5 KAREL RYCHLÍK A BERNARD BOLZANO

5.1 ÚVODNÍ POZNÁMKY

5.2 BOLZANOVSKÉ STUDIE KARLA RYCHLÍKA

5.3 ZÁVĚR

5.1 ÚVODNÍ POZNÁMKY

5.1.1 Bernard Bolzano (1781 – 1848)

Bernard Bolzano se narodil 5. října 1781 v Praze v rodině Bernarda Pompeia Bolzana pocházejícího z Itálie, vzdělaného obchodníka s uměleckými předměty, a Marie Cecilie Maurerové z pražské německé rodiny. Po absolvování piaristického gymnázia (1796) Bolzano studoval na filosofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Po ukončení základního filosofického studia věnoval celý rok 1799 – 1800 dalšímu vzdělávání ve vyšší matematice u profesora Františka Josefa Gerstnera (1756 – 1832), ale také ve filosofii, a rozhodoval se o své budoucnosti. Poté studoval teologii, jeho zájem o matematiku však neopadl. Roku 1804 se přihlásil do konkurzu na stolici elementární matematiky, která se uvolnila po Stanislavu Vydrovi (1741 – 1804), a zároveň na nově zřizovanou stolici náboženství. V obou konkurzech byl Bolzano nejúspěšnější, avšak o matematickou stolici se ucházel také Ladislav Josef Jandera (1776 – 1857), který byl starší a matematiku již tři roky suploval za nemocného Vydru – bylo tedy „vhodné“, aby profesuru matematiky získal on. Bolzano se tak stal učitelem náboženství (prozatímním 1805, definitivně potvrzen 1807). V roce 1815 byl jmenován děkanem filosofické fakulty a členem Královské české společnosti nauk. V důsledku záludných intrik byl roku 1820 suspendován pro údajné „šíření nesprávných názorů“ a až do roku 1825 byl církevními hodnostáři ještě různým způsobem stíhán. Odchod z univerzity však ulehčil Bolzanovu od mládí chatrnému zdraví a umožnil mu také intenzivnější vědeckou práci; v letech 1820–30 například vzniklo obsáhlé dílo *Wissenschaftslehre* [B8]. Od roku 1825 žil Bolzano převážně mimo Prahu – u svých přátel Anny a Josefa Hoffmannových na zámečku v Těchobuzi či v domě právníka Pistla v Radiči, později u Antonína Veitha v Liběchově či u Veithovy sestry v Jirnech blízko Úval. Ke konci života bydlel u svého bratra v Celetné ulici v Praze, kde 18. prosince 1848 zemřel na tuberkulózu plic.

Z prací matematického charakteru, které vznikly v období Bolzanova působení na univerzitě, zde uveďme [B1] – [B5] a [B9]. Od roku 1820 Bolzano pracoval na zmíněném obsáhlém čtyřdílném spisu *Wissenschaftslehre* (obvyklý český překlad je *Vědosloví*) [B8], zaměřeném na podstatu a metodologii vědy jako takové. Tato práce měla být základem pro velkolepé matematické dílo

Grössenlehre (*Nauka o veličinách*), na kterém Bolzano pracoval především v letech 1830 až 1835, pak se k němu vrátil v roce 1940,[1] vícekrát je přepracovával a opravoval; nebylo však zcela dokončeno (i když některé části byly v podstatě připraveny k tisku) a za Bolzanova života ani krátce po jeho smrti vydáno. Dnes se můžeme jen domýšlet, jak by vypadal vývoj matematiky, kdyby se Bolzano na její úkor nezabýval tak intenzivně teologií, kdyby měl dostatek sil na dokončení *Grössenlehre*, anebo kdyby se alespoň našel pokračovatel, který by rukopisy dokončil a vydal a mnohé v tehdejší době převratné myšlenky by spatřily světlo světa dříve než ve dvacátém století, jak se nakonec stalo. Výjimku v tomto směru tvoří *Paradoxien des Unendlichen* (*Paradoxy nekonečna*) [B10], na nichž Bolzano pracoval v posledních letech svého života[2] a které byly vydány jen tři roky po jeho smrti zásluhou přítele a spolupracovníka Františka Příhonského (1788 – 1859); ty byly citovány Georgem Cantorem (1845 – 1918), zakladatelem teorie množin, v práci [10] či Richardem Dedekindem (1831 – 1916) v předmluvě k druhému vydání knížky [12].

Ke konci svého života hledal Bolzano pokračovatele, který by pochopil a především dokončil jeho matematické dílo. Důvěru nakonec vložil do mladého Roberta Zimmermanna (1828 – 1898), jemuž také odkázal většinu svých matematických rukopisů v naději, že je připraví k tisku. Zimmermann se však zaměřil na filosofii a později se stal docentem (1849) a profesorem filosofie (1852 v Praze, 1861 ve Vídni); roku 1882 daroval Bolzanovu matematickou pozůstalost vídeňské akademii věd a ta ji o deset let později předala vídeňské Dvorní, později Národní knihovně.[3]

Po Bolzanově smrti se objevily různé pokusy o studium a souborné vydání jeho díla, nebyly však úspěšné.[4] Začátkem dvacátých let dvacátého století upozornil na některé závažné Bolzanovy matematické výsledky středoškolský profesor Martin Jašek (1879 – 1945) z Plzně; publikoval o nich čtyři články [33] až [36] a referoval o nich rovněž ve třech přednáškách v Jednotě (3. 12. 1921, 14. 1. a 2. 12. 1922).

Jašek se nejprve obrátil na Karla Petra, který dal podnět k uvedeným přednáškám. Jejich pořadatelem byl tehdy Karel Rychlík, kterého tato problematika velmi zaujala. Dochovalo se několik dopisů, které psal Rychlík Jaškovi v letech 1921–23 v souvislosti s jeho přednáškami v Jednotě, a další dva dopisy z let 1925 a 1926. První dopis je datován 15. listopadu 1921; Rychlík v něm zve M. Jaška, aby přednášel v Jednotě. Z dopisu je patrné, že byl psán krátce poté, co Jašek kontaktoval Petra.[5]

[1] Viz Winterovu knihu [88], v níž jsou otištěny dopisy Bolzana Příhonskému (zejména dopisy 15, 41, 43, 44 a 107), a Rychlíkovu předmluvu k [R85], str. 13.

[2] Viz část 5.2.5.

[3] Podrobněji je tato historie popsána např. v knize Eduarda Wintera [86], kap. 7 (zejména str. 217–218; v českém překladu str. 167–168).

[4] Bližší informace např. v [BB2], [32], [49].

[5] *Milý p. kolego! Jak mi sdělil p. prof. Petr, přišel jste na velmi zajímavé objevy v rukopisech Bolzanových, o nichž byste byl ochoten přednášeti v mathematické jednotě. Jako pořadatel přednášek dovolil bych si Vás pozvati, abyste přednášel v sobotu dne 3. prosince za obvyklých podmínek (Jednota platí dráhu a útraty cestovní, dále honorář za přednášku).* Soukromý archiv: J. Veselý.

Zajímavá byla tehdy především tzv. Bolzanova funkce, kterou Bolzano uvedl jako příklad spojité funkce, která nemá v žádném bodě jisté husté množiny derivaci. Již 3. února 1922 Rychlík odevzdal k tisku práci *Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse* [R19], kde podal důkaz spojitosti Bolzanovy funkce a navíc dokázal, že derivace neexistuje v žádném bodě daného intervalu. Jiný důkaz nediferencovatelnosti Bolzanovy funkce, stejně jako některé další vlastnosti, publikoval ve stejném roce rovněž Vojtěch Jarník v práci [28] (viz str. 178).

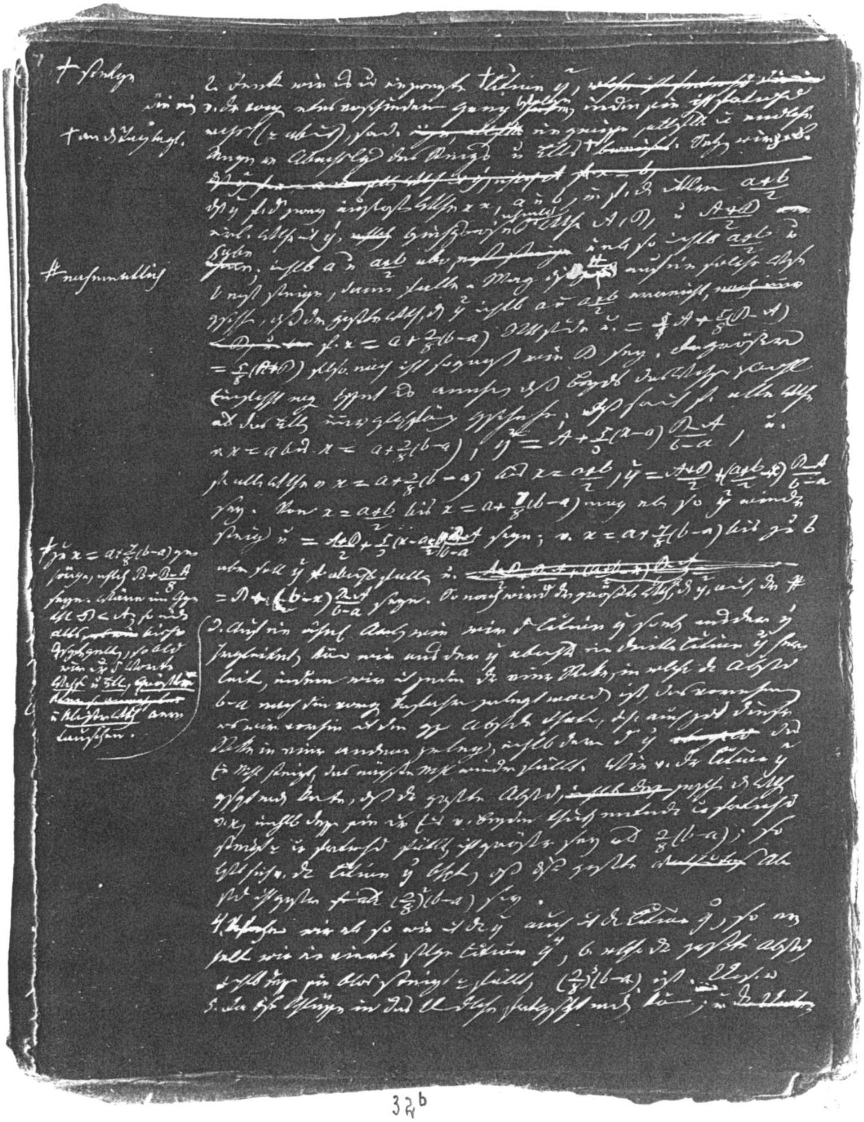
V článku *Funkce Bolzanova* [34] píše Martin Jašek o rukopisech z Bolzanovy pozůstalosti:

Již vydavatel „Paradoxií" Fr. Příhonský zmiňuje se o tom, že práce Bolzanovy, pokud vyšly tiskem, jsou jen „jakoby ukázkami větších děl matematických", uložených v jeho pozůstalosti (Dr. Fr. Příhonský: „Drei philosophische Abhandlungen ... Aus Dr. B. Bolzanos Nachlasse", Lipsko, 1851, p. 129). Vskutku pak také záhy po smrti Bolzanově oddaný jeho žák Jos. Michael Fesl, rovněž kněz a podobným osudem stíhaný jako jeho učitel, činil horlivé a obětavé pokusy, aby zachránil a odevzdal tisku, čeho ceny spíše předpokládal než dovedl odhadnouti. Dosáhl však jen toho, že pozůstalost nezmizela beze stopy, jest uložena (nyní) z části v knihovně Českého zemského (Národního) Musea v Praze, z části – vědecky daleko významnější – v bývalé dvorní (nyní Národní) knihovně ve Vídni, kamž byla odevzdána svou dobou z Akademie. ([34], str. 69)

Abychom si utvořili představu o tom, jak náročná práce čekala na ty, kteří se rozhodli Bolzanovy rukopisy zpracovat a vydat, ocitujme ještě jednou z uvedeného Jaškova článku:

Dosáhl jsem před časem svolení k prohlédnutí této pozůstalosti; jest na obou místech ohromná, ač ceny – rozmanité: důležité rukopisy vedle papírů celkem bezvýznamných, zlomky různých prací, náběhy a koncepty z různých dob, ojedinělé listy atd. – vše promícháno navzájem i s jinými listinami, toť asi obraz toho, co se zachovalo po Bolzanovi. Jeť pozůstalost uchována dosud tak, jak svou dobou jednotlivé její součástky přicházely od dárců. Počet listů jde do tisíců.

Z té příčiny nelze zatím podati přesného obrazu celku ... Skutečně pak vyžádá si pouhé uspořádání jejich ještě dosti času a práce, jež ostatně předpokládá i jistou průpravu: znalost tištěných spisů Bolzanových i literatury o něm, jeho korespondence a života vůbec, tehdejších poměrů kulturních a literárních vztahů a – písma. Vždyť i Příhonský, jenž byl v denním styku s Bolzanem a znal jeho zkratky (jakými jsou vždy psány první náčrtky) shledal rukopis „Paradoxií" „nicht immer sehr lesbar" (Parad., 1851, str. V) ... Nicméně obraz velikého díla matematického (matematicko–filosofického), o jakém se Bolzano nejednou zmiňuje ve své korespondenci ... rýsuje se celkem z trosek, a lze se nadíti, že bude objeveno celé i s příslušnými doplňky. ([34], str. 70)



OBR. 5.1 UKÁZKA KOPIE BOLZANOVA RUKOPISU FUNCTIONENLEHRE ULOŽENÉ V ÚA AV ČR

5.1.2 Bolzanovská komise

Dne 5. března 1924 byla při Královské české společnosti nauk ustavena Bolzanovská komise,

... jež by se starala o to, aby životní dílo Bernarda Bolzana, filosofa a matematika a příznivce národa českého, stalo se plně přístupným veškerenstvu. Zejmena jest účelem jejím nejprve získati a sjednotiti rukopisy a památky Bolzanovské vůbec, kteréžto rukopisy a památky z části uchovány jsou v Praze, z části a to hlavní v Národní knihovně ve Vídni. Později pomýšlí komise vydati tiskem rukopisnou pozůstalost, pokud ovšem poskytuje vědecký a vlastenecký zájem, při čemž by došly také zdůraznění ony momenty, důležité s hlediska národnostního; právě tohoto cíle by se nedosáhlo, kdyby se díla toho – jak možno očekávati – chopili pracovníci jiní nežli čeští.[6]

28. března 1924 zasedal přípravný výbor složený z profesorů české univerzity F. Krejčího, V. Novotného, K. Petra a J. Sobotky, který se usnesl na následujících krocích:

1. Buďte především získány památky rukopisné, chované mimo území republiky, tj. rukopisy Bolzanovy, uložené v Národní knihovně ve Vídni. Rukopisy tyto obsahují nejdůležitější část neznámého díla Bernarda Bolzana a jsou hlavním předmětem zájmu široké veřejnosti vědecké. Jejich včasné získání jest tudíž prvním bodem řečené komise.

2. Poněvadž koupě jejich jest nemožná, buďte opatřeny vhodné jejich reprodukce. Komité pokládá k tomu za nejúčelnější metodu tak řečených černých snímků. Metoda tato je totiž nejrychlejší, nejlevnější a nahrazuje dostatečně originály – zejména také proto, že lze dalším postupem získati z nich podle potřeby snímky fotografické úplně věrné.

3. K tomu účelu navrhuje komité:

a/ aby ministerstvo školství a národní osvěty povolilo nutný k tomu náklad výrobní, který činí asi 15.000 Kč, počítá-li se asi 1 Kč za jeden snímek (při celkovém počtu stránek větším než 10.000);

b/ aby ministerstvo školství a národní osvěty požádalo ministerstvo věcí zahraničních, aby dalo k tomu cíli k disposici reprodukční stroj, který zakoupilo k účelům spisové rozluky pro vyslanectví ve Vídni (a jehož se tam zatím jinak neužívá), a aby poskytlo také i sílu, která stroj obsluhuje a výrobu provádí. Náklad na sílu tuto není totiž započten v částce výše uvedené;

c/ aby ministerstvo školství a národní osvěty dalo příkaz profesoru dívč. reál. gymnasia v Plzni dru. M. Jaškovi, který tou dobou dlí ve Vídni a urovnává pozůstalost Bolzanovu, aby převzal vedení těchto prací a vyjednal, čeho k tomu zapotřebí, s ředitelstvím Národní knihovny ve Vídni.

Jmenovaný profesor zabývá se – jak známo – delší dobu touto pozůstalostí a dobyl sobě zásluh v té příčině, jež se uznávají jak u nás, tak i v cizině. Má

[6] Dopis KČSN ministerstvu školství a národní osvěty ze dne 9. 4. 1924, č. j. 90/1924. ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

kromě toho zvláštní ujednání s ředitelstvím uvedené knihovny a jest tudíž jediný, na nějž se lze v té příčině obrátiti. Jest zároveň ochoten převzíti v té věci všechny závazky, bude-li mu takovýto příkaz udělen a poskytnuty k provedení jeho nezbytné prostředky ...[7]

KČSN jednala o těchto návrzích ve své řádné schůzi 2. dubna 1924 a požádala ministerstvo školství a národní osvěty o podporu. V květnu ministerstvo poskytlo komisi částku 15 000 Kč a začalo jednat s ministerstvem zahraničních věcí o poskytnutí reprodukčního stroje a pracovní síly.[8]

Kompletní složení Bolzanovské komise bylo následující: K. Petr – předseda,[9] M. Jašek – tajemník, B. Bydžovský, M. Horáček, F. Krejčí, V. Novotný, K. Rychlík, J. Sobotka, J. Vojtěch a K. Vorovka.[10]

Reprodukční práce ve Vídni řídil M. Jašek (získal finanční příspěvek od ministerstva; ve Vídni strávil více než 17 měsíců – svou práci dokončil 13. března 1925 [11]). Fotografické kopie pořízené na základě Jaškova vlastního výběru jsou dnes uloženy v ÚA AV ČR, fond KČSN. Pro větší přehlednost zde uveďme jejich seznam:

- *Zu vier besonderen Problemen der Geometrie und Anti–Euklid* (ve fondu KČSN kart. 92, inv. č. 613; ve Vídni odd. VI, sv. 1–5),
- *Zur Mathematik* (kart. 92, inv. č. 614; odd. VII, sv. 1),
- *Von der mathematischen Lehrart* (kart. 92, inv. č. 615; odd. VII, sv. 4–6),
- *Zahlenlehre I – IV, VII, VIII* (kart. 93–94, inv. č. 616–619, 622–623; odd. VII, sv. 8–10),
- *Zahlenlehre V* (kart. 94, inv. č. 620; odd. VII, sv. 11),
- *Zahlenlehre VI* (kart. 94, inv. č. 621; odd. VII, sv. 8),
- *Functionenlehre* (kart. 95, inv. č. 624; odd. VII, sv. 12),
- *Zeit- und Raumlehre* (kart. 95, inv. č. 625; odd. VII, sv. 14),
- dva neuspořádané stohy fotografických kopií z pozůstalosti M. Jaška (celý kart. 96, inv. č. 626).

Práce komise se začala vyvíjet velmi slibně, její členové byli naplněni velkým optimismem. V listopadu roku 1924 požádala komise o záštitu presidenta T. G. Masaryka. Součástí žádosti byla zpráva tajemníka Jaška:

Práce komise postoupily již tak, že byly opatřeny fotografické reprodukce větší části rukopisné pozůstalosti Bolzanovy v Národní knihovně ve Vídni, takže

[7] Tamtéž.

[8] Viz odpověď z ministerstva školství a národní osvěty ze dne 6. 5. 1924, č. j. 90/1924. ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

[9] Připomeňme, že Karel Petr si zvolil téma *Bernard Bolzano a jeho význam v matematice* pro svou inaugurační přednášku proslovenou u příležitosti uvedení do funkce rektora Univerziry Karlovy na školní rok 1925/26; přednáška byla později publikována jako [59]. Viz též článek [11] Z. Crkalové.

[10] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

[11] Viz účetní zprávu M. Jaška pro KČSN z 28. 6. 1925. ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 117, inv. č. 839.

bude možno přikročiti k vydání prvního svazku „Functionenlehre“ Bolzanovy, díla, jež jest očekáváno s napětím celou matematickou veřejností světovou ...[12]

Masaryk záštitu přijal, daroval komisi 50 000 korun a přislíbil další „hmotnou i mravní“ podporu, což také splnil.[13] Komise rovněž získala na pět let *Prioritäts–Herausgeberrechts* od Národní knihovny ve Vídni. Počítalo se s tím, že první svazek Bolzanových spisů (*Functionenlehre*) vyjde na podzim roku 1925 a zbytek edice v dalších pěti letech.[14]

Optimismus však brzy vyprchal, objevovaly se nejrůznější problémy, a to nejen finanční. Ministerstvo například nepovolilo M. Jaškovi dovolenou na druhé pololetí školního roku 1924/25, aby mohl urovnat ještě pražskou pozůstalost Bernarda Bolzana, přestože se za to KČSN několikrát přimlouvala; docházelo i ke sporům uvnitř komise.

První svazek edice, opatřený pečlivými poznámkami Karla Rychlíka a předmluvou Karla Petra, vyšel až v roce 1930 [R34]. Rychlík požádal v roce 1926 o zapůjčení rukopisu *Functionenlehre*,[15] ve stejném roce dostal honorář 400 korun za jeho opisování, v roce 1930 pak obdržel odměnu ve výši 4087,50 korun za jeho vydání. V roce 1930 vypršelo původní pětileté období edičních práv, která KČSN získala od Národní knihovny ve Vídni. Po žádosti KČSN byla práva prodloužena o další dva roky – a pak ještě mnohokrát (i během druhé světové války) až do roku 1952, kdy Bolzanovská komise zanikla spolu s KČSN. Začátkem třicátých let vyšly další svazky Bolzanových spisů: *Zahlentheorie* ([B12], 1931; i tento spis vydal a opatřil pečlivými poznámkami Karel Rychlík), *Von dem besten Staate* ([B13], 1932; A. Kowalewski) a *Der Briefwechsel B. Bolzano's mit F. Exner* ([B14], 1935; E. Winter). Pátý svazek nazvaný *Memoires géométriques* [B15] připravil k tisku J. Vojtěch v roce 1940, vyšel však až roku 1948.

V říjnu roku 1950 schválila KČSN na své schůzi uvolnění finančních prostředků na přípravu vydání dalšího svazku Bolzanových spisů. V následujícím období se Rychlík plně věnoval studiu a zpracovávání Bolzanovy pozůstalosti; k některým částem dopsal poznámky a urovnal je, některé přepisoval. Zatímco před druhou světovou válkou se Rychlík věnoval především pedagogické činnosti a práci v odborné matematice, po válce se zabýval výhradně historií matematiky, především pracemi Bernarda Bolzana.

Složení Bolzanovské komise se ke konci její existence již výrazně změnilo. V roce 1951 bylo následující:[16] B. Bydžovský – předseda, K. Rychlík, J. Vojtěch (členové komise od jejího založení), Q. Vetter, J. B. Kozák, J. Král, V. Laufberger, V. Vojtíšek a F. Slavík.

---

[12] Dopis KČSN prezidentu republiky, č. j. 139. ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

[13] Včetně počáteční částky přispěl prezident celkem 80 000 korunami a ministerstvo 32 000 korunami. Viz účetní knihu, ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 116, inv. č. 828.

[14] Protokol o schůzi Bolzanovské komise ze dne 28. 11. 1924. ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

[15] Toto zapůjčení jistým způsobem blokoval M. Jašek; Rychlík mu to vyčítá v dopise z 8. května 1926. Soukromý archiv: J. Veselý.

[16] Podle pozvánky na schůzi Bolzanovské komise, která se konala 30. 5. 1951 a která se zabývala další ediční činností; ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 53, inv. č. 292.

V roce 1952 zanikla KČSN, stejně jako ČAVU, a s ní i Bolzanovská komise. Zároveň byla založena Československá akademie věd (ČSAV), avšak Bolzanovská komise byla obnovena až o šest let později, a to ještě jen na krátkou dobu. V první kapitole (str. 48) jsme psali o těžkém období, které Rychlíkovi začalo v roce 1953, a o jeho dopise z června toho roku Vladimíru Kořínkovi, ve kterém žádá, aby mu byla umožněna honorovaná práce na zpracovávání Bolzanových rukopisů. Matematicko–fyzikální sekce ČSAV oficiálně pověřila Karla Rychlíka vědeckým uspořádáním Bolzanovy pozůstalosti až o dva roky později, 31. května 1955. Rychlík pak občas dostal odměnu za nějaký konkrétní počin (přepis, vydání apod.); od roku 1958 dostával pravidelnou měsíční podporu od Českého literárního fondu (viz str. 50).

Začátek padesátých let byl poněkud rizikový i pro dříve vydané Bolzanovy spisy. Ocitujme pro zajímavost ze stížnosti na nakladatelství ČSAV, kterou 26. listopadu 1953 napsal V. Kořínek Ústřední ediční radě ČSAV:[17]

Asi před třemi nedělemi dostal zaměstnanec nakladatelství s. Beránek od nakladatelství pokyn, aby vyřadil a dal do sběru Bolzanovy spisy, které vydala bývalá Královská česká společnost nauk se značným finančním nákladem. Význam Bolzanova díla pro dějiny matematiky jest velký a význam jeho filosofického díla v dnešní době nesmírně stoupá. O jeho matematické dílo je velký zájem v Sovětském svazu i jinde v cizině. To, co chtělo nakladatelství s Bolzanovými spisy provést, je úplný vandalismus, kterému na štěstí bylo zabráněno ...

V roce 1958 byla činnost Bolzanovské komise obnovena při I. sekci ČSAV a v této podobě trvala do reorganizace ČSAV v roce 1961. Jejími členy nyní byli M. Kössler – předseda, O. Borůvka, J. Holubář, V. Kořínek, K. Rychlík a I. Seidlerová. První schůze komise se konala 27. června 1958.[18] Karel Rychlík a Irena Seidlerová dostali za úkol připravit během prázdnin plán vydávání Bolzanových spisů. Dále se komise dohodla na tom, že by se měla pražská část pozůstalosti soustředit na jednom místě, pokud možno v Literárním archivu PNP, kde byla její největší část (vedle rukopisného oddělení Národní knihovny a archivu a knihovny Národního muzea). Navíc bylo usneseno, že bude nutné Bolzanovu pražskou písemnou pozůstalost odborně uspořádat, některé věci vyřadit a uchovat zvlášť. Vídeňská pozůstalost měla být po částech, vždy na krátkou dobu, půjčována Historickému ústavu ČSAV, který měl podle ní zkontrolovat staré fotokopie a opisy, případně se měly pořídit mikrofilmy dalších rukopisů – tyto práce však vázly vinou vídeňské strany. Vídeňská Národní knihovna do té doby již dvakrát odmítla půjčit části Bolzanovy pozůstalosti; naši badatelé se domnívali, že se tak stalo proto, že profesor Vysoké školy technické ve Vídni P. Funk na pozůstalosti pracuje a blokuje jakékoli její půjčování.

Další schůze Bolzanovské komise se konala 24. října 1958 a proběhla v ní zásadní diskuse o způsobu vydávání dalších částí Bolzanova rozsáhlého spisu

[17] ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 24, inv. č. 177.
Ve stejném dopise je také stížnost na to, že nakladatelství vydalo knihu *Matematický kaleidoskop* polského profesora Hugo Steinhause (Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953) bez jeho souhlasu, bez zaplacení, navíc vydalo překlad ruského překladu – nakladatelství tak způsobilo mezinárodní ostudu.

[18] ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 15, inv. č. 38.

Grössenlehre. V diskusi se střetly názory Karla Rychlíka a Ireny Seidlerové:

Prof. Rychlík navrhl, aby se ve vydávání pokračovalo jako před válkou. Zároveň oznámil, že má téměř k tisku připravenu kapitolu o reálných číslech, která je velmi zajímavá a zároveň důležitá pro celou Bolzanovu koncepci matematické analysy. Dr. Seidlerová byla jiného mínění. Říkala, že dosud se postupovalo při vydávání Bolzanovy literární pozůstalosti tím způsobem, že se vybíraly nejzajímavější hrozinky, které se vydávaly. To však nikterak nepřispěje k vědeckému poznání Bolzanovy osobnosti, ani po stránce matematické, ani po stránce filosofické. Podle Dr. Seidlerové nutno nejdříve přesně zjistit, co všechno se nám z chystaného Bolzanova díla Grössenlehre v pozůstalosti zachovalo, kolik versí jednotlivých kapitol pozůstalost obsahuje a v jaké vzájemné souvislosti tyto verse jsou, hlavně, která z nich je nejpozdější. To umožní sestavit podrobný popis Grössenlehre, jak se nám v pozůstalosti zachovala, a umožní rozhodnout, které části se mají vydat, a usnadní sestavit kritické vydání těchto částí.[19]

Zvítězil návrh Ireny Seidlerové, který odsouhlasilo po Bolzanovské komisi i předsednictvo I. sekce ČSAV. Na téže schůzi Bolzanovské komise Rychlík referoval o dalších částech vídeňské Bolzanovy pozůstalosti – *Adversia mathematica, Zu den ersten Arbeiten gehörig* a *Rezensionen.* Komise se rozhodla, že pořídí mikrofilm rukopisu *Rezensionen* z VIII. oddělení.

Ačkoli na souborné vydání Bolzanových spisů nedošlo, byla publikována řada studií zabývajících se různými Bolzanovými rukopisy, některé Bolzanovy rukopisy byly přepsány, a to i nezávisle na Bolzanovské komisi. Od roku 1961 připravovala ČSAV kritické souborné vydání, nyní především zásluhou Kazimíra Večerky z Matematického ústavu, který z nově pořízených kopií přepsal různé verze vídeňských matematických rukopisů a začal s jejich srovnáváním a přípravou k tisku. Plánovalo se, že se zachované verze publikují ve společném kritickém vydání. V roce 1967 Večerka vydal Bolzanův rukopis *Anti–Euklid* [B16] a opět vyšly mnohé studie, ze kterých zde uveďme alespoň práce Jaroslava Folty [14] – [17], Vojtěcha Jarníka [30], [31], Luboše Nového [50] – [52], Marie Pavlíkové [56], Karla Rychlíka [R51], [R65], [R66], [R67], [R68], [R73], [R84], [R85], [R86], Ireny Seidlerové [63] – [68] a Kazimíra Večerky [79].

V roce 1969 začala v nakladatelství *Friedrich Frommann Verlag* ve Stuttgart-Bad Cannstatt vycházet edice *Bernard Bolzano – Gesamtausgabe* [B17]. Ovšem principy, na nichž jsou tyto „sebrané spisy" editorů Eduarda Wintera, Jana Berga, Friedricha Kambartela, Jaromíra Loužila a Boba van Rootselaara založeny, jsou jednodušší než ty, které měla ve svém programu ČSAV; vzhledem k tomu, že se publikuje vždy jen domnělá poslední verze daného rukopisu bez hlubšího srovnání s verzemi předchozími, nejedná se o takovou kritickou edici, jakou by si spisy zasloužily (principy jsou detailně popsány ve svazku E2/1: *Bolzano-Bibliographie und Editionsprinzipien der Gesamtausgabe*, jednom z úvodních dílů řady [B17]).[20] Do roku 2002 bylo publikováno 57 z celko-

[19] ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 15, inv. č. 38.

[20] Uvedený svazek E2/1 z roku 1972 a jeho dva dodatky E2/1, Suppl. I a II z let 1982 a 1988 obsahují velice podrobnou a téměř vyčerpávající bibliografii do té doby publikovaných prací týkajících se Bernarda Bolzana.

vých asi 120 svazků, ačkoli původním záměrem bylo vydání celé edice do roku 1981 k uctění dvoustého výročí Bolzanova narození.[21]

Cílem těchto úvodních odstavců není podat úplný popis celého vývoje českého Bolzanovského bádání a uvést veškeré publikace týkající se Bolzanových rukopisů. Proto zde zmíníme již jen jubilejní rok 1981, kdy se v tehdejším Československu konala řada akcí věnovaných Bernardu Bolzanovi, například konference *Bernard Bolzano – doba, život a dílo* (Praha, 20. – 21. května), mezinárodní konference *Impact of Bolzano's Epoch on the Development of Science* (Praha, 7. – 12. září, sborník [BB4]) a konference českých matematiků organizovaná matematickou vědeckou sekcí Jednoty československých matematiků a fyziků (Zvíkovské Podhradí, 9. – 11. února, sborník [BB1]). Bolzano byl vzpomenut rovněž na dvou ryze matematických vědeckých konferencích s významnou mezinárodní účastí, a to na konferencích *Toposym V* (Praha, 24. – 28. srpna, srov. [40]) a *Equadiff 5* (Bratislava, rovněž 24. – 28. srpna, viz [41]), stejně jako na celostátním sjezdu Jednoty československých matematiků a fyziků a Jednoty slovenských matematiků a fyziků (Karlovy Vary, 12. – 14. října, viz [70]). Kolem roku 1981 byla rovněž publikována řada prací věnovaných Bolzanovu životu a dílu. Uveďme zde české překlady či reprinty spisů [B6], [B7], [B8], [B13] a [B19], zvláštní svazek [BB3] edice *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* obsahující Bolzanovy matematické práce [B1] – [B5] spolu s úvodní studií *Bolzano's Early Mathematical Achievements and Problems of His Historical Appreciation* Luboše Nového a Jaroslava Folty, knihu [32], resp. její anglickou verzi, obsahující články [28] – [31] Vojtěcha Jarníka a úvodní Foltovo pojednání [20], resp. anglický překlad těchto prací, další Foltovy články [19] a [20], knihu [8] a články (i o něco starší) [3] – [7] Karla Berky, knihu [46] Jaromíra Loužila, články Luboše Nového [54] – [55], Marie Pavlíkové [57], Štefana Schwabika [69], dvojici článků [26], [27] Štefana Schwabika a Jiřího Jarníka a další; Bolzanovi bylo věnováno rovněž celé šesté číslo ročníku 1981 *Filosofického časopisu.*[22]

Podívejme se nyní konkrétně, které Bolzanovy spisy Karel Rychlík studoval a jaké měla jeho práce výsledky.

[21] Více informací včetně seznamu vydaných svazků lze nalézt na internetové adrese nazvané *The Bernard Bolzano Pages at the FAE*: "*http://www.sbg.ac.at/fph/bolzano/*". V tištěné podobě jsou svazky k dispozici ve volném výběru v rukopisném oddělení pražské Národní knihovny.

28. června 1991 byla založena *International Bolzano Society* v Salzburgu; podrobnější informace lze nalézt na výše uvedené internetové adrese.

[22] Toto číslo obsahuje i *Výběrovou bibliografii prací Bernarda Bolzana a jejich českých překladů* (str. 954–961).

5.2 BOLZANOVSKÉ STUDIE KARLA RYCHLÍKA

5.2.1 *Functionenlehre*

Silným počátečním stimulem výše popsaných snah českých bolzanovských badatelů bylo „odhalení" spisu *Functionenlehre*, který byl koncipován jako část rozsáhlého díla *Grössenlehre*. Rukopis *Functionenlehre* je uložen v Národní knihovně ve Vídni jako 12. svazek VII. oddělení (*Grössenlehre*) Bolzanovy pozůstalosti, a to ve dvou zpracováních. První je psané vlastní rukou Bernarda Bolzana (85 listů), druhé napsal písař, ale Bolzano je prohlédl, opravil a doplnil (130 listů). Fotografické kopie, tzv. černé snímky, jsou v ÚA AV ČR;[23] k souboru reprodukcí jsou připojeny poznámky a vysvětlivky Martina Jaška z 18. 9. 1924. Jašek pořídil kopie celého druhého zpracování, z prvního reprodukoval jen 8 ukázek (titulní strana a 7 stran pojednávajících o tzv. Bolzanově funkci). V první ze svých přednášek (3. 12. 1921) hovořil Jašek kromě jiného právě o zmíněné Bolzanově funkci. Tu sestrojil Bolzano v první části rukopisu (§75) jako příklad funkce, která je spojitá v intervalu $[a, b]$, ale není monotónní v žádném podintervalu. Později, v druhé části rukopisu (§19), Bolzano ukázal, že body, ve kterých tato funkce nemá derivaci, tvoří v intervalu $[a, b]$ hustou množinu. Bolzano samozřejmě neužíval dnešní terminologii; ukázal, že když ve dvou různých bodech jeho funkce derivaci nemá, pak existuje bod mezi nimi, v němž rovněž nemá derivaci. To je s hustotou zmíněných bodů ekvivalentní.

Uvědomíme-li si, že Bolzano psal svou práci před rokem 1834, budeme jistě souhlasit s Vojtěchem Jarníkem:

Již to, že Bolzana vůbec napadlo, že by taková funkce mohla existovati, zasluhuje obdivu; tím většího obdivu zasluhuje, že se mu podařilo takovou funkci skutečně sestrojiti ... ([29], str. 251)

Bolzano tuto funkci zavádí jako limitu spojitých funkcí $y_1, y_2, y_3, \ldots$ definovaných na intervalu $[a, b]$. Přitom y_1 je funkce, která pro $x = a$ nabývá hodnoty A, pro $x = b$ hodnoty B a uvnitř intervalu (a, b) je lineární, tj.

$$y_1(x) = A + (x - a)\frac{B - A}{b - a}\,.$$

[23] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 95, inv. č. 624.

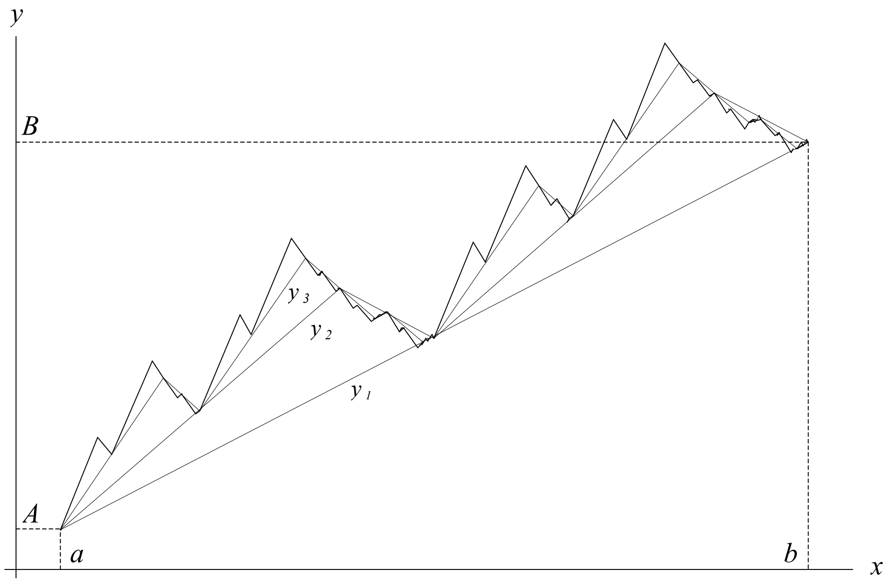
Funkce y_2 je definovaná tak, aby byla v obou polovinách intervalu (a, b) nejdříve rostoucí a pak klesající (popř. naopak pro $B < A$): původní interval se rozdělí na čtyři intervaly s krajními body

$$a,\ a + \frac{3}{8}(b-a),\ \frac{a+b}{2},\ a + \frac{7}{8}(b-a),\ b$$

a těmto bodům se přiřadí hodnoty

$$A,\ A + \frac{5}{8}(B-A),\ A + \frac{1}{2}(A+B),\ B + \frac{1}{8}(B-A),\ B \tag{5.1}$$

s tím, že na každém ze čtyř intervalů je funkce y_2 lineární. Funkce y_3 je definována analogicky, jen se místo intervalu (a, b) uvažují postupně čtyři uvedené intervaly atd.



Obr. 5.2 Bolzanova funkce

Důkaz spojitosti výsledné funkce není u Bolzana správný. Užívá totiž chybného tvrzení, že limitou (bodově) konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je vždy spojitá funkce – Bolzano si neuvědomil nutnost požadavku stejnoměrné konvergence.

3. února 1922 předložil Rychlík KČSN článek ***Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse*** [R19]; 9. února 1922 konal v Jednotě přednášku se stejným obsahem: jednak podal správný důkaz spojitosti Bolzanovy funkce, jednak dokázal, že tato funkce nemá v žádném bodě intervalu $(0, 1)$ konečnou ani nekonečnou derivaci, v bodě 0 nemá konečnou derivaci

zprava, v bodě 1 nemá konečnou ani nekonečnou derivaci zleva. Výše popsanou Bolzanovu konstrukci Rychlík užívá pro případ $a = 0$, $b = 1$, $A = 0$ a $B = 1$.

Ke stejnému výsledku došel ve stejné době, ale jinou cestou, rovněž Vojtěch Jarník v článku *O funkci Bolzanově* [28]. Jarník navíc explicitně vyjádřil jednostranné derivace: v „dělicích bodech" existuje nekonečná derivace zprava, ale ne zleva. Obě jednostranné derivace existují současně jen v bodech spočetné množiny lokálních extrémů a pak je vždy jedna rovna $+\infty$ a druhá $-\infty$. Konečná jednostranná derivace neexistuje v žádném bodě intervalu $[0, 1]$. Jarník rovněž vyšetřuje Diniho derivace[24] Bolzanovy funkce.

Rychlík i Jarník o svých pracích navzájem věděli. Jarník již nedokazuje spojitost Bolzanovy funkce a odkazuje čtenáře na Rychlíkův článek, na druhé straně i Rychlík na jednom místě cituje článek Jarníkův (myšlenka jiné cesty k témuž dílčímu výsledku).

K dokreslení představy, proč objevení Bolzanovy funkce v rukopisné pozůstalosti tohoto myslitele způsobilo mezi matematiky takové vzrušení, může posloužit stručný historický přehled v části 3.2.1 (str. 135). Je však třeba zdůraznit, že hlavní význam *Functionenlehre* nespočívá v popsaném příkladu, ale v systematickém výkladu teorie spojitosti a derivace funkcí jedné proměnné.

Bolzanova spisu *Functionenlehre* se týkaly rovněž Rychlíkovy přednášky *O Bolzanově nauce o funkcích* (12. 5. 1927, Brno, Jednota) a *La théorie de fonction de Bolzano* (3. – 10. 9. 1928, Bologna, mezinárodní sjezd matematiků); stejnojmenný článek [R28] byl otištěn ve sborníku ze sjezdu.

V roce 1930 Rychlík tento Bolzanův spis vydal a doplnil pečlivými a obsáhlými poznámkami. ***Functionenlehre*** [R34] vyšla nákladem KČSN jako 1. svazek *Spisů Bernarda Bolzana*. Zajímavá je i předmluva, kterou k ní napsal Karel Petr. Ve stejném roce vyšel také první díl *Ottova slovníku naučného nové doby* obsahující Rychlíkovo doplnění ***Bolzano, Bernard*** [R35] původního Studničkova hesla pojednávajícího o životě a díle B. Bolzana.[25] Ve svém dodatku se Rychlík zmiňuje o spisech matematického obsahu z Bolzanovy rukopisné pozůstalosti o započatém vydávání *Grössenlehre*, především však hovoří o spisu *Functionenlehre.*

Odstavec o Bolzanově *Functionenlehre* zakončeme slovy Vojtěcha Jarníka o tomto díle:

Jest to dílo tak svérázné, že jest vskutku velmi litovati, že nemohlo – zůstavši v rukopise – působiti své doby na další rozvoj matematiky. V době Bolzanově … byla nauka o funkcích již značně rozvinuta, její základní pojmy však postrádaly ostrých obrysů a základní věty nebyly podepřeny přesnými důkazy. A právě v těchto základech nauky o funkcích znamená Bolzanova „Functionenlehre" skutečný mezník – bohužel mezník zarostlý mechem neznámosti.

Ze současníků Bolzanových snad jedině Gauss, Abel a Cauchy projevili obdobný smysl pro řádné vybudování základů nauky o funkcích. Z nich Gauss

[24]Pomocí Diniho derivací (někdy nazývaných derivovaná čísla) lze klasifikovat typ nederivovatelnosti funkce; podrobněji v [BB1], str. 16, základní definice jsou v učebnici V. Jarníka: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1984.

[25]Studnička, F. J., *Bolzano Bernard*, in: *Ottův slovník naučný*, 4. díl, J. Otto, Praha, 1891, 313–316.

a Abel podali sice mistrovské ukázky přesných matematických metod, nezabývali se však oněmi základními otázkami soustavně. Zbývá Cauchy, který ve svých dílech „Cours d'Analyse" (1821), „Résumé des leons sur le Calcul Infinitésimal" (1823), „Leons sur le Calcul différentiel" (1829), postavil základní obory nauky o funkcích (algebraickou analysu, diferenciální a integrální počet) systematicky na pevné základy (nebo řekněme opatrněji: na pevnější základy). Bolzano jde však v této snaze ještě dále než Cauchy. Cauchy se většinou spokojil tím, že vybudoval základy potud, pokud toho k dalším vývodům potřeboval; naopak Bolzano byl duch spíše filosofický, kterého v matematice právě základní otázky nejvíce zajímaly. Uvidíme v dalším, jak ostře vyslovuje Bolzano své definice, jak kriticky pitvá své pojmy, s jakým zájmem a s jakou úplností diskutuje všechny logicky možné případy, bez ohledu na to, mají-li pro konkrétní matematické problémy větší či menší význam.[26] ([29], str. 240–241)

5.2.2 *Zahlenlehre*

Rukopis tohoto Bolzanova spisu je uložen v Národní knihovně ve Vídni jako 8., 9. a 10. svazek (1., 2. a 3. zpracování) VII. oddělení (*Grössenlehre*) Bolzanovy rukopisné pozůstalosti. V ÚA AV ČR se nachází celkem osm složek reprodukcí označených jako *Zahlenlehre I–VIII.*[27] Složky *Zahlenlehre I–IV, VII* a *VIII* obsahují kopie celého třetího zpracování a ukázky prvních dvou verzí. Úvodní část spisu nazvaná *Reine Zahlenlehre* sestává ze sedmi oddílů, z nichž prvních šest (listy 1–77) je soustředěno ve složce *Zahlenlehre I*, sedmý a nejrozsáhlejší, nazvaný *Unendliche Grössenbegriffe*[28] (*Grössenausdrücke*) (listy 78–145), tvoří složku *Zahlenlehre II. Zahlenlehre III, IV* a *VII* obsahují kopie části nazvané *Hauptstück. Besondere Verhältnisse zwischen den Zahlen*, která je tvořena následujícími oddíly: *Potenzen* (*Zahlenlehre III*, listy 146–183), *Verhältniss der Theilbarkeit unter den Zahlen* (*IV*, 184–233), *Verhaeltnisse unter den einfachen Brüchen* (*VII*, 234–243) a *Von den zusammengesetzten Brüchen* (tamtéž, 244–294). Závěrečná část *Zahlenlehre* (bez názvu, listy 295–358) je obsažena ve složce *Zahlenlehre VIII.* V *Zahlenlehre V* jsou uloženy reprodukce čtvrtého zpracování rukopisu *Von der Bestimmung der Zahlen durch Gleichungen*, který se ve vídeňské Národní knihovně nachází ve svazku 11 zařazeném v oddělení VII až za *Zahlenlehre.* Konečně *Zahlenlehre VI* obsahuje kopie částí *Transcendente Functionen* (list 178) a *Von den Reihen* (listy 180–221),

[26] Upozorněme zde na článek Ivora Grattana-Guinnesse *Četl Cauchy Bolzana před napsáním Cours d'Analyse?* [23] z roku 1970, kde autor na základě různých nepřímých indicií ukazuje, že Cauchy, i když se o tom nikde nezmiňuje, byl s největší pravděpodobností velmi dobře obeznámen s Bolzanovou prací [B4] a podstatně z ní čerpal. Podrobněji Grattan-Guinness toto téma rozebírá ve čtvrté kapitole své knihy [24].

[27] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 93, 94, inv. č. 616–623.

[28] Ve druhém zpracování *Unendliche Zahlenbegriffe*, ve třetím je *Zahlen* škrtnuto a nahrazeno slovem *Grössen.*

které tvoří závěr osmého svazku VII. oddělení, tj. závěr prvního zpracování Bolzanovy *Zahlenlehre*; další zpracování již tyto dvě části neobsahují.

Zahlenlehre I–III a *V* jsou opatřeny poznámkami M. Jaška z 22. 10. 1924 (I, II) a 29. 1. 1925 (III, V), ostatní složky opatřil poznámkami datovanými v březnu 1951 Karel Rychlík.

Zahlenlehre IV

Oddíl *Verhältniss der Theilbarkeit unter den Zahlen* vydal Rychlík v roce 1931 pod názvem ***Zahlentheorie*** [R36]. Spis pojednává o elementárních vlastnostech přirozených čísel, kterým Bolzano říká *wirkliche Zahlen* – skutečná čísla,[29] a je rovněž doplněn Rychlíkovými kritickými poznámkami. Rychlík na třech místech upozorňuje na nesprávnost Bolzanových tvrzení, např. na chybné zobecnění pomocné Lagrangeovy věty potřebné pro důkaz tvrzení, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýše čtyř nenulových čtverců. Důkaz tohoto tvrzení i Lagrangeovy věty Rychlík opravuje. Postupuje však velmi citlivě a zachovává hlavní myšlenky Bolzanova důkazu. Najdeme zde i řadu doplňujících poznámek, kde Rychlík například uvádí znění věty obvyklé v „současné“ době, možné zobecnění (např. rovnici $ax + by = d$, kde d je největší společný dělitel čísel a, b, zobecňuje na případ l čísel), popř. zostření věty (Bolzano např. dokazuje: $[a/b] \geq n[a/nb]$, Rychlík uvádí: $[[a/b]/n] = [a/nb]$; symbolem $[a]$ je označena celá část čísla a). Navíc je zde celá řada historických poznámek, např. v souvislosti s Malou Fermatovou větou či Wilsonovou větou.

Spisu *Zahlentheorie* Rychlík věnoval přednášku s názvem *O Bolzanově číselné theorii,* která se konala v Jednotě dne 6. 3. 1930.

Rozhodnutí vydat právě tuto část *Zahlenlehre* bylo zřejmě podstatnou měrou dáno Rychlíkovým zájmem o teorii čísel, speciálně v tomto období o elementární teorii čísel. Povšimněme si, že v roce 1931, kdy byla publikována *Zahlentheorie*, vyšla i Rychlíkova učebnice *Úvod do elementární teorie číselné* [R37] a že v zimním semestru roku 1931/32 měl Rychlík na univerzitě přednášku *Úvod do číselné teorie.*

Zahlenlehre II

Oddíl *Unendliche Grössenbegriffe* měl Rychlík téměř připravený k tisku již v roce 1958.[30] V červnu roku 1960 doporučila Bolzanovská komise předsednictvu I. sekce ČSAV, aby byl vydán mimo Bolzanovy sebrané spisy, a to pod názvem *Bolzano jako průkopník teorie reálných čísel.*[31] Práce nakonec vyšla v roce 1962 jako ***Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse*** [R85]. Přepis vlastního Bolzanova textu je doplněn Rychlí-

[29] V části *Reine Zahlenlehre*, která je diskutována níže, se občas setkáváme s vyjádřením *kladné či záporné skutečné číslo* – srov. pozn. 34. Samotný pojem *skutečné číslo* je však používán ve smyslu kladného celého čísla (nulu Bolzano vyčleňuje zvlášť). Pro přehlednost zde budeme hovořit podle souvislostí o *přirozených*, popř. *celých číslech.*

[30] Podle zápisu ze schůze Bolzanovské komise z 24. 10. 1958; ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 15, inv. č. 38.

[31] Dopis M. Kösslera, předsedy komise, předsednictvu I. sekce ČSAV, tamtéž.

kovou předmluvou, úvodem, závěrečnými poznámkami a stručným přehledem historie reálných čísel a navíc ještě předmluvou Ladislava Riegera.

Proč se rozhodl vydat právě tuto část rozsáhlého díla, vysvětluje Rychlík v předmluvě:

Dosud vydané spisy Bernarda Bolzana obsahují celou řadu vět o reálných číslech. Tak je tomu v jeho prvních pracech z analýzy: „Der binomische Lehrsatz...“ [B3] *a „Rein analytischer Beweis...“* [B4] *a především ve „Functionenlehre“ ...*

V TRZ[32] *se Bolzano pokouší provést aritmetizaci teorie reálných čísel, která byla rozvíjena mnohem později třemi různými způsoby Weierstrassem (1860), Mérayem (1869) a Cantorem (1872) a konečně Dedekindem (1872). Bolzano může být plným právem považován za předchůdce těchto matematiků: myšlenka ryze aritmetického založení reálných čísel se u něj totiž jasně objevuje, ačkoli jeho realizaci nelze považovat za zcela korektní. Potom Bolzano podává rozvoj reálných čísel v takzvané „Cantorovy řady“ a dokazuje další věty z teorie reálných čísel: trichotomii vztahů „větší než“ a „menší než“, Archimedovu větu, větu, že množina reálných čísel je všude hustá, větu Cauchy-Bolzanovu, větu Bolzano-Weierstrassovu a konečně větu, která připomíná větu Dedekindovu. Tyto vývody mohou být bez podstatných změn vylepšeny do dnes požadované přesnosti. Kdyby byl rukopis publikován tak, jak je, skutečně mohl urychlit rozvoj matematiky.* ([R85], str. 5)

Uveďme nejprve základní pojmy Bolzanovy teorie. *Nekonečným číselným výrazem* (*unendlicher Zahlenausdruck*) Bolzano rozumí výraz, v němž je nekonečně mnoho základních číselných operací (sčítátí, odčítání, násobení a dělení) provedených na přirozených číslech.[33] *Měřitelný* (*meßbarer*) *výraz* či *měřitelné číslo* S je výraz, který lze s libovolnou přesností danou zlomkem $1/q$, kde q je celé kladné číslo, „změřit“ pomocí racionálních čísel: pro každé celé kladné číslo q existuje celé číslo p[34] takové, že

$$S = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2, \tag{5.2}$$

kde P_1, P_2 jsou *ryze kladné číselné výrazy* (*rein positive Zahlenausdrücke*), popř. $P_1 = 0$. Zlomek p/q se nazývá *měrným zlomkem* (*messender Bruch*) daného výrazu.

V této podobě se uvedená definice měřitelnosti zdá být postavena „na vodě“, neboť operuje s pojmem *ryze kladného výrazu*, který nebyl nikde definován (i když je možné jej vyrozumět z kontextu). Ve skutečnosti se však jedná o jeden z důsledků neúplného vydání Bolzanova rukopisu; Rychlíkova kniha reprodukuje až sedmý oddíl (listy 78–144) a zůstaly v ní odkazy na předcházející části,

[32]Takto Rychlík zkracuje své označení publikovaného Bolzanova spisu: *Theorie der reellen Zahlen – teorie reálných čísel.*

[33]Bolzano rozlišoval *číselný výraz* (*Zahlenausdruck*) a pojem, který tento výraz vyjadřuje – *pojem čísla* (*Zahlenbegriff*). Pro zjednodušení zde ztotožníme pojem s jeho vyjádřením a budeme hovořit jen o *číselných výrazech.*

[34]U Bolzana je *q skutečné a kladné číslo*, *p* nula nebo *skutečné kladné či záporné číslo* (viz [R85], str. 19).

které byly otištěny až v Bergově edici *Reine Zahlenlehre* [B18] z roku 1976. Zároveň se jedná o jeden z momentů, které vyvolaly živou diskusi o Bolzanově teorii a o jejích interpretacích. Ve čtvrtém oddílu totiž Bolzano definuje *ryze kladný číselný výraz* jako výraz sestavený z celých kladných čísel bez odčítání a každý výraz jemu rovný. Je však třeba dodat, že tato definice byla podána pro racionální čísla a její korektní přenesení na nekonečné číselné výrazy by vyžadovalo bližší objasnění pojmu *rovnosti*, s nímž Bolzano na tomto místě automaticky zachází stejně jako v oboru racionálních čísel.

Nekonečně malé kladné číslo (*unendlich kleine positive Zahl*) S je definováno jako měřitelné číslo, jehož všechny měrné zlomky jsou nulové; $-S$ se nazývá *nekonečně malé záporné číslo.* Měřitelné číslo, které není nekonečně malé, se nazývá *konečné.* Je-li z obou rovností ve vztahu (5.2) splnitelná pouze první, resp. druhá, nazývá se S *kladným*, resp. *záporným nekonečně velkým číslem* (*positive*, resp. *negative unendlich große Zahl*). Měřitelná čísla jsou si *rovna*, dávají-li stejný výsledek co do měření: $A \approx B$,[35] právě když pro každé celé kladné číslo q existuje celé číslo p takové, že

$$A = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2; \qquad B = \frac{p}{q} + P_3 = \frac{p+1}{q} - P_4, \tag{5.3}$$

kde P_1, P_2, P_3 a P_4 jsou ryze kladné číselné výrazy, P_1 a P_3 mohou být i nuly. Bolzano studoval početní operace s měřitelnými čísly a jejich uspořádání, v práci můžeme kromě jiného nalézt, řečeno dnešními slovy, Bolzano-Cauchyovu podmínku pro existenci limity posloupnosti měřitelných čísel, větu o existenci infima a suprema a mnoho dalších zajímavých tvrzení.

V závěrečných poznámkách Rychlík uvádí možnou interpretaci Bolzanovy teorie, kterou označuje jako ne zcela správnou, a to v duchu Cantorovy konstrukce tělesa reálných čísel. Tato interpretace poměrně přirozeně vyplývá z Bolzanovy definice měřitelnosti: Rychlík ukazuje, že s rostoucím q se výrazy P_1 a P_2 ze vztahu (5.2) blíží k nule a posloupnost měrných zlomků p/q konverguje k uvažovanému číslu S; tato úvaha vede ke ztotožnění měřitelného čísla a odpovídající konvergentní posloupnosti racionálních čísel. Odpovídají si tedy tyto pojmy:

v Bolzanově teorii:	v Rychlíkově interpretaci:
nekonečný číselný výraz	*posloupnost racionálních čísel*
měřitelné číslo	*konvergentní posloupnost racionálních čísel*
nekonečně malé číslo	*nulová posloupnost*
rovnost měřitelných čísel	*ekvivalence konvergentních posloupností*

Ladislav Rieger naznačil ve své předmluvě k Rychlíkově knížce [R85] jinou možnou interpretaci Bolzanových nekonečných číselných výrazů, a to ve smyslu rekurzivní analýzy.

Ještě před vydáním uvedeného spisu referoval Rychlík o jeho obsahu a o své interpretaci Bolzanových myšlenek v přednášce v Jednotě nazvané *Teorie re-*

[35] Bolzano psal přímo $A = B$, raději zde však budeme používat znak pro ekvivalenci.

álných čísel z Bolzanovy rukopisné pozůstalosti (25. 11. 1957) a ve čtyřech článcích, které vyšly v letech 1956 – 1961:

> ***Teorie reálných čísel v Bolzanově rukopisné pozůstalosti*** [R51],
> ***Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos hand. Nachlasse*** [R65],
> ***Těorija věščestvěnnych čisel v rukopisnom nasledii Bolzano*** [R66],
> ***La théorie des nombres reéles dans un ouvrage posthume manuscrit de B. Bolzano*** [R84].

Vydání Rychlíkovy knížky [R85] vyvolalo živou diskusi v několika rovinách. Za prvé, otištěný Bolzanův rukopis není úplný. Tuto výtku vyslovili například Jan Berg v předmluvě k *Reine Zahlenlehre*, Jaroslav Folta v recenzi Rychlíkovy publikace [R85],[36] Detlef Laugwitz v článku [45], Bob van Rootselaar v práci [61], Detlef D. Spalt v pojednání [76] a další. Přestože *TRZ* dává smysl mnoha pojmům a tvrzením vyskytujícím se v různých Bolzanových pracích (k výše citovaným můžeme přidat ještě například *Paradoxy nekonečna* [B10]), stále zde zůstaly odkazy na předchozí části; jeden příklad byl uveden výše. Jak již bylo zmíněno, Rychlík zvolil k vydání právě *TRZ* pro její mimořádnou zajímavost – rukopis ukazuje, jak výrazně Bolzano opět předběhl svou dobu; v porovnání s *TRZ* nejsou předcházející části tolik „revoluční“. Názor, že *TRZ* nebyla zvolena náhodně, je podporován tím, že do roku 1958 Rychlík přepsal rukopisy označené Jaškem jako *Zahlenlehre I* a *II* a pracoval na *Zahlenlehre III.*[37] Věci by však rozhodně prospělo, kdyby byla spolu s *Zahlenlehre II* otištěna i *Zahlenlehre I* – zde však mohly sehrát roli omezené finanční možnosti, anebo kdyby byly alespoň na základě znalosti *Zahlenlehre I* doplněny vysvětlující poznámky.

I v publikované části navíc zůstaly jisté mezery. Jak Rychlík sám píše v předmluvě, v edici vynechal některé Bolzanovy poznámky na okrajích a několik stran pro velmi špatnou čitelnost (ačkoli měl velké zkušenosti se čtením Bolzanova obtížně čitelného a navíc zkratkovitého rukopisu). Rovněž Rychlíkovy poznámky byly kritizovány pro neúplnost, neboť vždy neupozorňují na Bolzanovy chyby, zatímco občas podporují Bolzanovu argumentaci.

Druhý aspekt diskuse byl obecného rázu: nesystematické vydávání Bolzanovy pozůstalosti (viz například Foltovu recenzi, zde pozn. 36). To byl nepochybně nejzávažnější problém bolzanovských badatelů již od dvacátých let. Nicméně v tomto případě a z pohledu Karla Rychlíka systematické a kritické vydání celé Bolzanovy matematické rukopisné pozůstalosti přesahuje možnosti jednoho – byť zkušeného – historika matematiky.

Třetí hledisko diskuse je spjato s Rychlíkovou interpretací Bolzanovy teorie. Zde se na chvilku zastavme; diskuse v této rovině je velice poučná a nakonec odhaluje skutečnou hodnotu Bolzanovy často poněkud podceňované teorie.

Bob van Rootselaar podal v roce 1963 do časopisu *Archive for History of Exact Sciences* k otištění svůj článek *Bolzano's Theory of Real Numbers*, v jehož úvodu se můžeme dočíst:

[36] ČPM **89**(1964), 115–116.

[37] Podle zápisu ze schůze Bolzanovské komise konané v říjnu roku 1958; ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 15, inv. č. 38; opisy částí I a III nebyly nalezeny.

Nejprve bych rád zdůraznil, že zcela souhlasím s Rychlíkem, když říká, že Bolzana lze oprávněně považovat za předchůdce Weierstrasse, Méraye, Cantora a Dedekinda, protože myšlenka ryze aritmetického založení systému reálných čísel je z jeho práce zřejmá, i když vypracování teorie není zcela správné … Co se však týče posledního tvrzení, zde se můj názor výrazně odlišuje a tvrdím, že Bolzanovo vypracování je zcela nesprávné. ([61], str. 168)

Van Rootselaar považuje Rychlíkovu interpretaci za příliš širokou a zužuje výklad měřitelného čísla:

Měřitelný číselný výraz S je nekonečná posloupnost racionálních čísel $S = \{s_n\}$, kde pro každé přirozené číslo q existuje celé číslo $p_q(S)$, takže pro všechna n je $s_n = p_q(S)/q + P_{q,1,n} = (p_q(S)+1)/q - P_{q,2,n}$, kde je buď $P_{q,1,n} = 0$ pro všechna n, anebo existuje n_0 takové, že $P_{q,1,n} > 0$ pro $n > n_0$, a existuje n_1 takové, že $P_{q,2,n} > 0$ pro $n > n_1$. ([61], str. 173)

K tomu poznamenává, že definice by mohla být zeslabena tím, že by se požadovalo jen $P_{q,1,n} \geq 0$ pro $n > n_0$. V této interpretaci například Bolzanovo tvrzení, že součet dvou měřitelných čísel je opět měřitelné číslo, selhává. Van Rootselaar podává příklad užitý v jiné souvislosti v Rychlíkově poznámce v [R85] na str. 99:

$$a_n = \frac{1}{n}; \qquad b_{2n-1} = -\frac{1}{2n}, \quad b_{2n} = -\frac{1}{2n-1}; \tag{5.4}$$

posloupnosti $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$ reprezentují nekonečné číselné výrazy

$$A = \frac{1}{1+1+1+\cdots \text{ in inf.}}, \qquad B = \frac{1}{-2+1-3+1-3+\cdots \text{ in inf.}}.$$

Posloupnost $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$, kde

$$c_{2n-1} = \frac{1}{2n(2n-1)}, \qquad c_{2n} = \frac{-1}{2n(2n-1)}$$

není v uvažované interpretaci měřitelné číslo.

Jiný rozpor lze nalézt v tvrzení, že jsou-li A a J měřitelná čísla a J nekonečně malé, pak $A \pm J$ je měřitelné číslo s týmž měrným zlomkem jako A. Stačí totiž uvažovat rozdíl $A - J$, kde

$$A = 1, \qquad J = \frac{1}{1+1+1+\cdots \text{ in inf.}}. \tag{5.5}$$

Tento problém souvisí s Bolzanovou definicí rovnosti měřitelných čísel (viz vztah (5.3)), která neodpovídá zcela představě, která čísla by měla být ztotožněna. Bolzano například poznamenává, že všechna nekonečně malá čísla musí být rovna nule. Můžeme však uvažovat nekonečně malá čísla

$$J_1 = \frac{1}{1+1+1+\cdots \text{in inf.}} \qquad \text{a} \qquad J_2 = -\frac{1}{1+1+1+\cdots \text{in inf.}},$$

jejichž měrné zlomky jsou vždy $0/q$ a $-1/q$; tato čísla jsou podle definice různá, $J_2 \not\approx 0$.

Na základě podrobného rozboru teorie vzniklé jeho interpretací dochází van Rootselaar k závěru:

Naše interpretace nám umožňuje reprezentovat všechny Bolzanovy pojmy a všechny jeho věty. Některé z těchto vět jsou převedeny v nesprávná tvrzení, a to právě taková, že protipříklady k nim mohou být dány v rámci Bolzanovy vlastní teorie. Z této vlastnosti interpretace můžeme usuzovat o její přiměřenosti.

Ty věty Bolzanovy teorie, které jsou interpretací převedeny v nesprávné, jsou jeho nejzajímavější a nepostradatelná tvrzení. Z toho lze usuzovat o hodnotě Bolzanovy teorie.

Rychlík podal upravenou verzi Bolzanovy teorie (viz Cantorovu teorii), která převádí Bolzanovy nesprávné věty ve správné, avšak většinu správných vět Bolzanovy teorie neobjasňuje, konkrétně věty o měrných zlomcích. ([61], str. 179)

Jako reakce na van Rootselaarův článek se ve stejném svazku *Archivu* objevil příspěvek D. Laugwitze [44], jehož cílem je ukázat, že Bolzanovy chyby pocházejí v podstatě z jediné nedostatečné definice, totiž z definice nekonečně malého čísla, která je příliš úzká. Laugwitz ukazuje, že po opatrném poopravení této definice, které je v souladu s ostatními Bolzanovými úvahami, a s využitím Rychlíkovy a van Rootselaarovy interpretace je možné Bolzanovu teorii vystavět bezesporně. K tomu Laugwitz využívá výsledky, které podal spolu s C. Schmiedenem v práci [42], v níž je budována nestandardní analýza.

Stručně řečeno, Laugwitz provádí následující modifikace. Definuje *nekonečně malé číslo* jako takový výraz C, že pro každé přirozené q platí:

$$-\frac{1}{q} < C < \frac{1}{q}, \tag{5.6}$$

tj. v interpretaci pomocí posloupností: odpovídající posloupnost je nulová posloupnost (viz Rychlíkovu interpretaci). Další změnou je modifikace nerovnosti

$$\frac{p}{q} \leq S \ < \frac{p+1}{q}, \tag{5.7}$$

která odpovídá Bolzanovu definičnímu vztahu (5.2) a van Rootselaarově interpretaci měřitelného čísla, následujícím způsobem:

$$\frac{p}{q} < S \ < \frac{p+2}{q} \tag{5.8}$$

(tato změna je nutná v případě, kdy – řečeno pomocí interpretace – odpovídající posloupnost konverguje k racionálnímu číslu; aby byla zaručena jednoznačnost, volí se vždy největší možné p). Konečně Laugwitz pozměňuje definici rovnosti měřitelných čísel: $A \approx B$, právě když $A - B$ je nekonečně malé číslo ve smyslu první modifikace, tj.

$$A \ \approx B, \quad \text{právě když} \quad \forall q \in \mathbb{N}: \quad -\frac{1}{q} < A - B < \frac{1}{q}\,. \tag{5.9}$$

Všechna nesprávná tvrzení se nyní stala pravdivými. Laugwitz také zdůrazňuje pasáž z *Paradoxů nekonečna* [B10] (str. 59–60), která ukazuje, že Bolzano si byl později sám vědom selhání výše zmíněného tvrzení o $A \pm J$.

Přeskočme nyní do roku 1981 a připomeňme přednášku D. R. Kurepy na pražské mezinárodní konferenci o topologii *Toposym V*, která byla otištěna o rok později jako [40]. Kurepova podrobná analýza ukazuje z různých hledisek, jak plodná a nosná je Bolzanova teorie. Práce je zakončena slovy:

Dnes, 24. srpna 1981, kdy si připomínáme dvousté výročí narození Bernarda Bolzana v jeho rodném městě Praze, můžeme upřímně říci, že Bolzanův příspěvek týkající se přístupu k reálným číslům byl nesmírně plodný a že standardní matematika, nestandardní matematika, konstruktivní matematika a aplikace jsou pevně založené, do velké míry v duchu předpovězeném Bolzanem; Bolznova kritická mysl by jistě s takovými výsledky souhlasila.

([40], str. 664–665)

Příspěvek [40] je bezprostředně následován Laugwitzovým článkem [45] obsahujícím několik doplnění ke Kurepově přednášce. Zatímco Kurepa vychází z Rychlíkovy publikace [R85], Laugwitz cituje nové Bergovo vydání [B18] z roku 1976, z něhož ke svému velkému překvapení zjistil, že Bolzano sám objevil zmíněné potíže a svým zkratkovitým rukopisem doplnil patřičné změny, které však zůstaly na Rychlíkem nereprodukovaných stranách. Jedna změna se týká definice rovnosti měřitelných čísel a v podstatě se shoduje s Laugwitzovou modifikací (5.9). Berg rozluštil příslušný Bolzanův text takto:

A a B se zde nazývají navzájem rovnými v tom smyslu, že oba mají tu vlastnost, že jejich rozdíl … absolutně uvažovaný[38] *dává při měření stejný výsledek jako nula*[39] [tj. $|A - B|$ je infinitesimální].

Poslední dva listy rukopisu, psané vlastní rukou Bernarda Bolzana, se Rychlíkovi rovněž nepodařilo přesně rozluštit a v jeho publikaci proto chybí. Na prvním z nich je poznámka, v níž Bolzano pokládá otázku, zda by se nauka o měřitelných číslech nezjednodušila tím, že by se v definici měřitelného čísla nahradila podmínka (5.2) podmínkou

$$A = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+n}{q} - P_2, \tag{5.10}$$

kde n, q mohou růst libovolně do nekonečna.[40] Protože P_1 a P_2 představují kladné číselné výrazy, může být vztah (5.10) přepsán pomocí nerovností:

$$\frac{p}{q} < A < \frac{p+n}{q}. \tag{5.11}$$

Jak Laugwitz ukázal v práci [44], $n = 1$ postačuje v jeho interpretaci v případě, že limita posloupnosti odpovídající číslu A je iracionální, pro racionální limitu

[38] K tomuto pojmu se vrátíme na str. 188.

[39] [B18], str. 130; v Bolzanově rukopise přední strana listu 106, kterou Rychlík označil jako špatně čitelnou s poznámkou, že se zdá, že je bez přímé souvislosti s textem.

[40] V Bolzanově rukopisu je místo P_1 a P_2 vždy jen P. Zřejmě se jedná o nedopatření, nikde se nepožaduje, aby byla obě čísla shodná.

je třeba a postačí $n = 2$.[41]

Zatím proti sobě byly stavěny různé moderní interpretace Bolzanovy teorie. Van Rootselaarova interpretace vede k rozporům, což ovšem ještě neznamená, že původní teorie je sporná, Laugwitzova interpretace vede ke konzistentní teorii. Zůstává však otázka, jak je to doopravdy s konzistentností vlastní Bolzanovy teorie.

O zodpovězení této otázky se pokusil Detlef D. Spalt nejprve ve svém příspěvku na konferenci konané ve dnech 2. – 4. června 1986 na Ruhr-Universität v Bochum, který byl otištěn v konferenčním sborníku [74] v roce 1990, později s jistými vylepšeními ve svém článku *Bolzanos Lehre von meßbaren Zahlen* [76], který vyšel v roce 1991 v *Archivu.*[42] V práci [76] Spalt velice podrobně, krok za krokem, rozebírá Bolzanovu teorii a ukazuje, že provedou-li se v rámci původní teorie a Bolzanových možností dvě drobné úpravy, vznikne skutečně konzistentní teorie. Jedna úprava se týká ne zcela jasného pojmu rovnosti v definici ryze kladného výrazu. Aby byly v pořádku úpravy typu

$$\frac{1}{q} - \frac{b}{1+1+1+\cdots \text{in inf.}} = \frac{(1+1+1+\cdots \text{in inf.}) - qb}{q(1+1+1+\cdots \text{in inf.}}, \tag{5.12}$$

které jsou pro Bolzana v této souvislosti klíčové,[43] je třeba, aby pro tuto relaci platila obdoba vztahu platného pro přirozená čísla:

Pravidlo: Rovnost

$$\pm\frac{A}{B} \pm C = \frac{\pm A \ \pm BC}{B} \tag{5.13}$$

platí i tehdy, když B je nekonečný číselný výraz.[44]

Spolu s tímto „pravidlem“ Spalt přidává větu, která tvrdí, že výraz na pravé straně vztahu (5.12) je pro skutečná čísla q, b ryze kladný číselný výraz.

Druhá úprava souvisí s výše diskutovaným Bolzanovým tvrzením, že součet dvou měřitelných čísel A a B je opět měřitelné číslo. Spalt ukazuje, že Bolzanův důkaz není úplný; navíc podává protipříklad, který obdržíme, přijmeme-li pravidlo (5.13): Uvažujme výrazy

$$A = 2+1+2+1+2+\cdots \text{in inf.}, \qquad B = 1+2+1+2+1+\cdots \text{in inf.};$$

$-1/A$, $1/B$ jsou zřejmě měřitelná čísla, jejich součet

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{A} = \frac{A-B}{A \cdot B}$$

[41]Viz [45], str. 669–670.

[42]Jak autor uvádí, článek využívá výsledky Hannse Petera Beckera podané v jeho nepublikované diplomové práci *Dr. B. Bolzanos meßbare Zahlen* z roku 1988.

[43]Ze vztahu (5.12) například Bolzano vyvozuje, že výraz na levé straně je ryze kladný, neboť odečte-li se na pravé straně od součtu nekonečně mnoha jednotek pouze konečný počet qb jednotek, zbude opět součet nekonečně mnoha jednotek.

[44][76], str. 28.

však nikoli. Rozdíl $A - B$ totiž představuje nekonečný číselný výraz $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$ in inf., který Bolzano sám na jednom místě uvádí jako příklad výrazu, *jehož číslo není ani nekonečně malé ani nekonečně velké.*[45]

Aby větu opravil, přidává do ní Spalt předpoklad, že sčítaná měřitelná čísla A, B jsou *jednotně zakořeněná (s kořenem N)* (*einheitlich verwurzelt (mit der Wurzel N)*), což definuje tak, že jsou obě vytvořena *zřejmým způsobem z určitého nekonečného číselného výrazu N (N je nekonečně velký) a skutečných čísel pomocí konečně mnoha operací – když oba vznikají z N.*[46]

Spalt se také pozastavuje u Bolzanovy poznámky, na kterou upozornil již Laugwitz, kde čísla A, B jsou považována za rovná, je-li jejich rozdíl *absolutně uvažovaný* nekonečně malé kladné číslo. Pojem *absolutně uvažovaný* není v Bolzanově rukopise přímo zaveden; Spalt dochází ve shodě s Bolzanovou koncepcí k tomu, že rozdíl $A - B$ *absolutně uvažovaný* znamená $A - B$, jsou-li všechny měrné zlomky tohoto čísla nezáporné, jinak je roven $B - A$. Rovnost měřitelných čísel pak formuluje takto: $A \approx B$, *právě když jsou buď všechna $p_{A-B} = 0$, nebo jsou všechna $p_{B-A} = 0$.*[47]

U druhé Bolzanovy poznámky citované Laugwitzem, která se týká vztahu (5.10), Spalt ukazuje, že zatímco v moderní interpretaci získala teorie nahrazením podmínky (5.7) podmínkou (5.8) zcela jinou, uspokojivou podobu, v pohledu „zevnitř“, tj. ve vlastní Bolzanově teorii, dojde sice ke zjednodušení, nikoli však k zásadní změně.

Spalt tedy dochází k závěru, že Bolzanova teorie měřitelných čísel je až na uvedené dvě výjimky vypracovaná s dostatečnou přesností a úplností a že její do té doby vykreslovaný obraz (nepřesné pojmy, neúplné důkazy, mnoho nepravdivých vět) je z pohledu zevnitř naprosto neadekvátní.

S odstupem času sice můžeme vyslovit politování nad neúplností Rychlíkova vydání *Reine Zahlenlehre*, ať už se jedná o Bolzanovy poznámky či o první část rukopisu, zároveň bychom však měli mít na paměti, že Rychlík zpřístupnil Bolzanovu teorii „reálných čísel“ o čtrnáct let dříve než úplnější Bergova edice a podnícením plodné diskuse stimuloval značný zájem o Bolzanovy rukopisy, a to nejen v oblasti teorie čísel.

5.2.3 Další rukopisy

Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper

Originál spisu je uložen v Národní knihovně ve Vídni v VI. oddělení (*Zu vier problemen der Geometrie und Anti-Euklid*), které se skládá z 5 svazků. Uvažovaný spis je třetí částí 3. svazku nazvaného *Zu den Problemen der Rectification,*

[45][R85], str. 31; [B18], str. 115.

[46][76], str. 41. Spalt uvádí několik ilustračních příkladů; v jednom z nich například uvažuje čísla $B = 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots$ in inf. $= N$, $A = 0 + 2 + 1 + 2 + \cdots$ in inf. $= N - 1$ a ukazuje, že $A - B = (N - 1) - N = -1 < 0$, tedy také $1/B - 1/A$ je měřitelné a < 0.

[47][76], str. 48.

der Complanation und der Cubierung.[48] Přepis spisu pořízený R. Zimmermannem je uložen v Literárním archivu v Praze,[49] fotografické kopie originálu pořízené M. Jaškem jsou v ÚA AV ČR.[50] Rychlík přepsal Zimmermannovu verzi, kterou ovšem porovnával s originálem; 41 stran strojopisu odevzdal v červnu 1951, práce však zůstala jen v ÚA AV ČR ČR,[51] bezprostředně se jí nedotýká žádná Rychlíkova publikace. (Na návrh akademika J. Nováka, vědeckého sekretáře matematicko-fyzikální sekce ČSAV, mu za tuto práci byla roku 1955 udělena odměna 1500 Kč.)

Von der mathematischen Lehrart

Jedná se o druhý díl rukopisu nazvaného *Einleitende Teile*, který je uložen v Národní knihovně ve Vídni jako 4., 5. a 6. svazek VII. oddělení (1., 2. a 3. zpracování). První díl nese název *Von dem Begriffe der Mathematik und ihren Teilen,* třetí díl má nadpis *Vorkenntnisse.* Fotografické kopie druhého dílu jsou v ÚA AV ČR v Praze;[52] jsou doplněné poznámkami M. Jaška z 3. 10. 1924. Z těchto poznámek vyplývá, že Jašek opatřil kopie celého třetího zpracování všech tří dílů, psaného písařem a Bolzanem doplňovaného a opravovaného (řada stránek je napsána vlastní rukou Bolzanovou), a ukázky z prvního a druhého zpracování. V uspořádané části Jaškových fotografických kopií v ÚA AV ČR je však pouze zmíněný druhý díl a po třech ukázkách z prvního a druhého zpracování.

Třetí zpracování tohoto druhého dílu přepsal roku 1951 Ferdinand Pelikán,[53] Karel Rychlík Pelikánův přepis v červnu téhož roku kolacionoval a v roce 1958 jej dokonce začal chystat k tisku.[54] Podle zápisu ze schůze Bolzanovské komise z října 1958[55] Rychlík pořídil opis i prvního a třetího dílu spisu – je možné, že Jaškovy kopie jsou v posledním neuspořádaném kartonu, nebo se ztratily, anebo se zapisovatel spletl.

Spisu *Von der mathematischen Lehrart* se týkají dva Rychlíkovy články z roku 1958:

Úvahy z logiky v Bolzanově rukopisné pozůstalosti [R67],

Betrachtungen aus der Logik im Bolzanos hand. Nachlasse [R68].

Obsahem se oba články kryjí. Kromě úvodních poznámek je v nich podán obsah Bolzanova spisu a uvedena ukázka (§8. *Vztahy mezi větami založené*

[48] Čtvrtý svazek VI. oddělení, nazvaný *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien, sowohl als Flächen samt einigen verwandten Begriffen*, vyšel tiskem v roce 1948 jako 5. svazek *Spisů Bernarda Bolzana* s názvem *Geometrische Arbeiten* [B15]; vydal J. Vojtěch. Pátou část VI. oddělení vydal v roce 1967 K. Večerka pod názvem *Anti-Euklid* [B16].

[49] Literární archiv PNP, P4a, kart. Y, 2811, 7 sešitů, 3 většího, 4 menšího formátu.

[50] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 92, inv. č. 613.

[51] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 91, inv. č. 609.

[52] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 92, inv. č. 615.

[53] 60 stran; strojopis je uložen v ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 91, inv. č. 610.

[54] ÚA AV ČR, fond I. sekce ČSAV 1952 – 1961, kart. 15, inv. č. 38.

[55] Tamtéž.

na předpokladu proměnnosti jistých částí; v českém článku se jedná o volný Rychlíkův překlad).

Bolzano svůj spis koncipoval jako druhou část úvodu k dílu *Grössenlehre*; Rychlík ho v úvodu svého článku [R67] charakterizuje takto:

> *Tento spis se zabývá hlavně otázkami z logiky, a to zejména se zřetelem na potřeby matematiky. Většina těchto otázek je již probrána v Bolzanově díle „Wissenschaftslehre“. Ve spise ML jsou však tyto otázky znovu a snad ještě lépe formulovány...* ([R67], str. 230)

Znalost Bolzanova spisu *Von der mathematischen Lehrart* Rychlík uplatnil také ve své recenzi Kambartelova vydání vybraných paragrafů *Vědosloví* (viz 7.2, recenze č. 32).

Zur Mathematik

Rukopis je uložen v Národní knihovně ve Vídni jako první svazek VII. oddělení (*Grössenlehre*), jeho fotografické kopie pořízené M. Jaškem jsou opět v ÚA AV ČR v Praze.[56] Kopie jsou rozděleny do šesti složek nadepsaných Rychlíkovou rukou, což svědčí o tom, že je přinejmenším prohlédl a uspořádal. Chybí však jakékoli datované poznámky, takže nelze říci, kdy se Rychlík spisem zabýval. Nejsou zde ani poznámky M. Jaška.

Zeit- und Raumlehre

Tento rukopis tvoří poslední, 14. svazek VII. oddělení Bolzanovy pozůstalosti ve vídeňské Národní knihovně, jeho fotografické kopie jsou v ÚA AV ČR v Praze.[57] I tyto kopie jsou rozděleny do dílčích složek nadepsaných rukou Karla Rychlíka, navíc jsou zde Rychlíkovy poznámky z března roku 1951. Na většině kopií jsou doplněna čísla řádků (po pěti) – opět rukou Karla Rychlíka. O tom, že Rychlík tento rukopis podrobně studoval, svědčí i značná opotřebovanost zejména poslední, čtvrté složky s nadpisem *Raumwissenschaft.* Studium však nevyústilo v žádnou publikaci.

5.2.4 Bolzano a Cauchy

V roce 1962 vyšel v časopise *Revue d'histoire des sciences* Rychlíkův článek ***Sur les contacts personnels de Cauchy et de Bolzano*** [R86]. Rychlík se zde po krátkém úvodu o životě Bernarda Bolzana zabývá otázkou jeho osobního setkání s francouzským matematikem A. L. Cauchym, který pobýval v Čechách v letech 1833–36 (blíže viz 6.1.4, str. 208); Bolzano v té době bydlel trvale u manželů Hoffmannových v Těchobuzi. Rychlík nejprve upozorňuje na článek *Cauchy and Bolzano in Prague* [77], který uveřejnili manželé Ruth (roz.

[56] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 92, inv. č. 614.
[57] ÚA AV ČR, fond KČSN, kart. 95, inv. č. 625.

Rammlerová, původem z Prahy) a Dirk J. Struikovi v *Isis* roku 1928. Struikovi docházejí k závěru, že je toto setkání nepravděpodobné. Následující citát ilustruje jejich hlavní argument.

Je také vysoce nepravděpodobné, že by Cauchy, nucen svým postavením k mimořádné opatrnosti, aby nepopudil rakouské císařské a královské autority, vyhledával osobní styk s tak kompromitovaným mužem, jakým byl Bolzano.

Kromě toho Cauchy dokončil již mnohem dříve, stejně jako Bolzano, své práce věnované exaktnímu založení teorie reálných funkcí … Bolzano po roce 1817 nepublikoval nic z čisté matematiky a kolem roku 1835 se pravděpodobně zabýval filosofickými otázkami týkajícími se teologie či snad axiomatickými problémy v mechanice …

V Cauchyho pracích neexistuje, podle našeho názoru, žádný odkaz na Bolzana, ačkoli ten zavedl téměř stejný pojem spojitosti a publikoval jej dříve než Cauchy … ([77], str. 365–366)

Nemusíme dodávat, že v uvažovaném období se Bolzano naopak zabýval matematikou velmi intenzivně.[58] V souvislosti s Bolzanovým vlivem na Cauchyho práce o matematické analýze zde ještě jednou připomeňme článek Ivora Grattana-Guinnesse [23] (viz pozn. 26).

Rychlík také zmiňuje Funkovu recenzi[59] Winterovy knihy *Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzanos an F. Příhonský* [88]. Paul Funk zde obzvláště zdůrazňuje pasáž z Bolzanova dopisu Příhonskému, datovaného 24. 4. 1833 v Těchobuzi, která ukazuje, jak moc si Bolzano vážil Cauchyho a jak si přál osobně se s ním setkat:

Zpráva o přítomnosti Cauchyho v Praze mne velmi zajímá. Vážím si ho nejvíce ze všech žijících matematiků a cítím se s ním nejvíce spřízněn; jeho vynalézavému duchu děkuji za několik a to nejdůležitějších důkazů. Vyřiďte mu, prosím, můj pozdrav a oznamte mu, že bych byl nyní ihned odejel do Prahy, abych se s ním osobně seznámil, kdybych nemohl s jistotou doufat (vzhledem k tomu, co jste mi řekl o jeho postavení), že ho ještě uvidím koncem září, kdy Vás budu doprovázet.[60]

Z toho samozřejmě ještě nelze vyvodit, že se setkali. Rychlík však dále píše, že jej nedávno Irena Seidlerová upozornila na existenci zajímavého dokumentu, dopisu z 18. 12. 1843, který Bolzano poslal do Vídně svému žáku J. M. Feslovi a který je spolu s ostatní Bolzanovou korespondencí s Feslem uložen v Literárním archivu PNP v Praze; I. Seidlerová o tomto dopise píše v článcích [66] a [67] z roku 1962. Seidlerová, Rychlík i Winter, který tehdy pracoval na vydání této korespondence (viz [89]), se shodují v tom, že z dopisu jednoznačně vyplývá, že se Bolzano s Cauchym skutečně osobně setkal. Bolzano totiž píše:

---

[58] Poznamenejme ještě, že například 20. července 1833 napsal Bolzano ve svém dopise Františku Příhonskému: *Ostatně se zabývám s největším úsilím matematikou, jakoby dukáty, jimiž by mi měl být každý arch zaplacen, již ležely na stole …* (český překlad citován podle Rychlíkovy recenze Winterovy knihy [88] (viz 7.2, recenze č. 12), str. 481).

[59] Monatshefte für Mathematik **61**(1957), str. 251.

[60] Český překlad citován podle Rychlíkovy recenze uvažované Winterovy knihy [88] (viz 7.2, recenze č. 12), str. 481.

Matematik Cauchy – jak by Vám snad mohlo být známo – byl v letech 1834 a 1835 s doprovodem Karla X. a Jindřicha V. v Praze, kde jsme se během těch několika málo dní, které jsem tehdy (o velikonocích a na podzim) v Praze trávil, několikrát setkali . . .[61]

5.2.5 Bolzanův pobyt v Liběchově

Poslední článek, který Rychlík věnoval Bernardu Bolzanovi a o němž jsme zde ještě nehovořili, vyšel v roce 1959 v populárně zaměřeném časopise *Matematika ve škole* a nese název ***Bolzanův pobyt v Liběchově*** [R73]. Článek byl motivován Winterovou knihou *Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzanos an F. Příhonský (1824–1848)*, jejíž recenzi obsahující české překlady částí Bolzanových dopisů Příhonskému, které jsou zajímavé z hlediska matematiky, Rychlík uveřejnil v roce 1958 v ČPM (viz 7.2, recenze č. 12).

Konkrétně se jedná o Bolzanův spis *Paradoxy nekonečna* [B10], který vydal Příhonský v roce 1851, tři roky po Bolzanově smrti. V předmluvě k tomuto vydání Příhonský píše:

Znamenité pojednání o Paradoxech nekonečna začal jeho autor psát již v roce 1847 za venkovského pobytu ve společnosti vydavatelově, v půvabné vile v Liběchově u Mělníka, avšak dokončil je, přerušen jinými pracemi, teprve v letních měsících následujícího roku, posledního roku svého života.[62]

Rychlík upozorňuje na dopis ze dne 3. 2. 1845, který je obsažen ve Winterově knize [88] pod číslem 135 a který nasvědčuje tomu, že Bolzano pomýšlel na sepsání podobného díla již dříve. Bolzano zde píše Příhonskému:

Jiné pojednání, které . . . píši, mohlo by mít název: „O různých paradoxiích vyskytujících se v matematických vědách“. Snažím se tak po částech sdělit, co by mohlo čtenáře jednou, dá-li Pán Bůh, povzbudit k větší zvědavosti číst rozsáhlejší opus posthumum a jeho spisovateli by mohlo být nápomocno sestavit toto dílo z látky, která by byla po ruce . . .[63] ([R73], str. 111)

V dopise ze dne 10. 3. 1848 Bolzano plánuje, že by mohli s Příhonským opět trávit společně letní měsíce, a vzpomíná na minulé léto v Liběchově:

Vy jste jediný z mých přátel, který se zcela bez obalu vyjadřuje, má zároveň dosti vědomostí a zajímá se o vše, čím já se zabývám, takže můžeme proniknout až do nitra věcí. Byl jsem loňského roku tak šťasten, že jsem se mohl plné tři měsíce těšit dobrodiní, kterého jsem postrádal od svého sesazení, ujasňovat si totiž a opravovat si své myšlenky sdělováním a námitkami: kéž by mi toho bylo opět letos popřáno . . . ([R73], str. 112)

[61] Český překlad citován podle článku I. Seidlerové [67], str. 30.

[62] Citováno podle českého překladu spisu [B10], str. 10.

[63] Tento i následující úryvek je citován i ve zmíněné Rychlíkově recenzi č. 12 na str. 485 a 486.

Rychlíkův článek [R73] představuje jeden z mnoha drobných detailů, které svědčí o velké šíři jeho zájmů a rozhledu. Ve 38. díle *Sebraných spisů Aloise Jiráska* objevil paměti Františka Emanuela Velce (1816–1890), tajemníka majitele Liběchovského panství Antonína Veitha.[64] Z Velcových pamětí Rychlík uvádí několik zajímavých odstavců ilustrujících Bolzanův liběchovský pobyt. Uveďme zde alespoň část tohoto líčení.

... když byl Klácel zbaven profesury (r. 1844),[65] *byl přijat Veithem na liběchovském zámku, kde se zabýval pořádáním knihovny. V létě tam někdy současně přebývali pánové Palacký, prof. Bolzano, muž svatých mravů, ctností a vědomostí hlubokých, ale od kněží snad právě proto z profesury vypuzený, jeho někdejší spolužák (!?) a nerozlučný přítel, biskup (!?) Příhonský. Starostlivost téměř úzkostlivá tohoto šlechetného muže o svého staršího, těžce zkoušeného a churavého přítele (Bolzana), v níž se tolik vřelého citu a věrné oddanosti jevilo, mne často až k slzám pohnula. Pak Schwanthaler (býval v Liběchově), znamenitý sochař, a Geil, výtečný architektonický malíř, oba dva z Mnichova, malířové Lhota a Navrátil z Prahy, vysoce vzdělaný hodinář pražský Kosejk, prof. Meier z vídeňské techniky, též z profesury vytisknutý, tuším pro náhledy materialismem zapáchající. Jací to dnové milí a večery utěšené.*

Ráno se čtlo, studovalo a pracovalo pilně. Obědvalo se o dvou hodinách a ráno bylo tudíž dosti dlouhé, že se dalo něco vyříditi. Při obědě panovaly vtipné nápady a žertovné anekdoty. Klácel míval svou humorní prelekcí, která vždy celou společnost rozesmála. Že paní na zámku nebylo, nebyl ovšem hovor předměty jistými omezený. Byl formou vybraný a uhlazený, ale co se materie týkalo, zcela volný. Někdy se ovšem páni profesorové zahloubali do hlubokých spekulací; tu pak začali malíři zívat a panstvo se bralo od stolu.

Po obědě vyšlo nebo vyjelo se na procházku do bližšího nebo vzdálenějšího okolí. Já býval společníkem Bolzanovým, který pro svou churavost nikdy daleko od zámku se neodvážil, nýbrž toliko v zámecké zahradě se procházel. Jaké to nezapomenutelné rozprávky s tímto vpravdě velebným mužem.

([R73], str. 112–113)

Jak Rychlík poznamenává v recenzi Zichova českého vydání *Paradoxů nekonečna* [B10],[66] Velcovy paměti vyvracejí to, co píše v předmluvě k českému překladu Arnošt Kolman: ... *v Liběchově u Mělníka, vyštvaný do samoty a chřadnoucí smrtelnou chorobou, Bolzano sepsal své „Paradoxy“ ...*[67]

[64] Velc, F. E., *Kniha vděčných upomínek*, vydal A. Jirásek pod názvem *Z pamětí samotářových*, in: *Rozmanitá prosa, Obrázky a studie III* (*Sebrané spisy Aloise Jiráska* 38), J. Otto, Praha, 1930 (5. vydání), str. 55–210.

[65] V závorkách jsou poznámky doplněné Karlem Rychlíkem.

[66] Viz 7.2, recenze č. 31.

[67] [B10] (český překlad z roku 1963), str. 6.

5.2.6 Recenze

Pro úplnost zde ještě upozorněme na šest Rychlíkových recenzí (v seznamu č. 12, 30, 31, 32, 33 a 35) věnovaných publikacím s bolzanovskou tematikou. Již jsme zde zmiňovali recenzi Winterovy knihy *Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzanos an F. Příhonský (1824–1848)* [88], která kromě celkového hodnocení publikace obsahuje překlady částí některých Bolzanových dopisů Příhonskému (Rychlík zvolil dopisy, které souvisejí s Bolzanovými matematickými pracemi) a recenzi Zichova překladu Bolzanových *Paradoxů nekonečna* [B10].

Tyto i všechny zbývající recenze svědčí o tom, že jejich autor měl v dané oblasti velké zkušenosti, hluboké znalosti a široký rozhled. Rychlík se nespokojil s pouhým popisem obsahu publikace, ale přidal poznámky vycházející často z výsledků vlastní práce, znalosti nejrůznějších literárních pramenů či osobních vztahů s autory recenzovaných knih.

Obr. 5.3 Bernard Bolzano

5.3 ZÁVĚR

V hrubých rysech jsme v této kapitole popsali výsledky Rychlíkova bolzanovského bádání. Viděli jsme, že již v době první republiky se Rychlík kromě své činnosti pedagogické a vědecké na poli moderní matematiky zabýval původními pracemi Bernarda Bolzana. Po válce, kdy jeho pedagogická činnost byla z politických důvodů omezena, se plně věnoval nelehkému úkolu odkrývání Bolzanova odkazu. Svou prací zpřístupnil mnohé z podstatných věcí ukrytých v Bolzanových těžko čitelných rukopisech a přispěl k Bolzanově slávě v matematické obci.

Díky svému úsilí se Rychlík stal známým prakticky všem bolzanovským badatelům a podstatné části historiků matematiky. Co do počtu citací je tato oblast Rychlíkova zájmu výrazně v popředí. V souvislosti s vydáním Bolzanových spisů je Rychlíkovo jméno uváděno téměř všude tam, kde jsou zmiňovány tyto spisy. Ve spojení s *Functionenlehre* [R34] je Rychlík citován například v Zichových poznámkách k českému vydání *Paradoxů nekonečna* [B10], ve *Velké sovětské encyklopedii*,[68] v *Ottově slovníku naučném nové doby* (viz [R35]), v pracích J. Berga [2], J. Folty [18], V. Jarníka ([29], [30]), M. Klineho [Kli1],[69] A. Kolmana [37], L. Nového [51], S. Russe [62], J. Šebestíka [78], E. Wintera [86] aj., z toho v [BB3], [2], [18], [37], [78] a [86] je citován i jako vydavatel *Zahlentheorie* [R36]. Zvlášť uvádíme stuttgartskou edici [B17], kde jsou citovány všechny Rychlíkovy práce věnované Bernardu Bolzanovi včetně recenzí č. 12 a 30 (viz 7.2) a pojednání [R82], a úvod J. Folty a L. Nového k publikaci [BB3], kde jsou citovány Rychlíkovy práce [R19], [R28], [R34], [R36], [R67], [R68], [R84]–[R86].

Rychlíkův článek *Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse* [R19] z roku 1922, v němž je dokázána spojitost a nediferencovatelnost Bolzanovy funkce, citují například J. Berg [2], V. F. Bržečka [9], Z. Crkalová [11], V. Jarník ([28], [29]), G. Kowalewski [38], A. Kolman [37], I. I. Ramsamujth [60], J. Šebestík [78], F. Veselý [81] a další. Druhý Rychlíkův článek věnovaný Bolzanově teorii funkcí, *La Théorie des Fonctions de Bolzano* [R28], uvádí např. J. Berg [2] a J. Folta [20].

[68] *Boľšaja sovetskaja enciklopedija*, sv. 5, 2. vyd., Gosudarstvennoje naučnoje izdateľstvo "Boľšaja sovetskaja enciklopedija", 1950, str. 501 [hlavní redaktor V. I. Vavilov].

[69] Viz literaturu uvedenou na str. 115–121; Kline zmiňuje i Rychlíkův článek [R19], avšak bez přesné citace.

V bolzanovské literatuře je velmi často uváděna i Rychlíkova knížka [R85] obsahující část Bolzanovy *Reine Zahlenlehre*. V kap. 5.2.2 jsme se poměrně podrobně zabývali diskusí vyvolanou tímto vydáním; zde jen připomeňme, že publikaci [R85] citují mj. Z. Crkalová [11], I. Grattan-Guinness [23], J. Folta ([16], [18], [20]), D. Kurepa [40], D. Laugwitz ([44], [45]), G. H. Moore [48], B. van Rootselaar [61], Š. Schwabik [71], D. D. Spalt ([76], [75]), J. Šebestík [78], J. Dieudonné [Die1][70] a další. Jan Berg vychází v publikaci *Bolzano's Logic* [2] z roku 1962 při popisu Bolzanovy teorie „reálných čísel" z Rychlíkových článků [R51], [R65], [R66] a [R84], článek [R84] cituje například také J. Šebestík [78] či J. Folta [20] (spolu s [R66]).

Jistou pozornost vyvolaly také Rychlíkovy články o Bolzanově logice ([R67] a [R68]), které cituje např. J. Berg [2], J. Folta [20], V. Jarník [31] (uvádí německou verzi [R68]) či L. Nový [51] (uvádí českou verzi [R67]).

Rychlíkova práce [R86] týkající se osobních styků B. Bolzana a A. L. Cauchyho je uvedena např. Maritzově článku [47] či v Šebestíkově knize [78]; poslední diskutovaný Rychlíkův článek, *Bolzanův pobyt v Liběchově* [R73], cituje např. J. Berg [2].

Dodejme, že v Bolzanovské literatuře je citováno také Rychlíkovo pojednání *Preisaufgabe der Königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag für das Jahr 1834* [R82], které je diskutováno v následující kapitole; vedle [B17] jej uvádějí mj. Jiří Beran [1], Jan Berg [2], J. Folta [14] a L. Nový [53].

Dne 21. října 1968 byla Karlu Rychlíkovi udělena in memoriam odměna ČSAV *za práci v oboru historie matematiky, zejména za vědecké zpracování pozůstalosti B. Bolzana*; podrobněji je o této poctě pojednáno v závěru následující kapitoly (část 6.3, str. 237).

[70]Viz literaturu na str. 115–121.

Literatura

Spisy Bernarda Bolzana citované v článku

[B1] Bolzano, B., *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementar-Geometrie*, Praha, 1804; rovněž v [BB3].

[B2] Bolzano, B., *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung*, Praha, 1810; rovněž v [BB3].

[B3] Bolzano, B., *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen*, Praha, 1816; rovněž v [BB3].

[B4] Bolzano, B., *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Praha, 1817; rovněž v [BB3]; český překlad: *Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden reálný kořen rovnice*, ČPMF **11**(1881–82), 1–38 [přeložil F. J. Studnička]; rovněž samostatně na náklady překladatele, Praha, 1881.

[B5] Bolzano, B., *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt*, Leipzig, 1817; rovněž v [BB3].

[B6] Bolzano, B., *O logice*, Krok [německý rukopis *Über die Logik* přeložil F. Šír] **2**(1831); přetisk: Památník národního písemnictví, Praha, 1981.

[B7] Bolzano, B., *Lebenschreibung des Dr. B. Bolzano*, Sulzbach, 1836 [vydal J. M. Fesl]; Wien, 1875; české překlady: *Autobiografie*, Praha, 1913 [přeložil V. Stoklasa]; *Vlastní životopis*, Odeon, Praha, 1981 [přeložila a opatřila vysvětlujícími pozámkami, poznámkou vydavatele a závěrečnou studií M. Pavlíková].

[B8] Bolzano, B., *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter*, Sulzbach, 1837; výbor v češtině: *Vědosloví*, Academia, Praha, 1981 [vydal K. Berka].

[B9] Bolzano, B., *Versuch einer Objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes*, Praha, 1843 [napsáno kolem 1815].

[B10] Bolzano, B., *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig, 1851 [vydal Fr. Příhonský]; český překlad: *Paradoxy nekonečna*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963 [přeložil a opatřil poznámkami O. Zich, předmluvu napsal A. Kolman].

[B11] Bolzano, B., *Functionenlehre*, edice *Spisy Bernarda Bolzana*, sv. 1, KČSN, Praha, 1930 [vydal a opatřil poznámkami Rychlík, předmluvu napsal K. Petr]; viz [R34]; znovu vyšlo v edici [B17], 2A10/1, 2000.

[B12] Bolzano, B., *Zahlentheorie*, tamtéž, sv. 2, KČSN, Praha, 1931 [vydal a opatřil poznámkami K. Rychlík]; viz [R36].

[B13] Bolzano, B., *Von dem besten Staate*, tamtéž, sv. 3, KČSN, Praha, 1932 [vydal a opatřil úvodní úvahou A. Kowalewski]; české překlady: *O nejlepším státě*, Praha, 1934 [přeložil a vydal na vlastní náklady M. Jašek]; Melantrich, Praha, 1949 [přeložil M. Jašek, předmluvu napsal L. Svoboda]; Vyšehrad, Praha, 1952 [přeložil V. Bláha, přemluvu napsal J. Plojhar]; and Mladá Fronta, Praha, 1981 [přeložil V. Bláha, doslov napsal J. Loužil].

[B14] Bolzano, B., *Der Briefwechsel B. Bolzano's mit F. Exner*, tamtéž, sv. 4, KČSN, Praha, 1935 [vydal a opatřil úvodem a poznámkami E. Winter].

[B15] Bolzano, B., *Memoires géométriques*, tamtéž, sv. 5, KČSN, Praha, 1948 [vydal a opatřil poznámkami J. Vojtěch].

[B16] Bolzano, B., *Anti-Euklid*, Sborník **11**(1967), [vydal a opatřil úvodem K. Večerka].

[B17] Bolzano, B., *Gesamtausgabe*, Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart-Bad Cannstatt, od roku 1969 [vydavatelé: J. Berg, F. Kambartel, J. Loužil, B. van Rootselaar, E. Winter].

[B18] Bolzano, B., *Reine Zahlenlehre*, in: [B17], sv. 2A/7, 1976 [vydal a opatřil úvodem a poznámkami J. Berg].

[B19] Bolzano, B., *Výbor z filozofických spisů*, Svoboda, Praha, 1981 [vydali J. Černý a J. Loužil, z němčiny přeložil J. Loužil].

Sborníky věnované Bernardu Bolzanovi

[BB1] *Bernard Bolzano – konference českých matematiků*, Matematická vědecká sekce, Praha, 1981 [sborník konference ve Zvíkovském Podhradí; předmluvu napsal Š. Schwabik].

[BB2] *Bernard Bolzano 1781 – 1848*, Univerzita Karlova, Praha, 1981 [vydal M. Jauris].

[BB3] *Bernard Bolzano – Early Mathematical Works*, Acta hist. **12**(1981) (zvláštní svazek) [vydali J. Folta a L. Nový].

[BB4] *Bernard Bolzano – Impact of Bolzano's Epoch on the Development of Science*, Acta hist. **13**(1982) (zvláštní svazek) [vydal L. Nový a kol.].

Další literatura

[1] Beran, J., *Bernard Bolzano a Královská česká společnost nauk*, Filosofický časopis **29**(1981), 942–953.

[2] Berg, J., *Bolzano's Logic*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1962.

[3] Berka, K., *K současnému stavu Bolzanovského bádání*, Filosofický časopis **24**(1976), 705–720.

[4] Berka, K., *Bernard Bolzano*, Filosofický časopis **26**(1978), 742–760.

[5] Berka, K., Prokešová, B., *Bolzanovy boje o vydání a uznání Vědosloví*, Filosofický časopis **27**(1979), 697–725.

[6] Berka, K., *Bolzanova filozofie matematiky*, Filosofický časopis **28**(1980), 559–589.

[7] Berka, K., *Bernard Bolzano – předchůdce moderní logiky*, DVT **81**(1981), 205–216.

[8] Berka, K., *Bernard Bolzano*, Horizont, Praha, 1981.

[9] Bržečka, V. F., *O funkcii Bol'cano*, Uspechi matematičeskich nauk **4(30)**(1949), č. 2, 15–21.

[10] Cantor, G., *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten IV*, Math. Ann. **21**(1883), 51–58, 545–591.

[11] Crkalová, Z., *Karel Petr a Bernard Bolzano*, in: *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, Prometheus, Velké Meziříčí, 2000, 36–50.

[12] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Harzburg, 1887; druhé vyd. 1893; třetí vyd. Braunschweig, 1911.

[13] Folta, J.; Nový, L., *Vytváření předpokladů širšího vědeckého rozvoje (Od devadesátých let 18. století do šedesátých let 19. století*, in: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*, Praha, 1961, 133–161.

[14] Folta, J., *N. I. Lobačevskij a B. Bolzano*, PMFA **6**(1961), 283–284.

[15] Folta, J., *Základy geometrie na rozhraní 18. a 19. století a Bolzanovo dílo*, Zprávy **3**(1966), 14–18; anglická verze: *The Foundations of Geometry at the Turn of the 18th and 19th Centuries and Bolzano's Contribution*, Actes du XI^e Congrès International d'Histoire des Sciences 3, Warszawa, 1968, 225–228.

[16] Folta, J., *Bernard Bolzano and the Foundations of Geometry*, Acta hist. **2**(1966) (zvláštní svazek), 75–104.

[17] Folta, J., *Základy geometrie v pracích českých matematiků 19. století*, Sborník **11**(1967), 169–202.

[18] Folta, J., *Zamyšlení nad bolzanovskými výročími*, PMFA **26**(1981), 241–248.

[19] Folta, J., *Bolzanova prvotina ve vývoji elementární geometrie počátku 19. století*, DVT **81**(1981), 228–236.

[20] Folta, J., *Život a vědecké snahy Bernarda Bolzana*, in: [32], 11–29; zkrácená verze se stejným názvem: Matematika a fyzika ve škole **12**(1981–82), 85–104.

[21] Fuchs, E., *Bernard Bolzano a Paradoxy nekonečna*, in: *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, Prometheus, Velké Meziříčí, 2000, 86–99.

[22] Fujita, I., *Borutsāno no tetsugaku*, Tokyo, 1963 [*Bolzanova filosofie*, japonsky, anglické resumé].

[23] Grattan-Guinness, I., *Četl Cauchy Bolzana před napsáním Cours d'Analyse?*, PMFA **15**(1970), 133–137 [z angličtiny přeložil J. Folta].

[24] Grattan-Guinness, I., *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge–London, 1970.

[25] Hykšová, M., *Karel Rychlík a Bernard Bolzano*, in: *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, Prometheus, Velké Meziříčí, 2000, 51–62.

[26] Jarník, J.; Schwabik, Š., *Skončil jubilejní rok Bernarda Bolzana*, ČPM **107**(1982), 196–202.

[27] Jarník, J.; Schwabik, Š., *1981 – The Bicentenary of Bernard Bolzano*, ČMŽ **32(107)**(1982), 329–333 [anglická verze většiny práce [26]].

[28] Jarník, V., *O funkci Bolzanově*, ČPMF, **51**(1922), 248–264; přetisk v [32], 60–73.

[29] Jarník, V., *Bolzanova "Functionenlehre"*, ČPMF, **60**(1931), 240–262; přetisk v [32], 39–59.

[30] Jarník, V., *Bernard Bolzano a základy matematické analýzy*, in: sborník *Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1953, 450–458; přetisk v [32], 31–38.

[31] Jarník, V., *Bernard Bolzano (5. 10. 1781 – 18. 12. 1848)*, ČPMF **87**(1962), 107–111; anglický překlad: ČMŽ **2(86)**(1961), str. 485–489; přetisk v [32], 74–78.

[32] Jarník, V., *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota, Praha, 1981 [stejná publikace vyšla zároveň v anglickém překladu J. Jarníka pod názvem *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*].

[33] Jašek, M., *Aus dem handschriftlichen Nachlass B. Bolzano's*, Věstník 1920–21, č. 1, 1–32.

[34] Jašek, M., *Funkce Bolzanova*, ČPMF **51**(1922), 69–76.

[35] Jašek, M., *Über den wissenschaftlichen Nachlaß Bernard Bolzanos*, Jahr. DMV **31**(1922), 2. oddělení, 109–110.

[36] Jašek, M., *O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana*, ČPMF **53**(1923–24), 102–109.

[37] Kolman, A., *Bernard Bolzano*, Izdatelstvo akademii nauk SSSR, Moskva, 1955; stejnojmenný český překlad: Státní nakladatelství politické literatury, Praha, 1958 [přeložil J. Šimánek].

[38] Kowalewski, G., *Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion*, Berichte Säch. Akad. **74**(1922), 91–95.

[39] Kowalewski, G., *Bolzanos Verfahren zur Herstellung einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion*, Acta math. **44**(1923), 314–319.

[40] KUREPA, D., *Around Bolzano's Approach to Real Numbers*, ČMŽ **32(107)**(1982), 655–666 [přetisk přednášky na konferenci *Toposym V*, Praha, 24. – 28. 8. 1981].

[41] KURZWEIL, J., *Tribute to Bernard Bolzano*, in: *Equadiff 5*, Teubner, Leipzig, 1982, 212–217 [příspěvek na konferenci *Equadiff 5*, Bratislava, 24. – 28. 8. 1981].

[42] LAUGWITZ, D., SCHMIEDEN, C., *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*, Math. Zeit. **69**(1958), 1–39.

[43] LAUGWITZ, D., *Anwendungen unendlich kleiner Zahlen*, Crelle **207**(1961), 53–60, **208**(1961), 22–34.

[44] LAUGWITZ, D., *Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre*, Archive **2**(1962–66), 398–409 [podáno k tisku: 1965].

[45] LAUGWITZ, D., *Bolzano's Infinitesimal Numbers*, ČMŽ **32(107)**(1982), 667–670.

[46] LOUŽIL, J., *Bernard Bolzano*, Melantrich, Praha, 1978.

[47] MARITZ, P., *The Bolzano House in Prague*, Mathematical Intelligencer **23**(2001), 52–55.

[48] MOORE, G. H., *Historians and philosophers of logic: Are they compatible? The Bolzano-Weierstrass theorem as a case study*, History and Philosophy of Logic **20**(1999), 169–180.

[49] NĚMCOVÁ – BEČVÁŘOVÁ, M., *František Josef Studnička a Bernard Bolzano*, in *Matematika v 19. století*, edice *Dějiny matematiky*, sv. 3, Prometheus, Praha, 1996, 115–119.

[50] NOVÝ, L., *K otázce Bolzanovy profesury matematiky v r. 1821*, Zprávy **7**(1961), 28–30.

[51] NOVÝ, L., *Základy matematické analysy u Bolzanových pražských současníků*, Sborník **6**(1961), 28–43.

[52] NOVÝ, L., *K rozsahu znalostí zahraniční matematické literatury v českých zemích v prvé polovině 19. století*, Zprávy **9**(1961), 30–32.

[53] NOVÝ, L., *Origins of Modern Algebra*, Academia, Praha, 1973.

[54] NOVÝ, L., *Zamyšlení nad některými metodologickými problémy bolzanovského bádání*, DVT **81**(1981), 199–204.

[55] NOVÝ, L., *Poznámky o „stylu" Bolzanova matematického myšlení*, DVT **81**(1981), 217–227.

[56] PAVLÍKOVÁ, M., *Zahraniční bolzanovské studie*, Filosofický časopis **16**(1968), 149–154.

[57] PAVLÍKOVÁ, M., *Působení Bernarda Bolzana na pražské univerzitě*, Zprávy archivu UK **3**(1980), 5–31.

[58] PAVLÍKOVÁ, M., *Bolzanovo působení na pražské univerzitě*, UK, Praha, 1985.

[59] PETR, K., *Bernard Bolzano a jeho význam v matematice*, Praha, 1926.

[60] RAMSAMUJTH, T. I., *The Complexity of Nowhere Differentiable Continuous Functions*, Canadian Journal of Mathematics **41**(1989), 83–105.

[61] VAN ROOTSELAAR, B., *Bolzano's Theory of Real Numbers*, Archive **2**(1962–66), 168–180 [podáno k tisku: 1963].

[62] RUSS, S., *Bolzano's Analytic Program*, Mathematical Intelligencer **14(3)**(1992), 45–53; český překlad: *Bolzanův analytický program*, PMFA **38**(1993), 249–259 [přeložil J. Fiala].

[63] SEIDLEROVÁ, I., *Politické a sociální názory B. Bolzana*, ČPMF **81**(1956), 388–390.

[64] SEIDLEROVÁ, I., *Fysikální práce Bernarda Bolzana*, Zprávy **2**(1960), 14–16.

[65] SEIDLEROVÁ, I., *Ještě několik poznámek o Bolzanově vztahu k českému vědeckému prostředí*, Zprávy **11**(1962), 42–45.

[66] SEIDLEROVÁ, I., *Bemerkung zu den Umgängen zwischen B. Bolzano und A. Cauchy*, ČPMF **87**(1962), 225–226.

[67] SEIDLEROVÁ, I., *Poznámka k otázce styků mezi Bolzanem a Cauchym*, Zprávy **12**(1962), 30–31.

[68] SEIDLEROVÁ, I., *Politické a sociální názory B. Bolzana*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

[69] SCHWABIK, Š., *Matematik Bernard Bolzano*, Vesmír **60**(1981), 293–296.

[70] SCHWABIK, Š., *Jednota československých matematiků a fyziků k uctění památky Bernarda Bolzana*, in: Sjezdový sborník JČMF, Karlovy Vary, 1981, str. 5–9.

[71] SCHWABIK, Š., *Bernard Bolzano a matematická analýza*, in: *IX. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, Prometheus, Velké Meziříčí, 2000, str. 63–85.

[72] SIMON, P., *Bernard Bolzano a teorie dimenze*, PMFA **26**(1981), 259–261; nepatrně rozšířená verze v [BB1], 19–27.

[73] SOJÁK, V., *Bernard Bolzano*; edice *Kdo je ...*, sv. 103, Orbis, Praha, 1948.

[74] SPALT, D. D., *Die Unendlichkeiten bei Bernard Bolzano*, in: *Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1990, 189–218.

[75] SPALT, D. D., *Mathematical and Philosophical Principles of Weierstrass Number Theory between Bolzano and Cantor*, Archive **41**(1991), 311–362.

[76] SPALT, D. D., *Bolzanos Lehre von den Meßbaren Zahlen 1830–1989*, Archive **42**(1991), 15–70.

[77] STRUIK, R. a D. J., *Cauchy and Bolzano in Prague*, ISIS **11**(1928), 364–366.

[78] ŠEBESTÍK, J., *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, Vrin, Paris, 1992.

[79] VEČERKA, K., *Poznámka k Bolzanovu pojetí množiny*, Zprávy **10**(1962), 37–38.

[80] VESELÝ, F., *Život a dílo B. Bolzana*, Matematika ve škole **6**(1956), 449–464.

[81] VESELÝ, F., *Život Bernarda Bolzana a jeho matematicko-přírodovědné práce*, PMFA **2**(1957), 119–127, 234–243.

[82] VETTER, Q., *Bernard Bolzano, filosof a matematik*, strany 56–57 práce [87].

[83] VLČEK, E., *Fyzická osobnost Bernarda Bolzana*, PMFA **26**(1981), 259–261.

[84] VOJTĚCH, J., *O geometrických pojednáních Bolzanových*, ČPMF **64**(1935), 264–265.

[85] VOPĚNKA, P., *Nekonečno, množiny a možnost v Bolzanově pojetí*, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. II. Wiadomoscy Matematyczne **26**(1985), 171–204; rovněž v [BB1], 28–47.

[86] WINTER, E., *Bernard Bolzano und sein Kreis*, Verlag von Jakob Hegner, Leipzig, 1933; český překlad: *Bernard Bolzano a jeho kruh*, edice Akordu, spolek katolických akademiků Moravan, Brno, 1935 [přeložil a opatřil poznámkami Z. Kalista, předmluvu napsal A. Novák].

[87] WINTER, E., *Bernard Bolzano, filosof a matematik*, in: *Co daly naše země Evropě a lidstvu 2*, Praha, 1940, 54–57 [srov. [82]].

[88] WINTER, E., *Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzanos an F. Příhonský (1824–1848)*, Deutsche Akad. d. Wiss., Berlin, 1956.

[89] WINTER, E., *Wissenschaft und Religion im Vormärz. Der Briefwechsel Bernard Bolzanos mit Michael Josef Fesl 1822–1848*, Berlin, 1965 [vydali E. Winter a W. Zeil ve spolupráci s L. Zeilem, úvod napsal E. Winter].

SPISY

BERNARDA BOLZANA

VYDÁVÁ

KRÁLOVSKÁ ČESKÁ SPOLEČNOST NAUK

PŘEDMLUVU NAPSAL

Dr. KAREL PETR

PROFESOR UNIVERSITY KARLOVY V PRAZE

SVAZEK 1

FUNCTIONENLEHRE

VYDAL A POZNÁMKAMI OPATŘIL

Dr. KAREL RYCHLÍK

PROFESOR ČESKÉHO VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO
V PRAZE

PRAHA

1930

Obr. 5.4 Titulní list Bolzanova spisu Functionenlehre [B11]