmenge enthält.

Der Durchschnitt von beliebig vielen Borelschen Systemen ist wieder ein Borelsches System; alle Punktmengen bilden auch ein Borelsches System. Also gibt es zu jedem System Σ von Mengen ein kleinstes Borelsches System, das Σ enthält (nämlich der Durchschnitt aller B. Systeme, die Σ enthalten).

* auf der Zahlengeraden; oder auf $\langle 0,1\rangle$.

Die Suslinschen - oder A-Mengen über ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ sind folgendermassen definiert:

Man nehme aus $\mathfrak{M}$ irgend ein abzählbares Mengensystem und numeriere es so:

$$* \begin{cases} M_1, M_2, \dots \quad ; M_{11}, M_{12}, M_{2,1}, \dots \quad ; \\ M_{1,1,1}, M_{112} \dots \qquad M_{i_1 i_2 \dots i_k} \dots \end{cases}$$

($k, i_1, i_2 \dots i_k$ voneinander unabh. natürliche Zahlen). Aus diesem abzählbaren System nehme man eine ~~Ket~~Folge - sog. Kette heraus:

$$M_{i_1} ; M_{i_1, i_2} ; M_{i_1, i_2, i_3} ; \dots$$

(i_1 fest in der ganzen Folge; ebenso i_2 von dem 2. Glied an usw.) Der Durchschnitt aller Mengen dieser Kette heisst Kern der Kette. Und die Vereinigungsmenge der Kerne aller Ketten, die aus dem System (*) gebildet werden können, heisst eine Suslinsche Menge über $\mathfrak{M}$.

Es gibt ein System $\mathfrak{N}$ von Folgen natürlicher Zahlen, so dass durch

$$\Phi^{(\mathfrak{N})}_{(m)},$$

wo m alle Mengenfolgen aus $\mathfrak{M}$ durchläuft, genau alle A-Mengen über $\mathfrak{M}$ dargestellt werden.

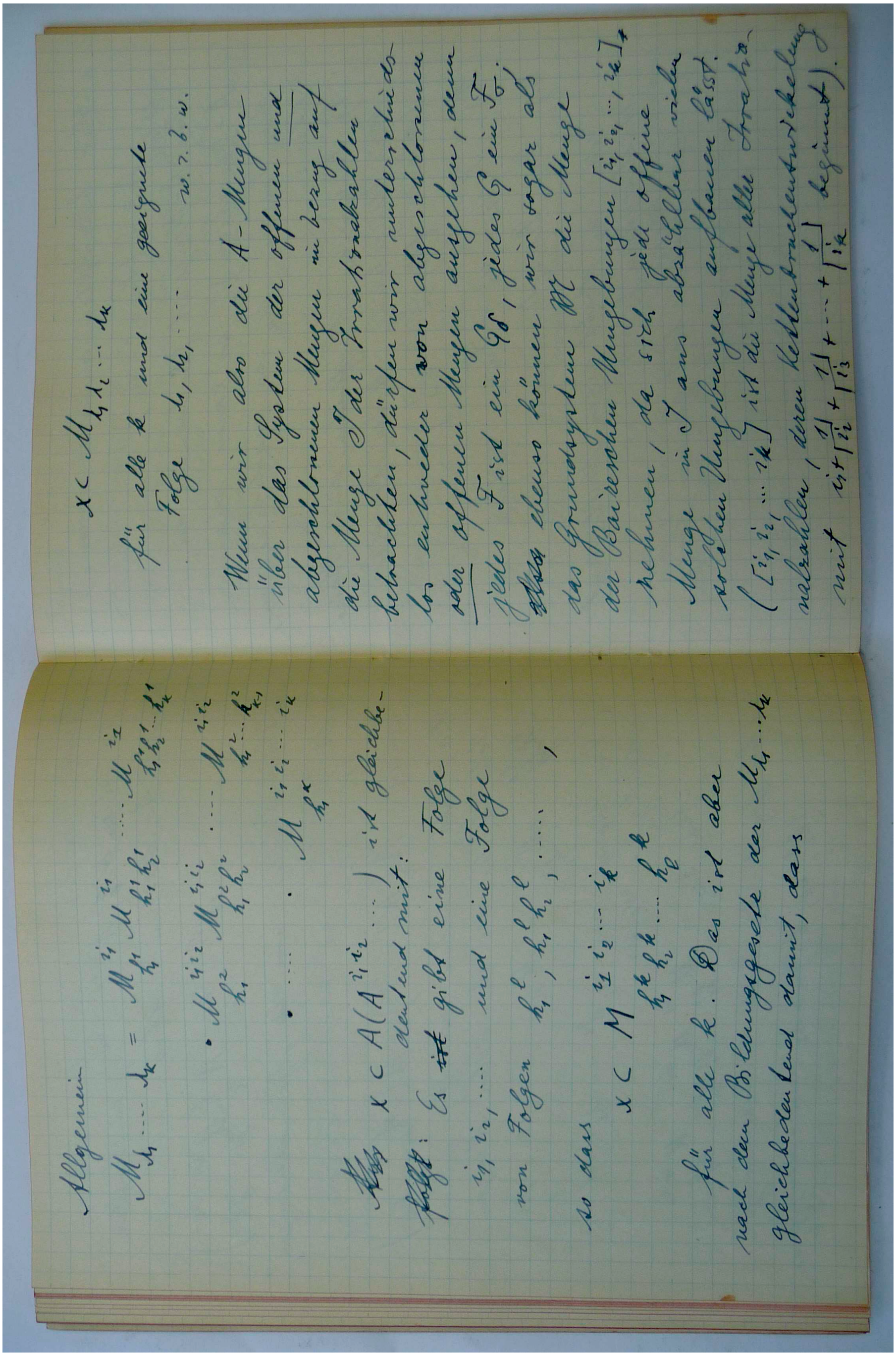
Beweis: wir nehmen ein ~~Folge~~ System * aus $\mathfrak{M}$ und werden es so ummumerieren:

$$M_{i_1, i_2, \dots i_k} = M^{m(i_1, i_2, \dots, i_k)},$$

wo $m(i_1, i_2, \dots, i_k) = 2^{i_1 - 1} + 2^{i_1 + i_2 - 1} + \dots + 2^{i_1 + \dots + i_k - 1}$.

(Also im dyadischen System:

$$m(i_1, i_2 \dots i_k) = 1\underbrace{00 \dots 0}_{i_k - 1 \text{ Nullen}} 1 \underbrace{000 \dots 0}_{i_{k-1} - 1} \dots 1\underbrace{00 \dots 0}_{i_1 - 1})$$



Allgemein

$$M_{\lambda_1 \dots \lambda_k} = M^{i_1}_{h_1^1} M^{i_1}_{h_1^1 h_2^1} \cdots M^{i_1}_{h_1^1 h_2^1 \dots h_k^1}$$
$$\cdot M^{i_1 i_2}_{h_1^2} M^{i_1 i_2}_{h_1^2 h_2^2} \cdots M^{i_1 i_2}_{h_1^2 \dots h_{k-1}^2}$$
$$\cdot \;\cdots\; \cdot M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{h_1^k}$$

~~Also~~ $x \subset A(A^{i_1 i_2 \dots})$ ist gleichbedeutend mit:
~~Folgt~~: Es ~~ist~~ gibt eine Folge $i_1, i_2, \dots$ und eine Folge von Folgen $h_1^l, h_1^l h_2^l, \dots$,
so dass
$$x \subset M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{h_1^k h_2^k \dots h_l^k}$$
für alle k. Das ist aber nach dem Bildungsgesetz der $M_{\lambda_1 \dots \lambda_k}$ gleichbedeutend damit, dass
$$x \subset M_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$$
für alle k und eine geeignete Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ w.z.b.w.

Wenn wir also die A-Mengen über das System der offenen und abgeschlossenen Mengen in bezug auf die Menge J der Irrationalzahlen betrachten, dürfen wir unterschiedslos entweder von abgeschlossenen oder offenen Mengen ausgehen, denn jedes F ist ein G_δ, jedes G ein F_σ; ~~Also~~ ebenso können wir sogar als das Grundsystem $\mathfrak{M}$ die Menge der Baireschen Umgebungen $[i_1, i_2, \dots, i_k]_*$ nehmen, da sich jede offene Menge in J aus abzählbar vielen solchen Umgebungen aufbauen lässt. ($[i_1, i_2, \dots i_k]$ ist die Menge aller Irrationalzahlen, deren Kettenbruchentwickelung mit $i_1 + \frac{1}{|i_2} + \frac{1}{|i_3} + \dots + \frac{1}{|i_k}$ beginnt).

<u>Satz</u>: Jede nicht abzählbare A-Menge enthält eine perfekte Teilmenge (hat also die Mächtigkeit des Kontinuums).

Beweis: Es sei $A = S(F_{i_1 i_2 \dots i_k})$; die $F_{i_1 \dots i_k}$ seien Bairesche Umg. k-ten Ranges, $F_{i_1 \dots i_k} > F_{i_1 \dots i_{k+1}}$. Wir streichen alle diejenigen $F_{i_1 \dots i_k}$ weg, für welche

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = S(F_{i_1 \dots i_k h_{k+1} \dots h_r})$$

(bei veränderl. $h_{k+1}, h_{k+2}, \dots$)

abzählbar ist.

Dann enthält also jedes übrigbleibende $F_{i_1 \dots i_k}$ unabzählbar viele Punkte von A. Zu $F_{i_1 \dots i_k}$ gibt es dann ein $k' > k$, so dass es unter den übrigbleibenden $F_{i_1 \dots i_k \dots i_{k'}}$ mindestens zwei geometrisch verschiedene gibt: denn sonst würde es (geometrisch) nur eine übrigbleibende Kette durch $F_{i_1 \dots i_k}$ geben, und die hat nur einen Punkt als Durchschnitt, und nicht unabzählbar viele.

Wir nehmen also ein übriggebliebenes $F_1 = \Phi$; finden ein k_1, zu welchem es zwei verschiedene Nachfolger Φ_0, Φ_1 gibt; dann gibt es zu Φ_0 wieder zwei verschiedene Nachfolger Φ_{00}, Φ_{01} und ebenso Φ_{10}, Φ_{11} zu Φ_1 u. s. w.

$$\Psi_k = \sum_{h_1 \dots h_k = 0}^{1} \Phi_{h_1 \dots h_k}$$

sind abgeschlossene Mengen; ebenso

$$\Psi = \Psi_1 \Psi_2 \dots\,;$$

Ψ ist in A enthalten. Und Ψ ist unabzählbar: denn jede Folge

$\Phi_{h_1}\ \Phi_{h_1 h_2} \dots$ definiert eindeutig einen Punkt von Ψ.

w. z. b. w.